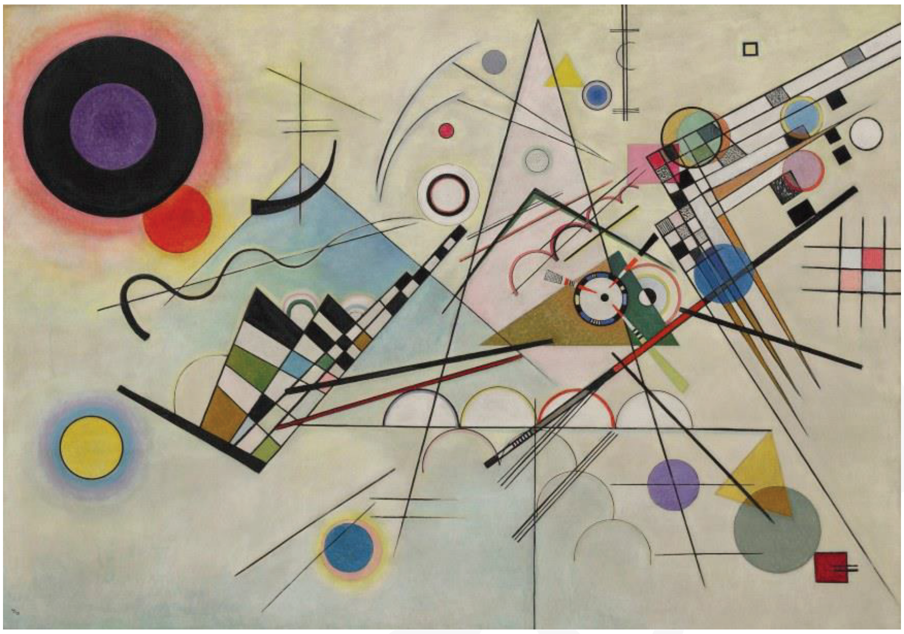
VII კლასი

მათემატიკა

მოსწავლის წიგნი



ნახ. 1 ვასილ კანდინსკი ,,კომპოზიცია"

თავი 4 — გეომეტრია, კუთხეები

4.1 ლოგიკური მსჯელობა გეომეტრიაში
4.2 გეომეტრიის ძირითადი ცნებები
4.3 კუთხეების კლასიფიკაცია
4.4 წრფეების ურთიერთმდებარეობა, ვერტიკალური კუთხეები
4.5 პარალელური წრფეებით მიღებული კუთხეები
4.6 კუთხეები სამკუთხედში, სამკუთხედების კლასიფიკაცია
4.7 კუთხეები სხვადასხვა სამკუთხედებში
4.8 მრავალკთხედები, კუთხეები მრავალკუთხედებში
MathLab – კვლევა, პროექტი
4.9 წრე, წრის ნაწილები, ცენტრალური კუთხე
ტესტისთვის მომზადება

მიზანი და შედეგი

- ლოგიკური მსჯელობა, აქსიომა, პოსტულატი, თეორემა, დამტკიცება
- გეომეტრიის ძირითადი ცნებები
- კუთხეების კლასიფიკაცია
- კუთხეებთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა

კითხვები ცოდნის გამოსავლენად

- რა არის კუთხის საზომი ერთეული?
- როგორი კუთხეები ვიცით?
- სად გვხვდება გეომეტრიული ფიგურები ყოველდღიურ ცხოვრებაში?

4

4.1 ლოგიკური მსჯელობა გეომეტრიაში

გეომეტრია მოიცავს ცნებებს, განრამტებებს, აქსიომებს, თეორემებს. დავიწყოთ საბაზისო სიტყვებით.

გეომეტრიაში **განსაზღვრების** მეშვეობით განიმარტება ობიექტები.

მათემატიკაში **აქსიომა** იგივე **პოსტულატი** არის დებულება, რომელიც დამტკიცების გარეშე მიიჩნევა ჭეშმარიტად. მიუხედავად ამისა, აქსიომები შეიძლება იყოს ლოგიკური და პირდაპირ მოცემული. ლოგიკური აქსიომები ჩამოყალიბებულია ლოგიკაზე დაფუძნებით და ხშირად მოცემული სიმბოლოების მეშვეობით.

ძველმა ბერძენმა მათემატიკოსმა ევკლიდემ, რომელსაც გეომეტრიის მამად მიიჩნევენ, ჩამოაყალიბა რამდენიმე აქსიომა. აქედან ერთ-ერთია შემდეგი:

აქსიომა: ***თუ ორი სიდიდე ცალ-ცალკე მესამე სიდიდის ტოლია, მაშინ ისინიც ტოლია.***

ეს აქსიომა შეიძლება ეხებოდეს როგორც რიცხვებს, ასევე გეომეტრიულ ფიგურებს და ის ლოგიკური ხასიათისაა.

