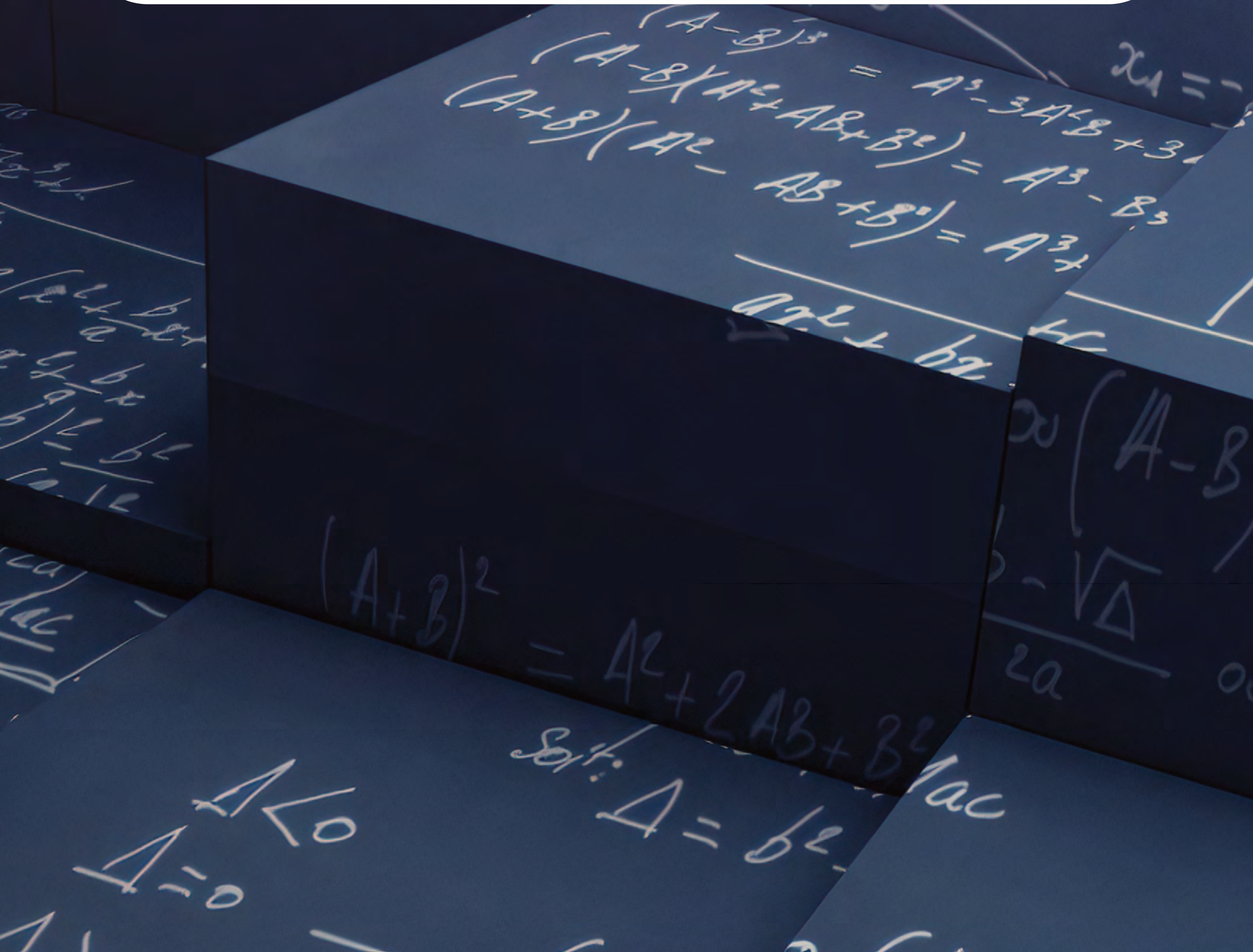
პროფესიული
უნარების
სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ლოგიკა და გეომეტრია



სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანაშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Swiss Agency for Development and Cooperation SDC

პროფესიული უნარების სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

მათემატიკური წიგნიერება

თავი III

— ფორმალური ლოგიკის საწყისები

თანამედროვე, სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალი ინჟინრები და მეცნიერები, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკას კარგად უნდა ფლობდნენ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რომლებიც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველიცაა, რომელიც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

მე- 11 კლასისთვის, წინარე ცოდნის გამეორება და ტექნოლოგიების გამოყენება

3.2. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

საკვანძო კითხვა:

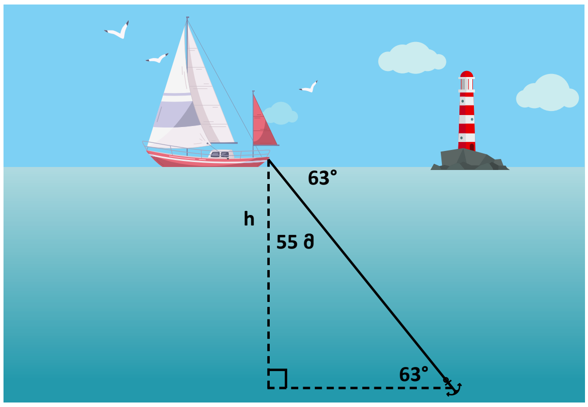
უძველესი დროიდან ადამიანები იკვლევდნენ სხვადასხვა ფიგურას და მათ ელემენტებს შორის დამოკიდებულებებს, რადგან გარკვეული დამოკიდებულებების დადგენა ეხმარებოდათ იმ დროისთვის მნიშვნელოვანი პრობლემის გადაჭრაში.

ტრიგონომეტრია მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ნაწილია, **ტრიგონომეტრია სწავლობს დამოკიდებულებას სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.**

(Triangle – სამკუთხედი, Metron – გაზომვა)

სიტყვა ტრიგონომეტრია დაკავშირებულია სამკუთხედთან და გაზომვებთან.

- *თქვენი აზრით, როდესაც ადრე მდინარეებში ან ტბებში შედიოდნენ მეთევზეები ნავებით ან ტივით, როგორ შეიძლებოდა მდინარის ან ტბის სიღრმის დადგენა?*

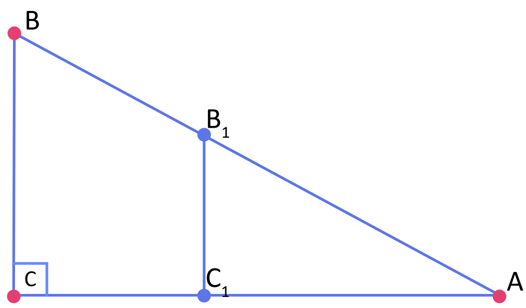


კვლევა

განვიხილოთ მართკუთხა ΔABC, რომლის $\angle C=90°$,

გავავლოთ BC გვერდის პარალელური B_1C_1 გვერდი.

$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, სამკუთხედები მსგავსია რადგან შესაბამისი სამივე კუთხე ტოლი აქვთ.



მსგავსებიდან გამომდინარე დავწეროთ შემდეგი თანაფარდობები:

I.	II.	III.
$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{AB_1}=k$	$\frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1}$	$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{AC_1}$
პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ
$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}$

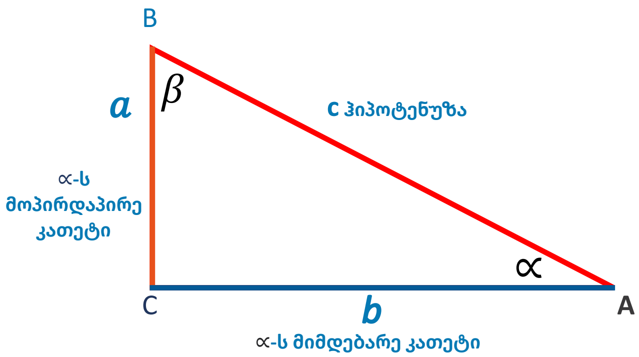
თუ ზემოთ მოცემულ ტოლობებს გავაანალიზებთ, დავინახავთ, რომ თუ ორ მართკუთხა სამკუთხედს ტოლი კუთხეები აქვთ (თუ სამკუთხედები მსგავსია), მაშინ ამ ორ სამკუთხედს მახვილი კუთხისთვის ტოლი ექნებათ:

$\frac{\textit{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი}}{\textit{ჰიპოტენუზასთან}}$	**(ეწოდება კუთხის სინუსი)**
$\frac{\textit{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი}}{\textit{ჰიპოტენუზასთან}}$	**(ეწოდება კუთხის კოსინუსი)**
$\frac{\textit{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი}}{\textit{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტთან}}$	**(ეწოდება კუთხის ტანგენსი)**
$\frac{\textit{მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი}}{\textit{მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტთან}}$	**(ეწოდება კუთხის კოტანგენსი)**
შენიშვნა: *ბოლო შეფარდების ჩვენება შეიძლება პირველი სამის მსგავსად.*	***აღნიშნული თანაფარდობებისთვის მათემატიკაში არის სპეციალური სახელები და აღნიშვნები.***

3.2.1 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

$sin\alpha = \frac{a}{c};$	$sin\beta = \frac{b}{c};$
$cos\alpha = \frac{b}{c};$	$cos\beta = \frac{a}{c};$
$tg\alpha = \frac{a}{b};$	$tg\beta = \frac{b}{a};$
$ctg\alpha = \frac{b}{a};$	$ctg\beta = \frac{a}{b};$



მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის სინუსი. **აღინიშნება**: $sin\alpha = \frac{a}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის კოსინუსი. **აღინიშნება**: $cos\alpha = \frac{b}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას მიმდებარე კათეტთან ეწოდება კუთხის ტანგენსი, **აღინიშნება**: $tg\alpha = \frac{a}{b}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას მოპირდაპირე კათეტთან ეწოდება კუთხის კოტანგენსი, **აღინიშნება**: $ctg\alpha = \frac{b}{a}$

შენიშვნა: *ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ტანგენსი და კოტანგენსი აღინიშნება შემდეგნაირად* $tg\alpha = tan\alpha; ctg\alpha = cot\alpha$

3.2.2 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები გამოთვლა ტექნოლოგიების გამოყენებით

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ დავადგინოთ, კუთხის თითოეული გრადუსისთვის რას უდრის: სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი?*
- *როგორ დავადგინოთ კუთხის მნიშვნელობა, თუ ვიცით კუთხის sinα,cosα, tgα, ctgα-ის მნიშვნელობა?*

მეთოდი 1:

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

გაააქტიურეთ ღილაკი *Func*, ამოირჩიეთ რომელი კუთხის სინუსის, კოსინუსის ან ტანგესის მოძებნა გინდათ (მიაქციეთ ყურადღება, კუთხე იზომება გრადუსებით ან რადიანებით); კალკულატორი გაჩვენებთ თითოეული კუთხისთვის რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα;*

მაგ., *cos*25°≈ 0.906

საკვანძო კითხვა:

1. *sinα, cosα, tgα, ctgα-ს ასევე ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?*

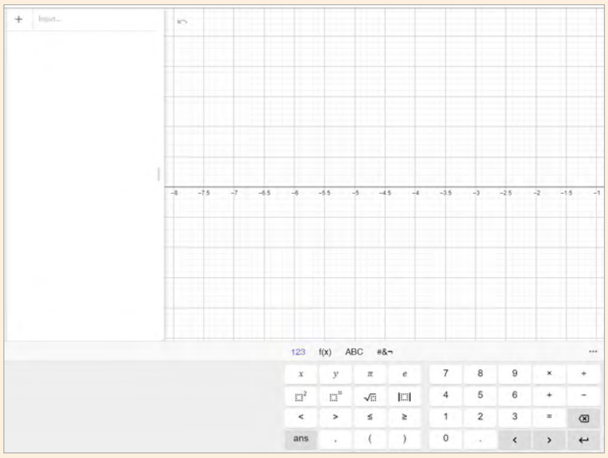
დადგენილია, რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα* – კუთხის თითოეული მნიშვნელობისთვის. ცხრილით, მოცემულია ის მნიშვნელობები, როდესაც კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*-ის წარმოდგენა შეიძლება მოხერხებული ფორმით.

შეგახსენებთ, კუთხე შეიძლება გავზომოთ როგორც გრადუსებით, ასევე რადიანებით.

180° გრადუსს შეესაბამება *π* რადიანი; პროპორციის გამოყენებით მარტივად დავადგენთ შემდეგ კავშირს:

Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე

Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



გრადუსების და რადიანების შესაბამისობის ცხრილი

რადიანი	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
გრადუსი	0	30	45	60	90
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	განსაზღვრული არ არის

გრადუსი	რადიანი
180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
360°	2π

- გამომდინარე იქიდან, რომ სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი კუთხის კონკრეტულ გრადუსულ ზომას შეუსაბამებენ რიცხვს, ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ გრაფიკებს შევისწავლით მოგვიანებით.

შებრუნებული ფუნქციები

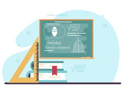
- *როგორ ვიპოვოთ კუთხე, თუ ვიცით კუთხის სინუსი, კოსინუსი ან ტანგენსი?*

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შებრუნებული ფუნქციები გვეხმარება, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი კოსინუსი ან ტანგენსი არის კონკრეტული რიცხვი.

$$sin^{-1}\left(\frac{BC}{AB}\right) = \angle A$$

$$cos^{-1}\left(\frac{AC}{AB}\right) = \angle A$$

$$tg^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right) = \angle A$$

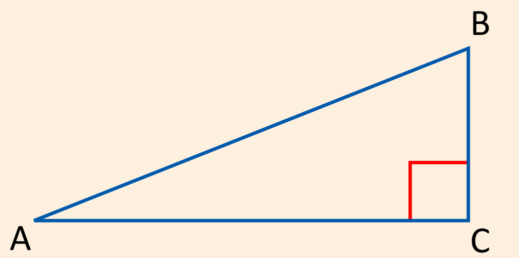


MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

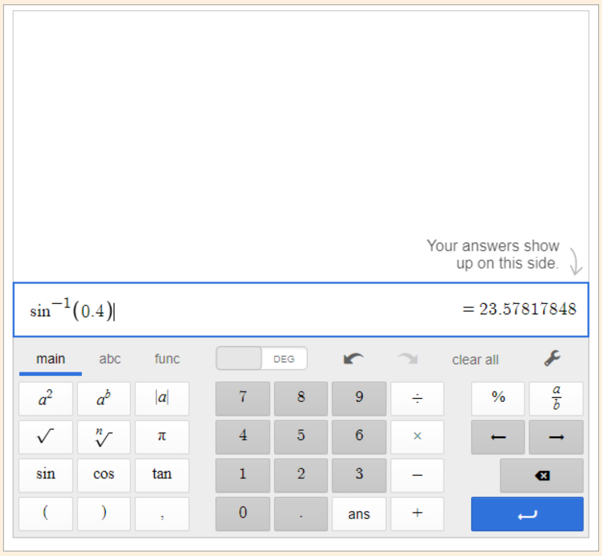
შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

შებრუნებული ფუნქცია:

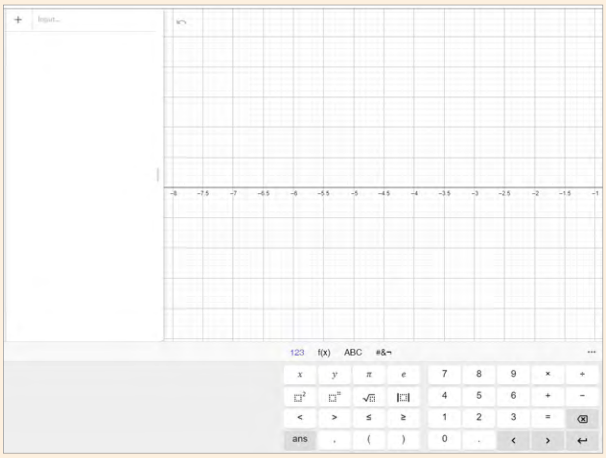
თუ ვიცით კუთხის სინუსი და გვსურს, დავადგინოთ (ვიპოვოთ) ის კუთხე, რომელზეც ფუნქცია იღებს მნიშვნელობას, ვიქცევით შემდეგნაირად:



Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ვირჩევთ sin^{-1} ფუნქციას, ვწერთ რიცხვით მნიშვნელობას და ვპოულობთ კუთხეს.

დაიმახსოვრეთ, $sin^{-1} \neq \dfrac{1}{sin\alpha}$

sin^{-1} (0.1) – ნიშნავს, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი არის 0.1;

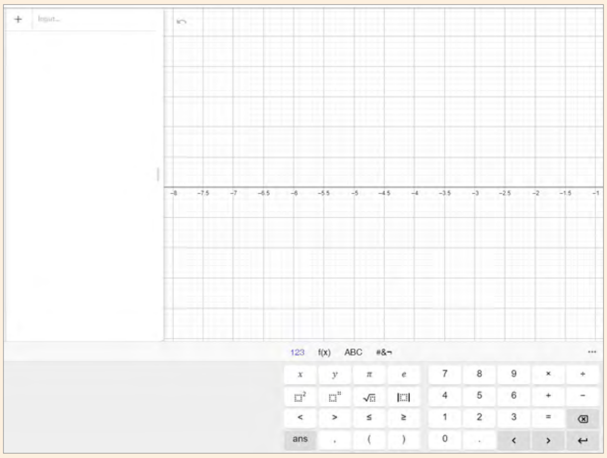
ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ cos^{-1} (0.1); tg^{-1} (0.1); ctg^{-1} (0.1)

გამომდინარე იქიდან, რომ კათეტი ყოველთვის ნაკლებია ჰიპტენუზაზე,

კუთხის სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობა ნაკლებია ან ტოლი 1-ის.

უფრო მეტს სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობებზე ვისწავლით მოგვიანებით.