მაგალითად: ვიცით, რომ $1+4 = 5$ და $2+3 = 5$ ჩვენთვის ცხადია, რომ $2+3=1+4$

არითმეტიკიდან ვიცით, მარტივი აქსიომა, რომელსაც ლოგიკური დასაბუთება არ სჭირდება, მაგალითად: $a+b = b+a$

სურ. 2 ევკლიდე

(ძვ.წ 287 — ძვ.წ 212)

ერთი შეხედვით მარტივი ცნებები და აქსიომები საფუძვლად უდევს ბევრ სხვა მათემატიკურ პრინციპებს.

თეორემა

თეორემა არის დებულება, რომელიც საჭიროებს დამტკიცებას, რათა მივიჩნიოთ ჭეშმარიტად.

იმისათვის, რომ თეორემა მივიჩნიოთ ჭეშმარიტად უნდა დამტკიცდეს აქსიომებითა და სხვა თეორემების საშუალებით.

საინტერესოა თუ როგორ მტკიცდება თეორემა. რამდენი მტკიცე ფაქტია საჭირო იმისათვის, რომ მართებულად მივიჩნიოთ? განვიხილოთ პროცესი, თუ როგორ ხდება თეორემის დამტკიცება.

დამტკიცება

ერთ-ერთი რასაც მათემატიკა ეფუძნება არის დედუქციური მსჯელობა. რაც ნიშნავს, რომ ახალი დებულება — თეორია დაფუძნებულია აქსიომაზე, უკვე ჭეშმარიტად მიჩნეულ დებულებაზე ან წინა დამტკიცებულ თეორემებზე.

დამტკიცება როგორც პროცესი, არსებული ცოდნისა და არგუმენტების თანმიმდევრულად და ლოგიკურად წარმოდგენაა ისე, რომ ადამიანი დაარწმუნოს არსებული თეორემის ჭეშმარიტებაში. დამტკიცების პროცესს **ლოგიკური მსჯელობა** ეწოდება.

როგორ გავიგოთ დებულება ჭეშმარიტია თუ მცდარი?

ლოგიკური მსჯელობის, დასაბუთების და დამტკიცებების დროს ვიყენებთ, პირობის შემცველ წინადადებებს, რომელიც შედგება ორი ნაწილისაგან.

I. ჰიპოთეზა	ჰიპოთეზა იწყება **„თუ წინადადებით"**
II. დასკვნა	დასკვნა გრძელდება **„მაშინ წინადადებით"**, ან იგულისხმება კავშირი „მაშინ".

წინა თეორემებისა და აქსიომების გამოყენებით თუ შევძლებთ დასკვნის დასაბუთებას, ვიტყვით, რომ დაშვება სწორია. დასაბუთებისას სასურველია ჰიპოთეზისა და დასკვნის ორგანიზებული ჩანაწერის წარმოება, ოგანიზებული ჩანაწერის წარმოება ასევე აუცილებელია თეორემების დამტკიცების დროს.

თეორემა	**დამტკიცება**
პირობა მოცემულობა ნახაზი	ლოგიკური მსჯელობა დამტკიცების პროცესი

“თუ-მაშინ“ წესით დაკავშირებული წინადადებები ხშირად გვხვდება ლიტერატურასა თუ ყოველდღიურ საუბრებში. განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პროგრამირებაში, ალგორითმის კომპიუტერისათვის სწორად ჩაწერის დროს.

„თუ გსურს ღირსეულს მიაყენო ჩრდილი,
მაშინ უღირსის ქებას უნდა მიჰყო ხელი.“

კონსტანტინე გამსახურდია

„თუ მუდამ სიმართლეს ამბობთ, მაშინ
აღარ მოგიწევთ რაიმეს დამახსოვრება.“

მარკ ტვენი

„თუ სამართლიანი ხარ და კაცთმოყვარე ხარ, მაშინ ყველაფერი ხარ, სავსე კაცი ხარ, იმიტომ რომ ილვაწებ და იმოქმედებ შეძლებისამებრ, რადგანაც უქმად ყოფნის ნებას სამართლიანობის გრძნობა არ მოგცემს ამ წუთისოფელში.“ ილია ჭავჭავაძე

ნიმუში 1: ჩავწეროთ წინადადება, “ თუ — მაშინ” წესით.

ა). პარიზში ხართ, საფრანგეთში.	ბ). ყველა ჩიტს აქვს ბუმბული.
თუ პარიზში ხარ, მაშინ საფრანგეთში ხარ.	თუ ჩიტია, მაშინ მას ბუმბული აქვს.

სავარჯიშოები

1. ჩაწერეთ შემდეგი წინადადებები, “ თუ — მაშინ “ სახით:
ა) ბენდში ნიკა გიტარაზე უკრავს, ნიკა მუსიკოსია.
ბ) ჭავჭავაძის გამზირზე ხარ, თბილისში.
გ) ყველა თევზი ცურავს.
დ) ყველა ძაღლი ყეფს.
ე) დღეს იტალიაში ხარ, რომში.
ვ) დღეს ოთხშაბათია, ხვალ ხუთშაბათი
ზ). ეხლა ივნისის თვეა, შემდეგი თვე იქნება ივლისი.
თ). გიორგი ფეხბურთელია, სპორცმენი.
ი). ახალ წელს ვზეიმობთ საქართველოში, იანვარია.

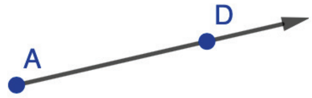
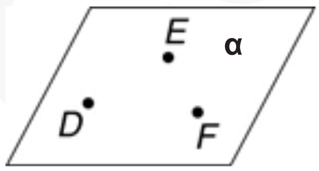
4.2 გეომეტრიის ძირითადი ცნებები

წერტილი, მონაკვეთი, წრფე, სიბრტყე გეომეტრიის საწყისი და მნიშვნელოვანი ცნებებია, რომელთა გამოყენებით შემდეგში სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურები აიგება.

თანამედროვე მხატვრობაში, ხშირად იყენებენ სხვადასხვა გეომეტრიულ ფიგურებს. მაგალითად, მხატვარ აუგუსტ ჰერბინს აქვს შექმნილი მთელი რიგი სერია ნახატებისა, რომელთაც უწოდა „გეომეტრიული აბსტრაქციები“, ნახატების შექმნისას მან გამოიყენა მონაკვეთი, სიბრტყე და სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურები.

სურ 2: აუგუსტს ჰერბინი

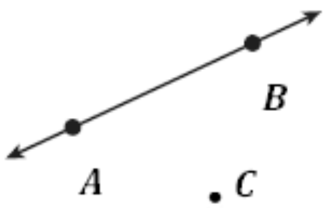
წერტილს არ გააჩნია განზომილებები.	A A წერტილი	წერტილი A აღინიშნება დიდი ლათინური ასობგერით.
წრფე გააჩნია ერთი განზომილება. უსასრულოდ გრძელდება ორივე მხარეს. ხანდახან წრფის ბოლობში მოცემულია ისრები, რაც იმის მანიშნებელია, რომ წრფე გრძელდება ორივე მიმართულებით უსასრულოდ.	a წრფე a A B AB წრფე	a წრფე ან AB წრფე აღინიშნება პატარა ლათინური ასოებით ან წრფეზე მონიშ-ნული ორი დიდი წერტილით.
მონაკვეთი — წრფის ნაწილი, რომელსაც აქვს დასაწყისი და დასასრული.	A B AB მონაკვეთი	AB მონაკვეთი. ჩაიწერება საწყისი და ბოლო წერტილებით.

სხივი — წრფის ნაწილი, რომელსაც აქვს საწყისი წერტილი და არ აქვს დასასრული. გრძელდება ერთი მიმართულებით.	 AD სხივი	AD სხივი. ჩაიწერება ორი დიდი ლათინური ასოთი. პირველად იწერება საწყისი წერტილი.
ურთიერთდამატებითი სხივები ეწოდებათ სხივებს, თუ მათ საერთო სათავე აქვთ და მდებარეობენ ერთ წრფეზე.	 AE და AD ურთიერთდამატებითი სხივებია	AE და AD სხივებს აქვთ საერთო სათავე და მდებარეობენ ერთ წრფეზე.
სიბრტყე — ბრტყელი ზედაპირი, რომელსაც არ აქვს სისქე, აქვს ორი განზომილება და გრძელდება უსასრულოდ.	 DEF სიბრტყე ან **α** სიბრტყე	DEF სიბრტყე ან a სიბრტყე. სიბრტყე აღინიშნება მასზე მონიშნული ნებისმიერი 3 წერტილით, რომლებიც არ მდებარეობს ერთ წრფეზე ან ერთი პატარა ბერძნული ასობგერით.

აქსიომები

აქსიომა 1: თითოეული წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც მდებარეობს წრფეზე და, არსებობს წერტილები, რომლებიც არ მდებარეობს წრფეზე.