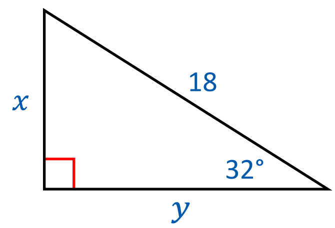
Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ნიმუში 1

- *როგორ გვეხმარება ტრიგინომეტრიული ფუნქციები სამკუთხედში უცნობი გვერდის პოვნაში?*

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



ვიპოვოთ x

ვიცით, რომ $sin32° = \dfrac{x}{18}$;

$x = 18 \cdot sin32°$ (1)

გრაფიკული კალკულატორით [Desmos Calculator] დავადგინოთ, რას უდრის sin32°≈0.53, შევიტანოთ მნიშნელობა (1) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $x = 18 \cdot sin32° \approx 18 \cdot 0.53 \approx 9.54$

ვიპოვოთ y

$cos32° = \dfrac{y}{18}$;

$y = 18 \cdot cos32°$ (2)

გრაფიკული კალკულატორით [Desmos Calculator] დავადგინოთ, რას უდრის cos32°≈0.85, შევიტანოთ მნიშნელობა (2) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $y = 18 \cdot cos32° \approx 18 \cdot 0.85 \approx 15.3$

რეკომენდაცია: y-ის გამოთვლა შეგვიძლია, როგორც პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ასევე, $cos32°$-ის მეშვეობით.

3.2.3 მნიშვნელოვანი მართკუთხა სამკუთხედები

ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ვადგენთ, რომ

მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის წინ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია; ხოლო მიმდებარე კათეტი უდრის მოპირდაპირე კათეტი გამრავლებული $\sqrt{3}$-ზე.

დასაბუთება:

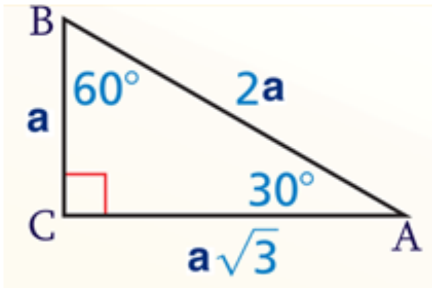
$sin30° = \frac{BC}{AB}$; $sin30° = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{AB}$; $AB = 2a$

მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში, ჰიპოტენუზის სიგრძე უდრის კათეტის სიგრძე გამრავლებული $\sqrt{2}$ -ზე.

თუ ტოლ კათეტებს აღვნიშნავთ a-თი, ხოლო ჰიპოტენუზას c-თი,

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2} = 2\sqrt{a}$$



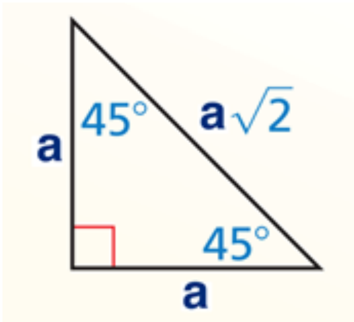
პითაგორას თეორემის თანახმად,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

$AC\sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$AC = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$



ლოგიკის სავარჯიშო

მათემატიკის მოყვარულთათვის: რატომ არის sin 30° = $\frac{1}{2}$?

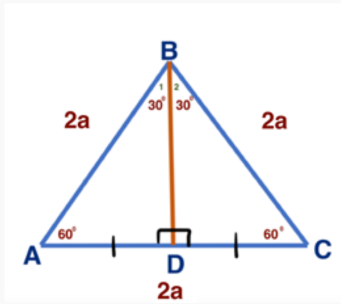
განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $2a$; ტოლგვერდა სამკუთხედში ნებისმიერ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, ბისექტრისა და მედიანა ერთი და იგივე მონაკვეთია;

განვიხილოთ ΔADB, იგი მართკუთხაა, რადგან გავლებულია BD სიმაღლე.

იგივე BD სიმაღლე იქნება $\angle B$-ს ბისექტრისა, შესაბამისად, $\angle ABD = 30°$

$sin30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$;

რ.დ.გ. (რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)



კვლევითი აქტივობა:

მოცემული სამკუთხედიდან იპოვეთ:

$sin30°$, $cos30°$;
$sin60°$, $cos60°$;
$tg30°$, $ctg30°$;
$tg60°$, $ctg60°$;

მინიშნება: ტექნოლოგიების განვითარებამდე აღნიშნული და გაცილებით მეტი ფორმულების ცოდნა იყო არსებითად მნიშვნელოვანი იმისათვის, რომ მეცნიერებს ზუსტი გამოთვლები ეწარმოებინათ.

საინტერესო ისტორიული ფაქტები

კომპიუტერის გამოგონებამდე – მოცემული ფოტო გადაღებულია ნასას (NASA) კვლევით დეპარტამენტში 1957 წელს. ფოტოზე ჩანს, რამდენი მეცნიერი აწარმოებდა გამოთვლით სამუშაოებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო კოსმოსში გაშვებულ რაკეტასთან. წამყვანი მეცნიერები (მათემატიკოსები და ფიზიკოსები) დაფებს ავსებდნენ ანგარიშის დროს. იმ ეპოქაში აუცილებელი იყო, ყველა ფორმულა სცოდნოდა მეცნიერს და გაწაფული ყოფილიყო გამარტივებებსა და გამოთვლების შესრულებაში.

წყარო NASA The National Aeronautics and Space Administration

თანამედროვეობაში აღნიშნული გამოთვლებს კომპიუტერი მაღალი სიზუსტით, წამებში ასრულებს. ტექნოლოგიურ ერაში კომპიუტერი გამოთვლების შესრულებაში უდიდეს სამსახურს უწევს მეცნიერებს, ამიტომ სწავლებაში უმნიშვნელოვანესია გვესმოდეს, როგორ ხდება კავშირების დამყარება ფიგურის ელემენტებს შორის, ასევე, სხვადასხვა ცნებებსა და კონცეფციებს შორის როგორ შეიძლება ახალი კანონზომიერების აღმოჩენა და შემდეგ ცოდნის გამოყენება, როგორც ყოველდღიურობაში, ასევე მეცნიერების სხვადასხვა დარგში.

მოგვიანებით ისწავლით, როგორ ხდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით ტალღური მოვლენების მოდელირება.

რუბრიკა

ქალები მეცნიერებაში

მარგარეთ ჰამილტონმა აპოლოს კოსმოსში გასაფრენად საჭირო ალგორითმი შეიმუშავა და დაწერა კოდი, რომლის მეშვეობითაც პირველად გადაუღეს ფოტო შავ ხვრელს.

მარგარეთ ჰამილოტნი იყო პირველი ქალი, რომელიც MIT-ში პროგრამირების კათედრას ხელმძღვანელობდა.

„ნუ გეშინიათ დასვათ კითხვები, კითხვების არდასმა და საერთოდ, კითხვების გარეშე ყოფნა, არის ყველაზე სულელური კითხვა“ – მარგარეტ ჰამილტონი.

მოიძიეთ სხვა საინტერესო ინფორმაცია მარგარეტ ჰამილტონზე.

მარგარეტ ჰამილტონი, 1969 წელი, აპოლონის მისია, მის მიერ შემუშავებულ ალგორითმთან (დაწერილ კოდთან).

სავარჯიშოები

1. შედით საიტზე 🔗 Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator).

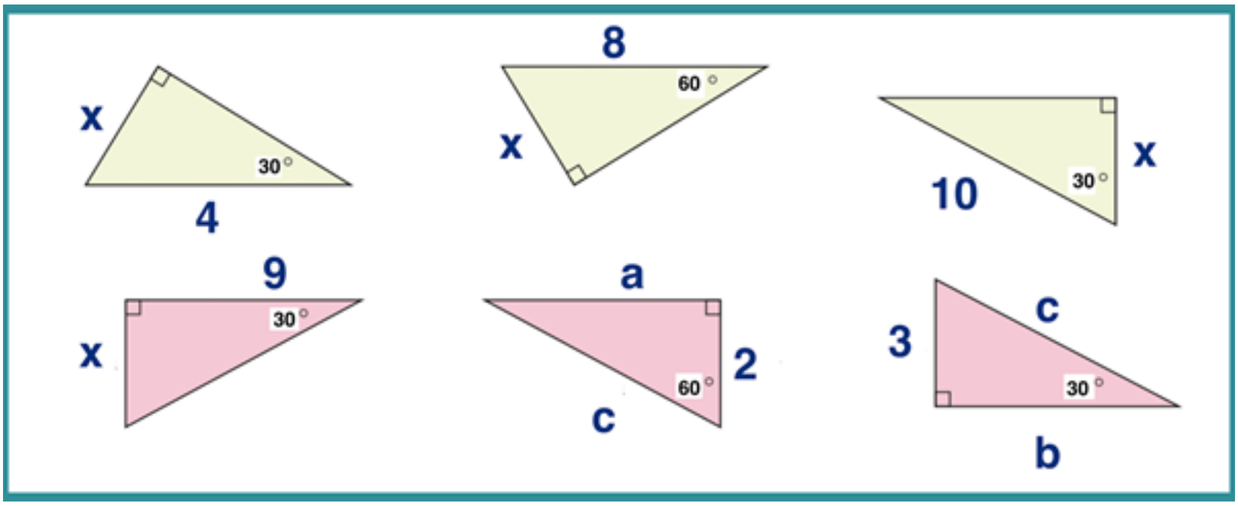
იპოვეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*