$A \in a$; $B \in a$; $C \notin a$; $D \notin a$

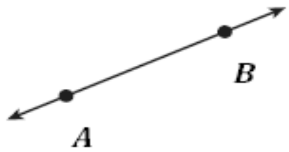


$\in$ - სიმბოლო ნიშნავს **„ეკუთვნის“**

$\notin$ - სიმბოლო ნიშნავს **„არ ეკუთვნის“**

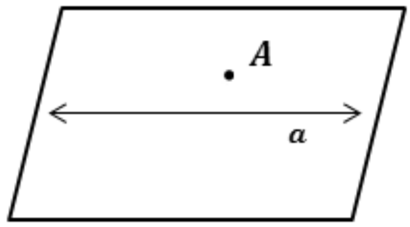
აქსიომა 2: ორ წერტილზე გადის ერთადერთი წრფე.

a – წრფე ან AB- წრფე

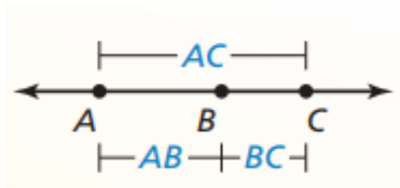


აქსიომა 3: წრფე სიბრტყეს ორ ნახევარსიბრტყედ ჰყოფს.

წრფეს ეწოდება ნახევარსიბრტყის საზღვარი. ნახევარსიბრტყე აღინიშნება შემდეგნაირად (a ; A) .



აქსიომა 4: მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთის სიგრძეთა ჯამს, რომლითაც იგი იყოფა ნებისმიერი წერტილით.



ნიმუში 1: მონაკვეთი, სხივი

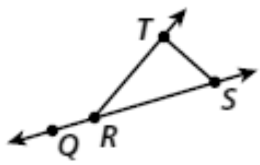
აღწერეთ, რამდენ მონაკვეთს და წრფეს ხედავთ ნახაზზე:

ა) მონაკვეთები:

RT , TS , RS, RQ

ბ) წრფე :

QS წრფე.



ნიმუში 2:

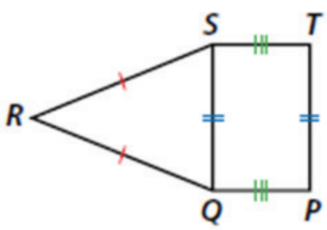
მონიშნეთ ნახაზზე ტოლი მონაკვეთები:

RQ = RS

QS = PT

ST = QP

ტოლი მონაკვეთების მოსანიშნად იყენებენ პატარა „ჯოხებს”. ერთი ჯოხით აღინიშნება ერთი სიგრძის მონაკვეთები, ორი ტოლი ჯოხით სხვა ტოლი მონაკვეთები და ა.შ.



ნიმუში 3:

C წერტილით BD მონაკვეთი იყოფა ორ ნაწილად. იპოვეთ x, BC , CD და BD

ჩვენ ვიცით, რომ BC+CD=BD

შევადგინოთ განტოლება აქსიომა 4-ის თანახმად:

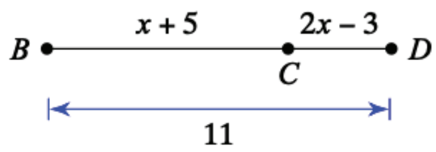
$x + 5 + 2x - 3 = 11$

$3x + 2 = 11$

$3x = 9$

$x = 3$

$BC = 8$; $CD = 2 \cdot 3 - 3 = 3$; $BD = 11$



მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. გადახაზეთ ნახაზი რვეულში და ჩამოწერეთ, რამდენ მონაკვეთს, წერტილს, სხივს, წრფეს, ნახევარსიბრტყეს და სიბრტყეს ხედავთ ნახაზზე:

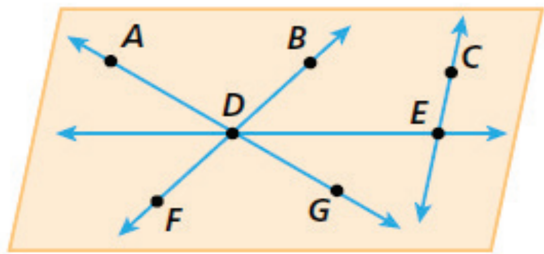
ა) მონაკვეთები: ___________

ბ) სხივები : ________________

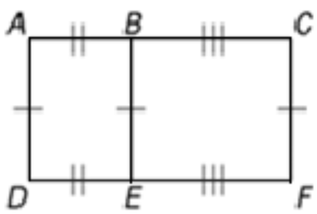
გ) წრფე: ____________________

დ) წერტილები: ____________

ე) ჩაწერეთ სიბრტყე:______



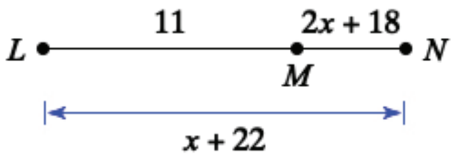
2. მოცემული ნახაზი გადახაზეთ რვეულში და ამოწერეთ ტოლი მონაკვეთები.



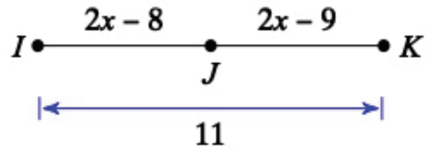
სავარჯიშოები

3. იპოვეთ x და თითეოული მონაკვეთის სრული სიგრძე.