ა) $\alpha = 0°$	ე) $\alpha = 20°$
ბ) $\alpha = 90°$	ვ) $\alpha = 40°$
გ) $\alpha = 30°$	ზ) $\alpha = 25°$
დ) $\alpha = 60°$	თ) $\alpha = 180°$

2. იპოვეთ კუთხის მნიშვნელობა თუ ვიცით, რომ

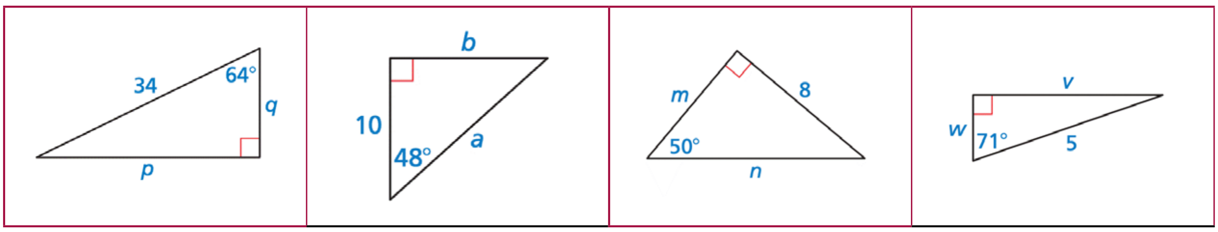
ა) $sin\alpha = 0.5$	ე) $tg\alpha = 1$
ბ) $sin\alpha \approx 0.8$	ვ) $ct\alpha \approx 0.5$
გ) $cos\alpha \approx 0.5$	ზ) $tg\alpha \approx 1.5$
დ) $cos\alpha \approx 0.7$	თ) $ctg\alpha = 1$

3. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



4. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები

ა) ბ) გ) დ)



5. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 1 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

სავარჯიშოები

6. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 1 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

7. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 8 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

8. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 60°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 6 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

9. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 4 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

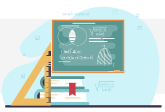
10. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის სიგრძე $12\sqrt{2}$ სმ-ია, იპოვეთ კათეტების სიგრძეები.

11. ტოლფერდა სამკუთხედში კუთხე 120°-ია, ფერდი 10 სმ, იპოვეთ ფუძის სიგრძე და ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

12. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 4.2სმ, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

13. ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა 5.4 სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

14. **გამოწვევა:** ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა a სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე. (დააკავშირეთ სიმაღლე a-სთან).

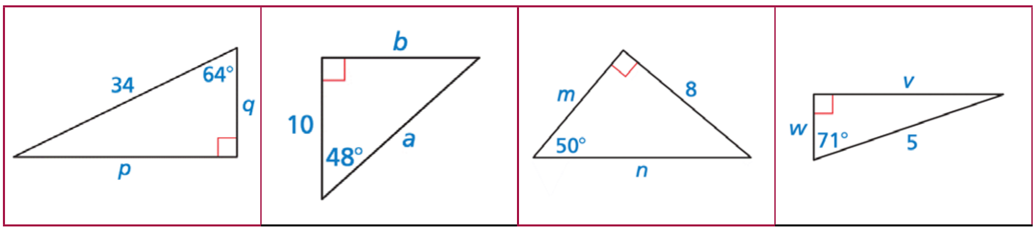


MATH Lab

15. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი მახვილი კუთხეების გრადუსული ზომები;

ტექნოლოგიების გამოყენება

ა) ბ) გ) დ)



16. **არგუმენტირებული მსჯელობა:** გამოთქვით ვარაუდი, რატომ ვერ იქნება კუთხის კოსინუსი ან სინუსი 1-ზე მეტი და რატომ შეიძლება, კუთხის ტანგენსი იყოს 1-ზე მეტი. მოიყვანეთ არგუმენტი.

17. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 60°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

სავარჯიშოები

18. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 18სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 30°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

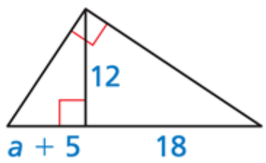
19. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 8 სმ-ია, მის წინ მდებარე კუთხე კი 60°-ია; იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

20. მართკუთხედის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

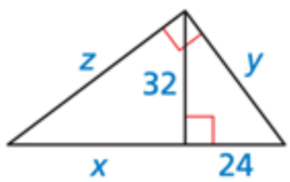
21. მართკუთხედის პერიმეტრი 72 სმ-ია. გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:5. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

22. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე

ა) იპოვეთ a



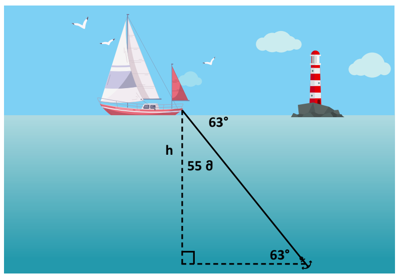
ბ) იპოვეთ x, y, z



23. განვიხილოთ გაკვეთილის დასაწყისში მოცემული ამოცანა.

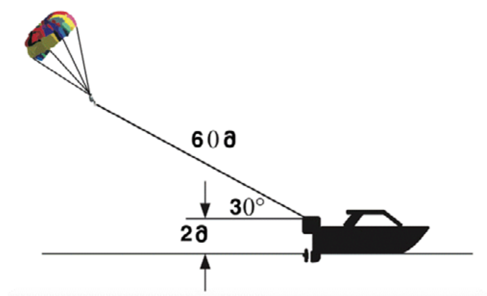
სათევზაოდ გასულმა მეთევზემ ჩააგდო ღუზა, რომლის სიგრძე 55 მ-ია;

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ტბის სიღრმე.



24. ზღვაზე წასულმა ახალგაზრდებმა გადაწყვიტეს მფრინავი ბურთით გასეირნება, მათ მფრინავი ფურთი მიამაგრეს კატერს.

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ რა სიმაღლეზეა მფრინავი ბურთი წყლის ზედაპირიდან?



25. **გამოწვევა: Math Lab** – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

MATH Lab – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

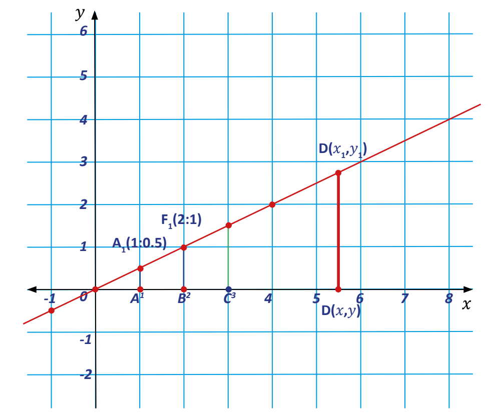
15. როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

ტექნოლოგიების გამოყენება

ჯგუფური სამუშაო – კვლევითი აქტივობა:

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = kx$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი, მონიშნეთ მასზე წერტილები და დაუშვით მართობები Ox ღერძზე. მიიღებთ მსგავსს სამკუთხედებს (დაასაბუთეთ სამკუთხედების მსგავსება)

ΔOAA_1, ΔOBB_1, ΔOCC_1, ΔODD_1,



თითოეული სამკუთხედისთვის იპოვეთ: *sinα; cosα; tgα*

	$\Delta\ OAA_1$	Δ OBB$_1$	$\Delta\ OCC_1$
sinα			
cosα			
tgα			

აქტივობის შემდეგ ნახავთ, რომ თითოეული სამკუთხედისთვის *sinα, cosα, tgα*-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები აქვთ.

მინიშნება: თუ გავაანალიზებთ მოცემულს, მივიღებთ, რომ

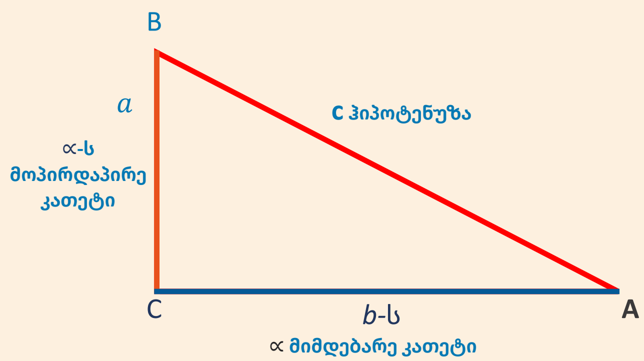
$$tg\alpha = \frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB} = \dots = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$tg\alpha = k$

აღნიშნულიდან გამომდინარე k-ს კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება.

3.3. ტრიგონომეტრიული იგივეობები

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.



რადგან მართკუთხა სამკუთხედში $\beta = 90° - \alpha$, ამიტომ მივიღებთ:

$sin\alpha = cos(90° - \alpha)$ $\quad$ $sin30° = cos(90° - 30°) = cos60°$

$cos\alpha = sin(90° - \alpha)$ $\quad$ $cos30° = sin(90° - 30°) = sin60°$

$tg\alpha = ctg(90° - \alpha)$ $\quad$ $tg30° = ctg(90° - 30°) = ctg60°$

$ctg\alpha = tg(90° - \alpha)$ $\quad$ $ctg30° = ctg(90° - 30°) = tg60°$

$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $cos\alpha = \frac{b}{c}$	$sin\beta = \frac{b}{c}$ $cos\beta = \frac{a}{c}$
$tg\alpha = \frac{a}{b}$ $ctg\alpha = \frac{b}{a}$	$tg\beta = \frac{b}{a}$ $ctg\beta = \frac{a}{b}$

პითაგორას თეორემის თანახმად, ვიცით, რომ

$a^2 + b^2 = c^2$ გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე c^2-ზე

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

შევცვალოთ თითოეული თანაფარდობა ტრიგონომეტრიული ფუნქციით

$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

აღმოვაჩინეთ ახალი კავშირები და კანონზომიერება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $a = c \cdot sin\alpha$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ $b = c \cdot cos\alpha$

შევიტანოთ აღნიშნული ინფორმაცია ტანგენსის და კოტანგენსის ფორმულაში

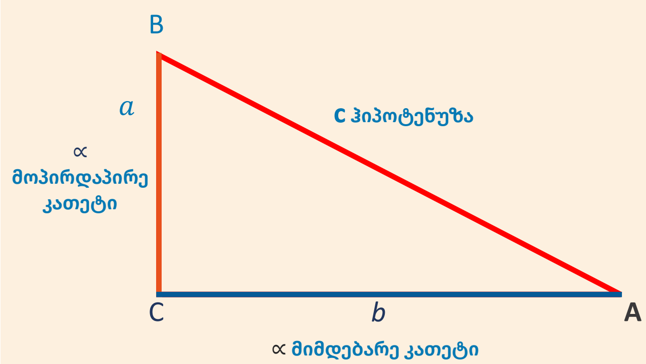
$tg\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad$ $tg\alpha = \frac{c \cdot sin\alpha}{c \cdot cos\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

$ctg\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad$ $ctg\alpha = \frac{c \cdot cos\alpha}{c \cdot sin\alpha} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

როგორც ხედავთ, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთმანეთთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული



3.3.1 ბლაგვი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი

საკოორდინატო სიბრტყეზე განვიხილოთ წრეწირი, რომლის ცენტრია სათავე, ხოლო რადიუსის სიგრძე უდრის 1-ს; ასეთ წრეწირს ეწოდება – ერთეულოვანი წრეწირი, ხოლო შესაბამის წრეს – ერთეულოვანი წრე.

ერთეულოვან წრეწირზე მოვნიშნოთ $B(x;y)$ წერტილი და Oy ღერძის ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $D(-x;y)$ წერტილი;

შევაერთოთ B წერტილი სათავესთან, დავუშვათ მართობი Ox ღერძზე და განვიხილოთ მართკუთხა ΔOBC, რომლის $\angle BOC = \alpha$;

ანალოგიურად, დავხაზოთ მართკუთხა ΔODE, $\Delta BOC = \Delta ODE$

ΔOBC-ში დავწეროთ α-კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{OB}$ (1) $\cos\alpha = \dfrac{OC}{OB}$ (2)

რადგან წრე ერთეულოვანია

$OB = R = 1$, ხოლო

$BC = y$; $OC = x$

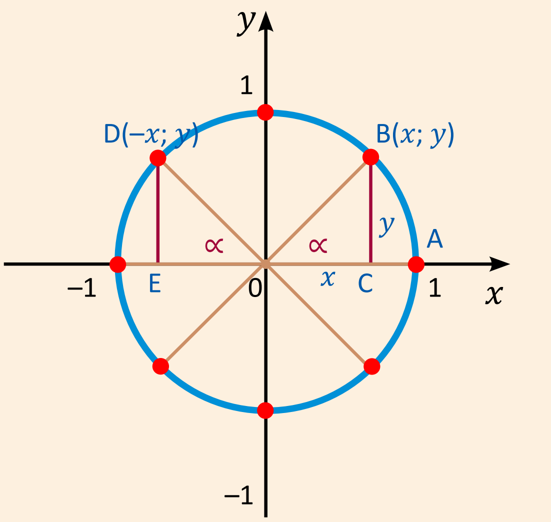
ჩავსვათ აღნიშნული (1) და (2) ფორმულაში და მივიღებთ, რომ

$\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$; $\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

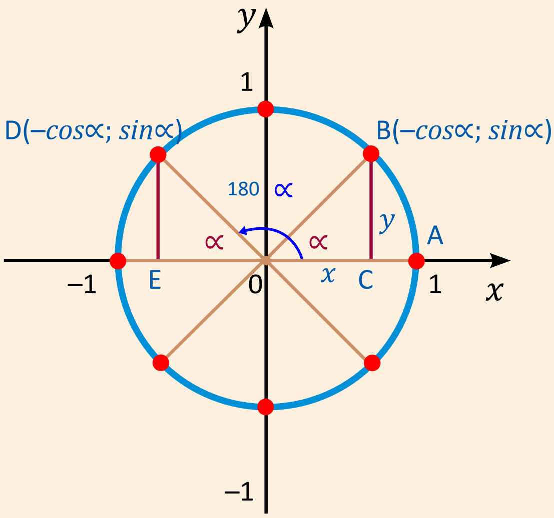
თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს დავინახავთ, რომ ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილის კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხესთან, რომელსაც ქმნის ამ წერტილის საკოორდინატო სისტემის სათავესთან შემაერთებელი მონაკვეთი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ე.ი. B წერტილის კოორდინატებია: $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$

განვიხილოთ $\angle AOD = 180 - \alpha$ ბლაგვი კუთხეა,
D წერტილის კოორდინატი შეესაბამება აღნიშნულ კუთხეს
$D(\cos(180-\alpha);\ \sin(180-\alpha))$, რადგან D სიმეტრიულია B წერტილის Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ
$D(-\cos\alpha;\ \sin\alpha)$

თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს, მივიღეთ ახალი კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის



$\Delta BOC = \Delta DOE$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით



ნიმუში 1 – ტრიგონომეტრიული იგივეობა

დაყვანის ფორმულა

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ როგორც ვხედავთ, ბლაგვი კუთხის კოსინუსი უარყოფითი რიცხვია.	$\alpha = 30°$; $\cos(180° - 30°) = -\cos30°$ $\cos(150°) = -\cos30°$ $\sin(180° - 30°) = \sin30°$ $\sin150° = \sin30°$
როგორც ხედავთ, ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი ბლაგვი კუთხისთვის, მისი სინუსი და კოსინუსი გამოვთვალოთ შესაბამისი მახვილი კუთხის სინუსით და კოსინუსით.	

ნიმუში 2

- *როგორ ვიპოვოთ ბლაგვი კუთხის კოსინუსი ან სინუსი?*

ვიპოვოთ cos145° და sin145°

Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ $\cos145°$ ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $\cos145° = \cos(180° - 35°) = -\cos35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $\cos145° \approx -0.82$ $\cos35° \approx 0.82$	Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ sin145° ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $\sin145° = \sin(180° - 35°) = \sin35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $\sin145° \approx 0.57$ $\sin35° \approx 0.57$

სავარჯიშოები

1. შეავსეთ ცხრილი და პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე სიზუსტით.

α	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$cos(180^\circ - \alpha)$	$sin(180^\circ - \alpha)$
0°				
15°				
45°				
80°				
90°				
120°				

ბ) შეამოწმეთ თითოეულისთვის სამართლიანია თუ არა იგივეობა: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

2. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი.
ა) 45°; ბ) 50°; გ) 30°; დ) 88°; ე) 60°.

3. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი
ა) 145°; ბ) 133°; გ) 95°; დ) 108°; ე) 154°.

4. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია
ა) $cos30^\circ$; ბ) $cos45^\circ$; გ) $cos65^\circ$; დ) $cos29^\circ$; ე) $cos33^\circ$.

5. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $cos130^\circ$; ბ) $cos125^\circ$; გ) $cos135^\circ$; დ) $cos150^\circ$; ე) $cos120^\circ$.

6. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $sin120^\circ$;ბ) $sin150^\circ$; გ) $sin135^\circ$; დ) $sin110^\circ$; ე) $sin170^\circ$.

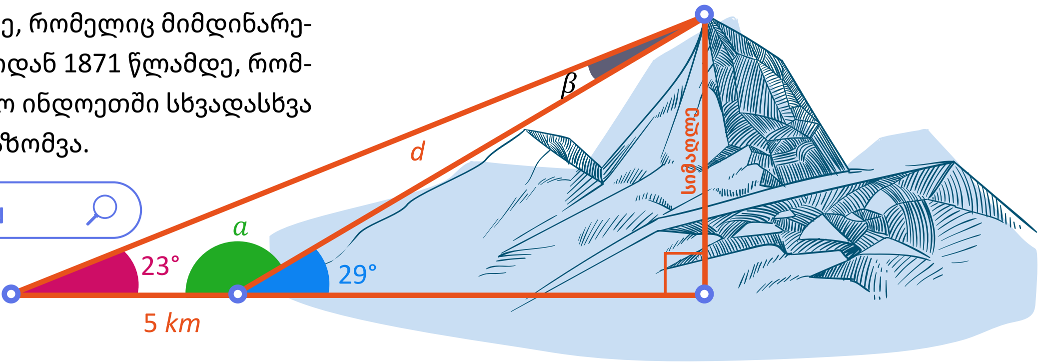
7. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია:
ა) $cos135^\circ$; ბ) $cos150^\circ$; გ) $cos120^\circ$; დ) $cos160^\circ$; ე) $cos110^\circ$.