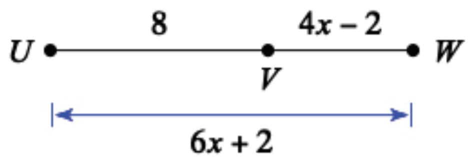
ა)



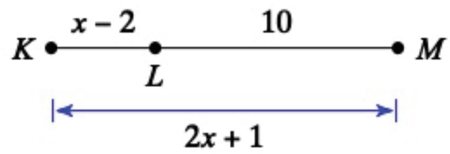
დ)



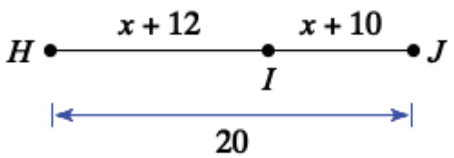
ბ)



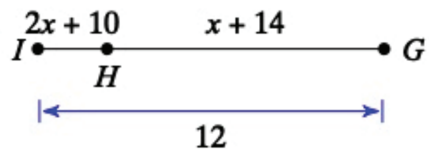
ე)



გ)

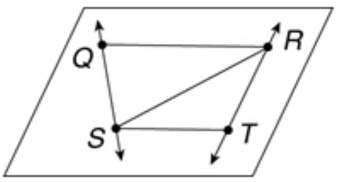


ვ)

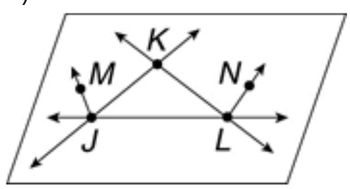


4. მოცემული ნახაზის მიხედვით რვეულში ჩამოწერეთ რა ფიგურებს ხედავთ ნახაზზე:

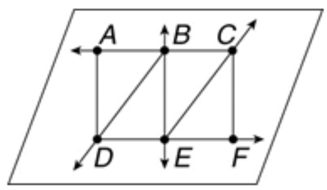
ა)



ბ)

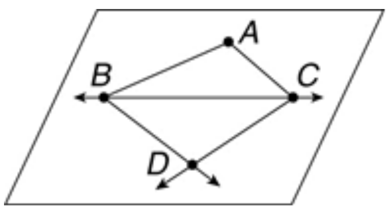


გ)



5. როგორ ჩაიწერება ნახაზზე მოცემული:

ა) სიბრტყე
ბ) ნახევარსიბრტყეები
გ)რომელი წერტილი რომელ ნახევარსიბრტყეს ეკუთვნის?



6. **კრიტიკული აზროვნება:**

შეიძლება თუ არა ორ სხვადასხვა მონაკვეთს ჰქონდეს:

ა) ერთი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ პასუხი ნახაზით.

ბ) ორი საერთო წერტილი? დაასაბუთეთ ნახაზით .

7. **რთული ამოცანა:** დაადგინეთ, მდებარეობს თუ არა A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე, თუ AB=8; BC=4; AC=6. დაასაბუთეთ პასუხი.

მათემატიკა, მხატვრობა, მოდა

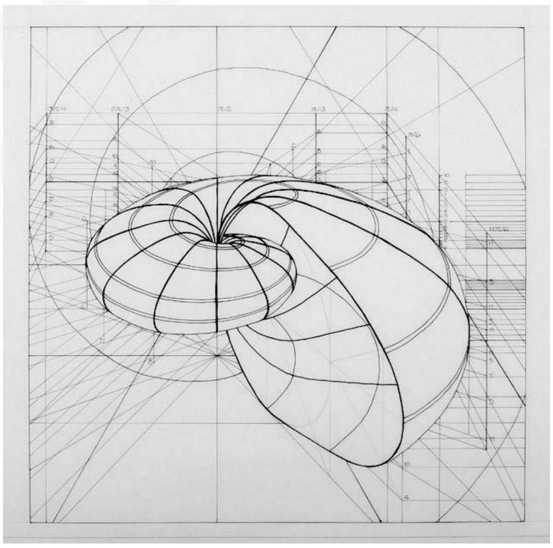
მხატვარი პიტ მონდრიანი თავის ნახატებს ქმნიდა გეომეტრიული ფიგურებით, რომლებსაც კომპოზიციებს უწოდებდა.