8. ჩვენ ვნახეთ, რომ $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ მოცემული ფორმულიდან გამომდინარე, იპოვეთ
ა) $tg135^\circ$; ბ) $tg150^\circ$; გ) $tg120^\circ$; დ) $tg180^\circ$; ე) $cos90^\circ$.
ბ) დაადგინეთ, როდის არ არის განსაზღვრული ტანგენსი და რატომ?

3.4. სინუსების თეორემა

გსმენიათ თუ არა დიდ ტრიგონომეტრიულ კვლევაზე, რომელიც მიმდინარეობდა 1802 წლიდან 1871 წლამდე, რომლის მიზანი იყო ინდოეთში სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვა.

MATHIGON



ექსპედიციას ხელმძღვანელობდა ჯორჯ ევერესტი, კვლევის შედეგად დადგინდა ყველაზე მაღალი მთის სიმაღლე, რომელსაც ექსპედიციის ხელმძღვანელის პატივსაცემად მისი სახელი ეწოდა. გაზომვითი სამუშაოების შესასრულებლად მეცნიერთა ჯგუფს დასჭირდა ცოდნა ტრიგონომეტრიიდან.
შევისწავლოთ, როგორ არის დაკავშირებული გვერდები და კუთხეები ნებისმიერ სამკუთხედში.

3.4.1 სინუსების თეორემა

განვიხილოთ ΔABC, რომლის გვერდებია a,b,c და კუთხეები α,β,γ.

დავწეროთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა სხვადასხვა გვერდის გამოყენებით. მივიღებთ, რომ $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

განვიხილოთ ტოლობა 1

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე $\frac{1}{2}$ c-ზე

$b\sin\alpha=a\sin\beta$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე ab-ზე

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$ (1)

განვიხილოთ ტოლობა 2

$\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე $\frac{1}{2}$ a-ზე

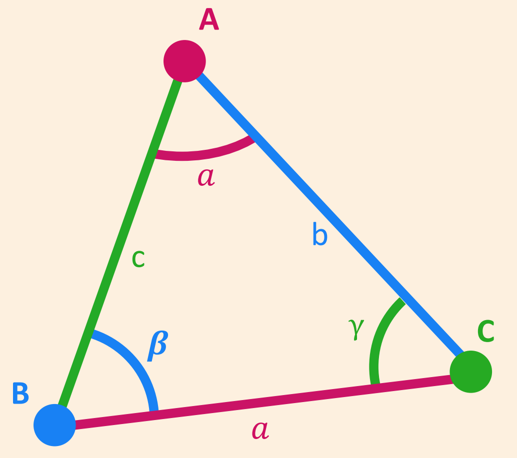
$c\sin\beta=b\sin\gamma$, გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე bc-ზე

$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$ (2)

გავაერთიანოთ ფორმულები (1) და (2), რის შედეგად მივიღებთ, რომ

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$ აღნიშნული შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, მივიღეთ სინუსების თეორემა



ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდი შეფარდებული მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან უდრის მეორე გვერდი შეფარდებული მის მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან და უდრის მესამე გვერდი შეფარდებული მის მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან, ე.ი.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

ნიმუში 1 – სინუსების თეორემის გამოყენება

მოცემულია ΔABC, $AB = 7$ სმ, $\angle A = 55°$, $\angle C = 80°$, იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდები და კუთხე.

<table>
<tr>
<td>

ვიპოვოთ $\angle B$-?

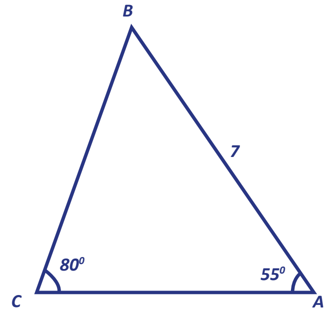
ვიცით, რომ სამკუთხედში შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია;

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C$

$\angle B = 45°$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

ვიპოვოთ გვერდი BC.

სინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ სამკუთხედში გვერდისა და მოპირდაპირე კუთხის შეფარდებები ტოლია, ე.ი.

$$\frac{BC}{\sin 55°} = \frac{AB}{\sin 80°}$$

$BC \cdot \sin 80° = AB \cdot \sin 55°$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin 55°}{\sin 80°}$$

🔗 [Desmos Calculator]-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით დავადგენთ, რომ

$\sin 55° \approx 0.82$ $\quad$ $\sin 80° \approx 0.98.$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin 55°}{\sin 80°} \approx \frac{7 \cdot 0.82}{0.98} \approx 5.86$$

</td>
<td>

ვიპოვოთ გვერდი AC.

სინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ სამკუთხედში გვერდისა და მოპირდაპირე კუთხის შეფარდებები ტოლია, ე.ი.

$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 80°}$$

$AC \cdot \sin 80° = AB \cdot \sin 45°$

$$AC = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 80°}$$

🔗 [Desmos Calculator]-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით დავადგენთ, რომ

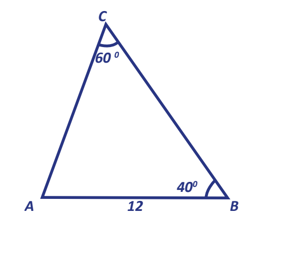
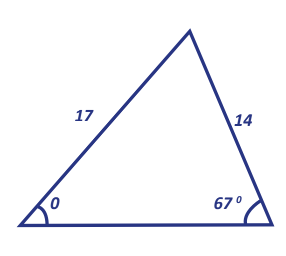
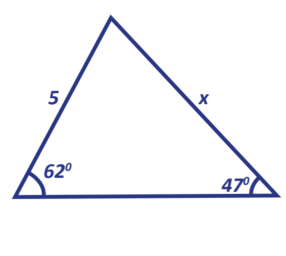
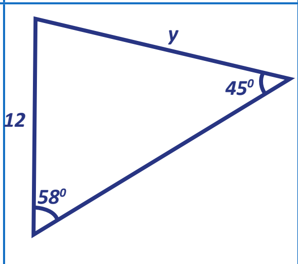
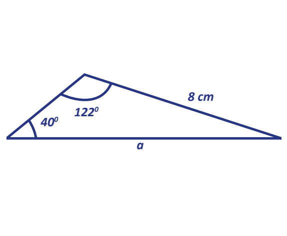
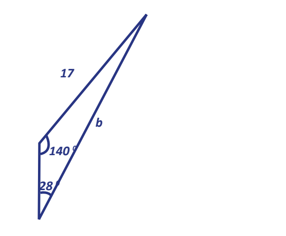
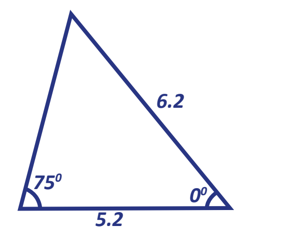
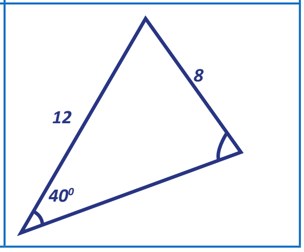
$\sin 45° \approx 0.71$ $\quad$ $\sin 80° \approx 0.98.$

$$AC = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 80°} \approx \frac{7 \cdot 0.71}{0.98} \approx 5.07$$

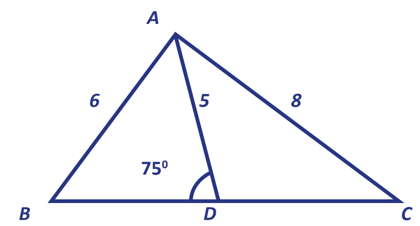
</td>
</tr>
</table>

სავარჯიშოები

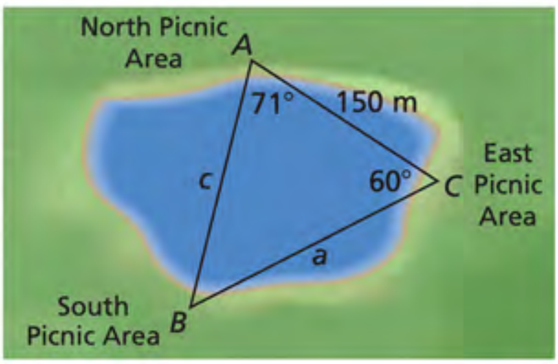
1. სინუსების თეორემის გამოყენებით იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდები და კუთხეები.

ა)	ბ)	გ)	დ)
			
ე)	ვ)	ზ)	თ)
			

2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ:

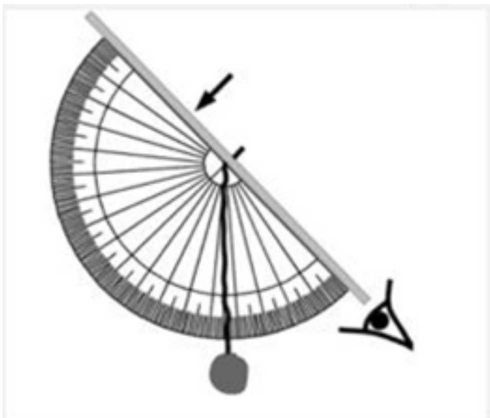
BD, DC და BC მონაკვეთების სიგრძეები	

3. ნახაზზე მონიშნულია ადგილები სადაც შეიძლება „პიკნიკის“ მოწყობა.

იპოვეთ მანძილი საპიკნიკე ლოკაციებს შორის	

სავარჯიშოები

4. თავის დასაწყიში მოცემულ დავალებასთან დაკავშირებული კვლევითი აქტივობა.

გამოიკვლიეთ, როგორ შექმნა მე-10 საუკუნეში სპარსმა მეცნიერმა ალ ბირუნმა სიმაღლის საზომი ხელსაწყო და როგორ ზომავდა იგი მაღალ შენობებს.	
დაადგინეთ, როგორ ხდება ტრანსპორტირის მეშვეობით და „თვალის ზომით“ კუთხის დადგენა	
მოიძიეთ ინფორმაცია თეოდოლიტზე, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია კუთხის გაზომვა სივრცეში	

3.5. კოსინუსების თეორემა

დასაბუთება **მათემატიკის მოყვარულთათვის:**

განვიხილოთ ΔABC

AB გვერდზე დავუშვათ CD სიმაღლე და შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $AD = x$, $CD = h$, $\angle A = \alpha$

ΔBCD-ში პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ

$a^2 = h^2 + (c - x)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2$

ΔADC-ში პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ

$h^2 + x^2 = b^2$

$h^2 = b^2 - x^2$

ჩავსვათ მიღებული შედეგი a^2-ის გამოსახულებაში, გვექნება:

$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

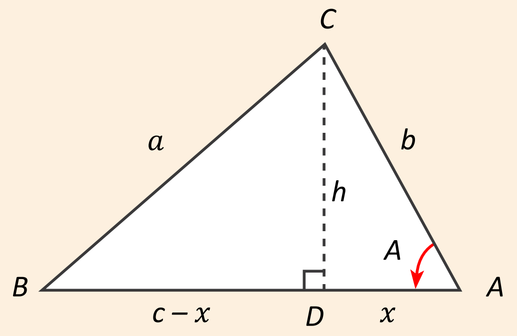
ΔACD-ში, ვიცით, რომ

$cos\angle A = \dfrac{x}{b}$

$x = bcos\angle A$

ჩავსვათ მიღებული შედეგი a^2–ის ბოლო გამოსახულებაში, გვექნება:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\angle A$



აღნიშნულ წესს, კოსინუსების თეორემა ეწოდება.

კოსინუსების თეორემა: ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული გაორკეცებული ნამრავლი ამ დანარჩენი ორი გვერდისა და მათ შორის მოთავსებული კუთხის კოსინუსის. ე.ი.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\angle A$$

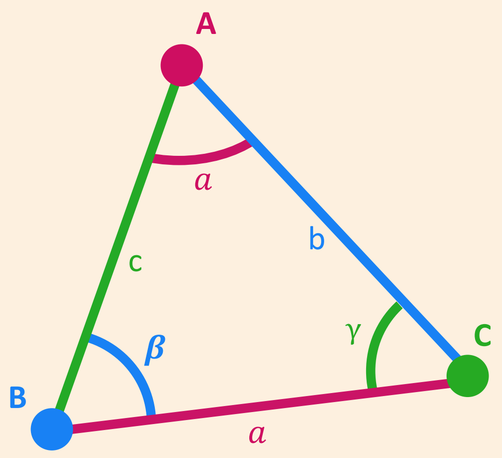
კოსინუსების თეორემა აკავშირებს სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს;

როდესაც ვიცით სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე, კოსინუსების თეორემით ვპოულობთ მესამე გვერდს.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\angle\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\angle\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\angle\gamma$



ნიმუში 1

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის საფუძველზე, იპოვეთ AB

კოსინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot cos125°$$
$$AB^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot cos125°$$
$$AB^2 = 41 - 40 \cdot cos125°$$

როგორც ვხედავთ, კუთხე ბლაგვია, შესაბამისად, მისი კოსინუსი უარყოფითია

$$cos125° = cos(180° - 55°) = -cos55°$$

🔗 Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულა-ტორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ $cos125°$ ან $cos55°$

$cos125° = -0.57$

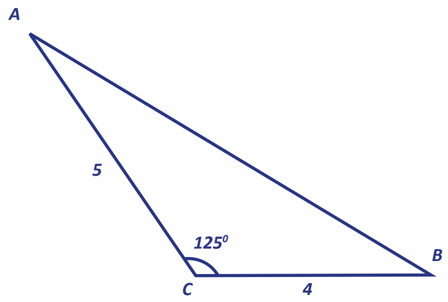
$cos55° = 0.57$

ჩავსვათ მოძებნილი მნიშვნელობა AB^2-ის გამოსახულე-ბაში და მივიღებთ:

$AB^2 = 41 - 40 \cdot (-0.57)$

$AB^2 = 41 + 22.8 = 63.8$

$AB = \sqrt{63.8}$



ნიმუში 2

როგორ ვიპოვოთ კუთხე, თუ ვიცით სამკუთხედის სამივე გვერდი?
ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ∠A-ს მნიშვნელობა.

მსჯელობა

რადგან გვინდა ვიპოვოთ ∠A, დავწეროთ კოსინუსების თეორემა მისი მოპირდაპირე გვერდის გამოყენებით.

კოსინუსების თეორემის თანახმად ვიცით, რომ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A$$
$$2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos\angle A = AB^2 + AC^2 - BC^2$$
$$\cos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

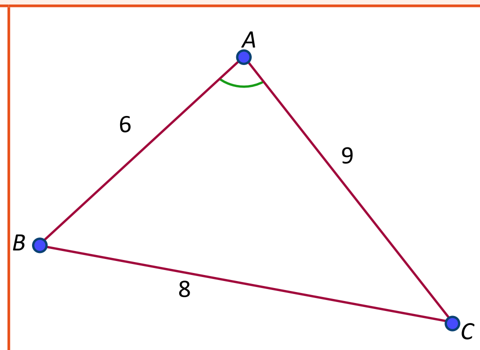
ჩავსვათ ფორმულაში გვერდების მნიშვნელობები და დავადგინოთ, რას უდრის კუთხის კოსინუსი

$$\cos\angle A = \frac{6^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{53}{108} \approx 0.49$$

ვიპოვოთ კუთხე შებრუნებული ფუნქციით

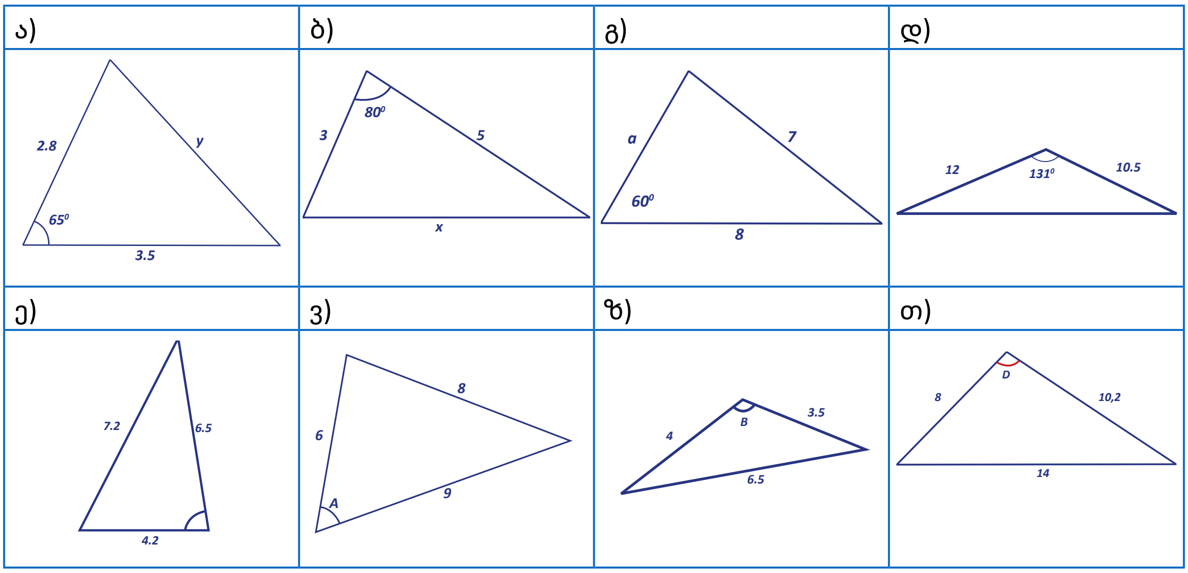
$$\cos^{-1} 0.49 \approx 61°$$

შეხსენება: $\cos^{-1} \alpha \neq \frac{1}{cos\alpha}$



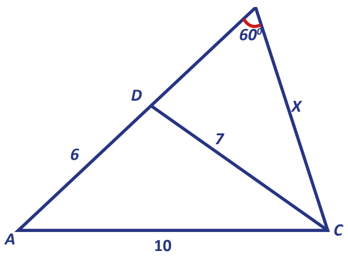
სავარჯიშოები

1. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ უცნობი გვერდი ან კუთხე:

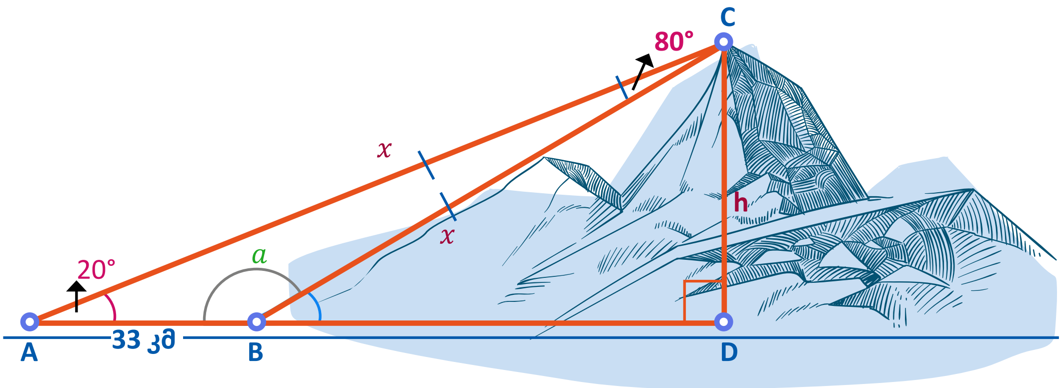


2. გამოწვევა:

ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ x



3. თავის დასაწყისში მოცემული კომპლექსური დავალებისთვის შეასრულეთ გამოთვლები; ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ x და h.

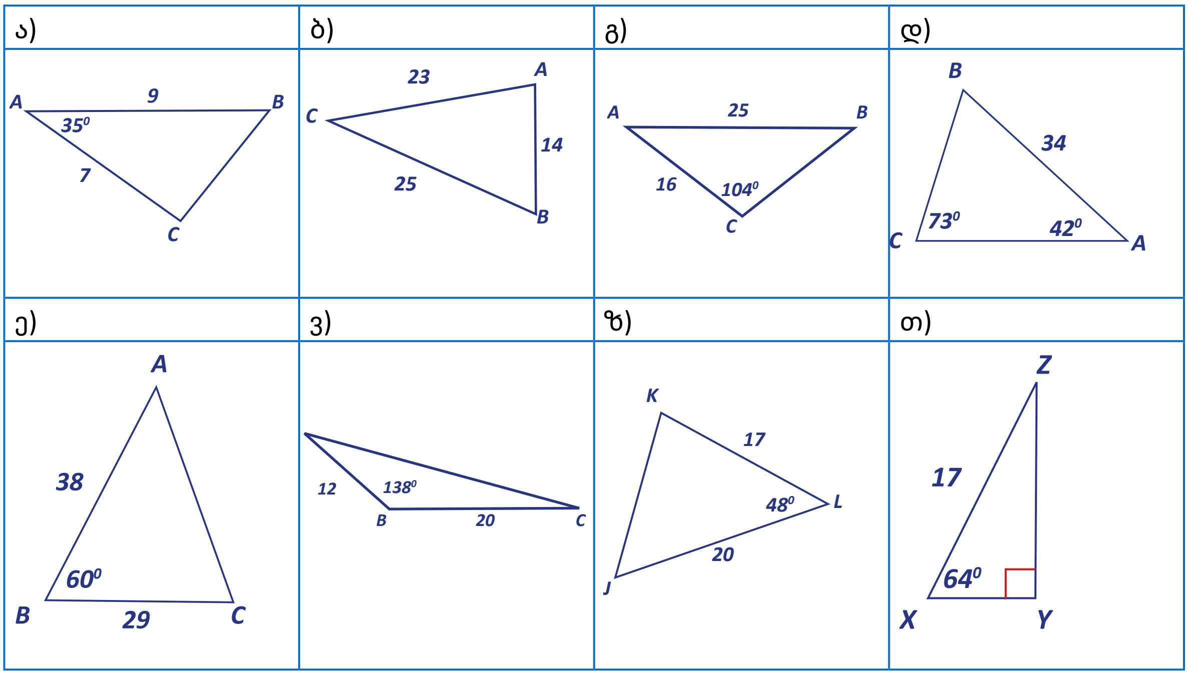


სავარჯიშოები

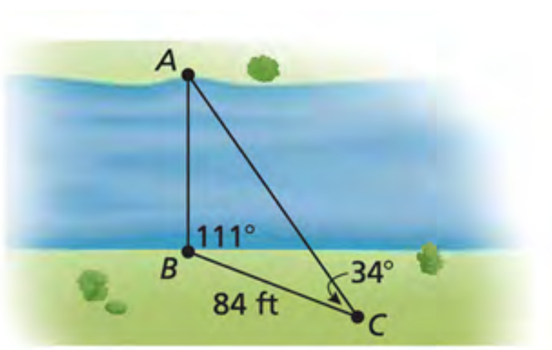
3.6. სინუსების და კოსინუსების თეორემასთან დაკავშირებული დამატებითი ამოცანები

1. ქვემოთ მოცემული ნახაზებიდან გამომდინარე, იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი გვერდი (გვერდები) და კუთხე (კუთხეები).

მსჯელობა: გამოიყენეთ სინუსების ან კოსინუსების თეორემა და ახსენით, როდის რომელი თეორემის გამოყენებაა უმჯობესი.



2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ: ა) მდინარის სიგანე; ბ) მანძილი საპიკნიკე ლოკაციებს შორის



3. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:8. იპოვეთ სამკუთხედის მცირე გვერდი, თუ საშუალო გვერდის სიგრძეა $12\sqrt{6}$ მ.

სავარჯიშოები

4. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4:5. იპოვეთ სამკუთხედის მცირე გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მცირე გვერდის სიგრძეა $6\sqrt{2}$ დმ.

5. პარალელოგრამის დიაგონალები ერთ გვერდთან ადგენენ 45^0-იან და 60^0-იან კუთხეებს. იპოვეთ პარალელოგრამის დიდი დიაგონალი, თუ მცირე დიაგონალის სიგრძეა $4\sqrt{2}$ სმ.

6. პარალელოგრამის დიაგონალებს შორის კუთხის სიდიდეა 45^0, ხოლო დიაგონალების სიგრძეებია 7 სმ და $10\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

7. პარალელოგრამის გვერდებია 8 სმ და $12\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალები, თუ ერთ-ერთი კუთხის სიდიდეა 60^0.

8. რომბის პერიმეტრია 60 სმ, ხოლო მახვილი კუთხის კოსინუსია $\frac{2}{5}$. იპოვეთ რომბის მცირე დიაგონალის სიგრძე.

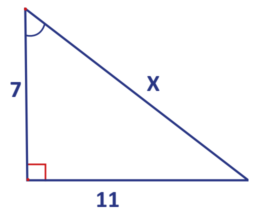
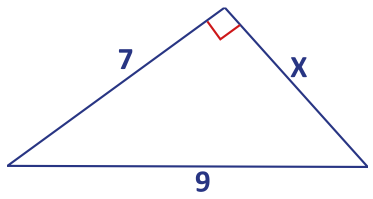
9. MKF სამკუთხედში MF = 12 სმ; MK = 9 სმ და KF = 8 სმ. სამკუთხედის MF გვერდზე აღებულია A წერტილი ისე, რომ AM = 2 სმ. იპოვეთ AK მონაკვეთის სიგრძე.

10. სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეებია 6 სმ, 5 სმ და 4 სმ. იპოვეთ მცირე გვერდისადმი გავლებული მედიანის სიგრძე.

სავარჯიშოები

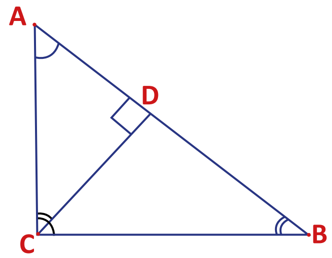
ქვიზი განმავითარებელი შეფასებისთვის

1. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ უცნობი გვერდის სიგრძე.

ა)	ბ)
	

2. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია წერტილები: A(–2; 5); B(1;0) და C(3;–7). იპოვეთ *ABC* სამკუთხედის პერიმეტრი.

3. მოცემულია მართკუთხა ABC სამკუთხედი, ACB = 90°. CD დაშვებული სიმაღლეა. იპოვეთ *BC* გვერდის სიგრძე, თუ *AD* = 4 სმ და CD = 6 სმ.



4. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 60°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძეა $5\sqrt{3}$ სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

5. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ხოლო ფუძის სიგრძეა 20 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფერდი.

6. *ABC* სამკუთხედში *AC* = 12 სმ, ∠*A* = 60° და ∠*B* = 45°. იპოვეთ *BC* გვერდის სიგრძე.

7. *MNF* სამკუთხედში *MN* = 12 სმ, *MF* = 10 სმ და ∠*M*=30°. იპოვეთ *NF* გვერდის სიგრძე.