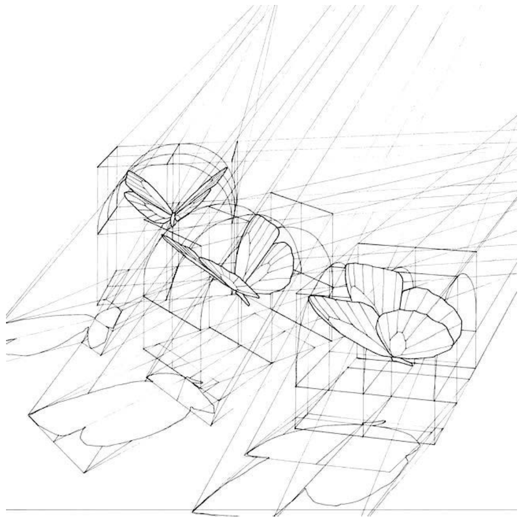
1960-იან წლებში, ცნობილმა დიზაინერმა ივ სენ ლორენმა YSL გამოიყენა მონდრიანის ნახატები და შექმნა ისტორიული კაბების კოლექცია, რომელმაც მოდის ინდუსტრიაში ახალბედა დიზაინერს სახელი გაუთქვა და დღემდე მისი შექმნილი კოლექცია ერთ-ერთ ნოვატურ და წარმატებულ კოლექციად ითვლება.

მათ ვისაც აინტერესებს მოდა, მხატვრობა ან უბრალოდ ექნება სურვილი, თავისუფალ დროს კარგი იქნება თუ შექმნით რამე ნახატს გეომეტრიული ფიგურებით და ეცდებით გადაიტანოთ სამოსზე

ივ სენ ლორენის კაბა

მხატვრობა, მათემატიკა, ოქროს კვეთა — თანამედროვე მხატვარმა რაფაელ არანუჯომ, ოქროს კვეთის მეშვეობით შექმნა ნახატების კრებული სახელწოდებით "ოქროს კვეთა — გასაფერადებელი წიგნი". თითოეული ნახატის შექმნისას დაცულია ოქროს კვეთის პროპორციები და ხელოვნების მოყვარულებს შესთავაზა თავად გაეფერადებინათ ნახატი. გააფერადეთ ქვემოთ მოცემული ნახატები სურვილისამებრ.





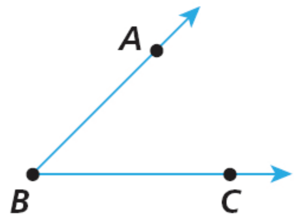
4.3 კუთხეების კლასიფიკაცია

კუბიზმი მიმდინრეობაა ხელოვნებაში, რომელიც მე-20 საუკუნის დასაწყისში დაიწყო. კუბიზმის ყველაზე ცნობილი მიმდევარი იყო პიკასო. კუსბიტურ მიმდინარეობაში ობიექტი დაშლილია, გაანალიზებული და შემდეგ აწყობილი აბსტრაქტულ ფორმაში, ხელოვა¬ნი ობიექტს აღწერს არა ერთი, არამედ მრავალი სხვა კუთხით. ამისათვის ის იყენებს მახვილ, ბლაგვ, მართ კუთხეებს.
კუთხეების გააზრება და ცოდნა ძალიან მნიშვნელოვანია სხვადასხვა დარგებში.

სურ. 3. პიკასო, „მოდელიანი"

კუთხე შედგება ორი საერთო სათავის მქონე სხივისაგან და მათ შორის მდებარე სიბრტყის ნაწილისაგან.

- ✓ საერთო სათავეს კუთხის წვერო ეწოდება, ხოლო სხივებს — კუთის გვერდები.
- ✓ კუთხე იზომება გრადუსებში - სიმბოლოთი (°).
- ✓ კუთხე ჩაიწერება წვეროს მეშვეობით ∠A ასევე სხივებზე მდებარე წერტილებით: ∠EAC ან ∠CAE

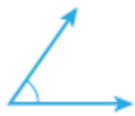


აქსიომა 5 : ყოველი სხივიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები ერთადერთი კუთხე.

კუთხეების კლასიფიკაცია

მართი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა 90° - ია.

მახვილი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც 0°-ზე მეტი და 90°- ზე ნაკლებია.



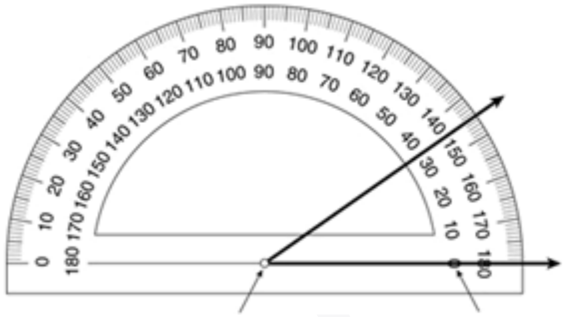
ბლაგვი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც 90°-ზე მეტი და 180°- ზე ნაკლებია.

გაშლილი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც 180°- ია.

ტრანსპორტირი კუთხის გასაზომი ხელსაწყოა.

როგორ გავზომოთ კუთხე?

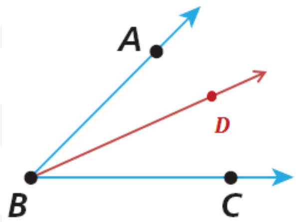
- ✓ ტრანსპორტირის სათავეს ვამთხვევთ კუთხის წვეროს.
- ✓ კუთხის ერთი გვერდი უნდა გავასწოროთ ტრანსპორტირის ნულოვან მონაკვეთზე.
- ✓ კუთხის მეორე გვერდი გვიჩვენებს კუთხის გრადუსულ ზომას.



ბისექტრისა სხივი, რომელიც კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ჰყოფს, ბისექტრისა ეწოდება.

BD – ბისექტრისაა

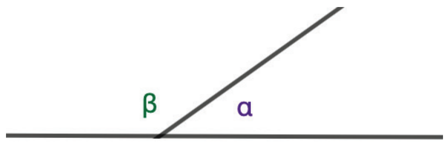
$\angle ABD = \angle DBC$



მოსაზღვრე კუთხეები

თუ ორ კუთხეს ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო ორი გვერდი დამატებითი სხივებია, მაშინ მათ მოსაზღვრე კუთხეები ეწოდებათ.

კუთხეები ასევე მოიცემა ბერძნული ასობგერებით α,β,γ

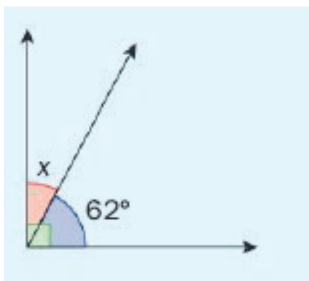


ნიმუში - ვიპოვოთ კუთხის გრადუსული ზომა

მოცემულია მართი კუთხე, რომელიც სხივით გაყოფილია ორ კუთხედ. ვიცით, რომ ერთ-ერთი 62 ° -ია, ვიპოვოთ მეორე.

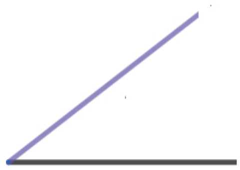
$$x + 62^\circ = 90^\circ$$

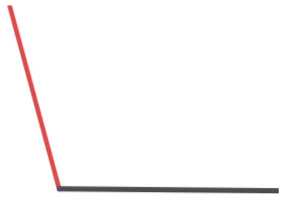
$$x = 28^\circ$$



მოსამზადებელი პრაქტიკა

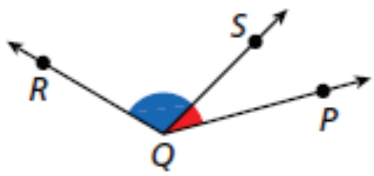
1. ტრანსპორტის მეშვეობით გაზომეთ მოცემული კუთხეები.
აღწერეთ კუთხე: მახვილია, ბლაგვი, მართი თუ გაშლილი.
ა) ბ) გ)





2. დაწერეთ, რომელ კუთხეებს ხედავთ ნახაზზე.

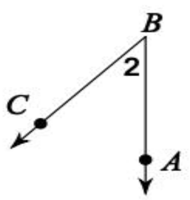
თუ წითელი ფერით აღნიშნული კუთხე 25° -ია, ხოლო ლურჯი ფერით აღნიშნული კუთხე უდრი 35° , რისი ტოლი იქნება დიდი კუთხე?



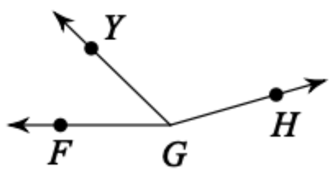
სავარჯიშოები

3. ჩაწერეთ კუთხეები სხვადასხვა გზით:

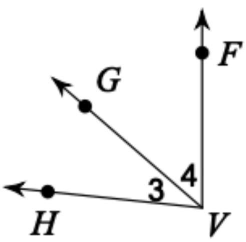
ა)



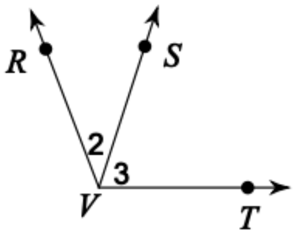
ბ)



გ)

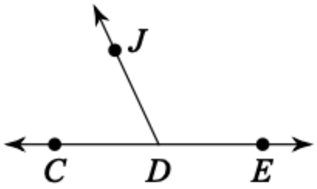


დ)

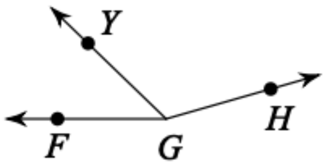


4. მოცემული ინფორმაციის საშუალებით იპოვეთ უცნობი კუთხე:

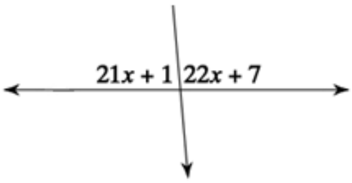
ა) თუ $\angle EDJ=125°$, იპოვეთ $\angle CDJ$



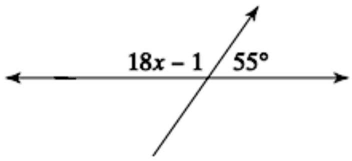
ბ) თუ $\angle EDJ=165°$ და $\angle YJH=112°$ იპოვეთ $\angle FGY$



გ) იპოვეთ x



დ) იპოვეთ x



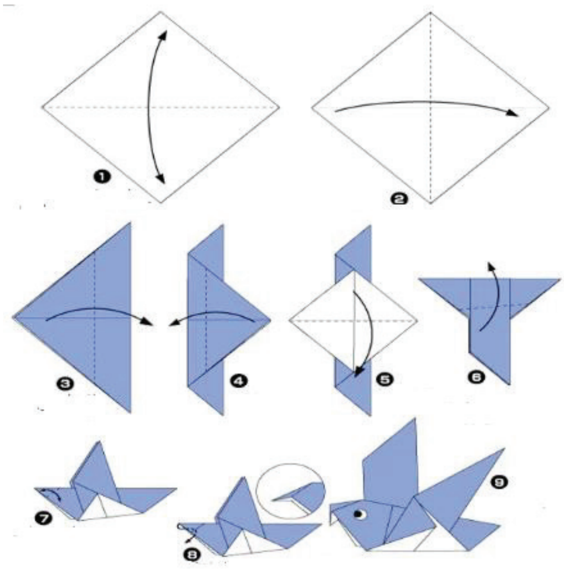
5. კუთხის ბისექტრისა კუთხის გვერდთან ადგეს 40°-იან კუთხეს, იპოვეთ ეს კუთხე.

6. მოსაზღვრე კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:11, იპოვეთ ეს კუთხეები.

7. $\angle ABC=145°$ B წვეროდან გავლებული BD სხივი კუთხეს ჰყოფს ორ ნაწილად, რომლებიც ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ კუთხეები.

ორიგამი ქაღალდისგან სხვადასხვა ფიგურების კეთების ტრადიციული იაპონური ხელოვნებაა. მარჯვნივ მოცემულია დიაგრამა – როგორ უნდა აიგოს მტრედი. ეცადეთ, ფურცლისაგან გააკეთოთ მტრედი და დააკვირდით, რომელი

ზე
ქთ



ინტერნეტის მეშვეობით შედით საიტზე **www.make-origami.com** და ააგეთ სხვადასხვა სხეულები.

4.4 წრფეების ურთიერთმდებარეობა ვერტიკალური კუთხეები

ქალაქში სიარულისას ჩვენ ვხედავთ, რომ ქუჩები დაგეგმარებულია სხვადასხვა მიმართულებით. ზოგი ქუჩა კვეთს ერთმანეთს, ზოგი – არა, და ვამბობთ, რომ ისინი პარალელურია.

სურ. 4

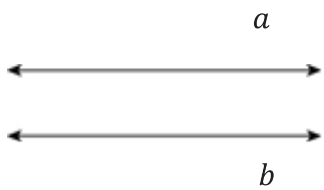
წრფეები კლასიფიცირდება ერთმანეთის მიმართ განლაგებით.

თუ ორ წრფეს აქვს საერთო წერტილი, ვამბობთ, რომ **წრფეები იკვეთება**, საერთო წერტილს კი **გადაკვეთის წერტილი** ეწოდება.

პარალელური წრფეები

როდესაც ორი წრფე მდებარეობს ერთ სიბრტყეზე და არ კვეთს ერთმანეთს, მათ პარალელური წრფეები ეწოდება.
პარალელურობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$a \parallel b$$

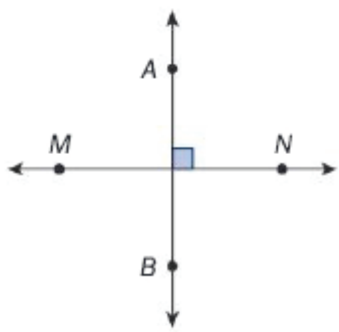


მართობული წრფეები

როდესაც ორი წრფე გადაიკვეთება და გადაკვეთით შეადგენენ მართ კუთხეს, მართობული (მეორენაირად – პერპენდიკულარული) წრფეები ეწოდება.

მართობულობა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$AB \perp MN$$

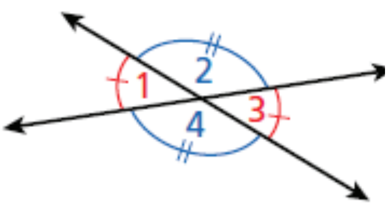


ვერტიკალური კუთხეები

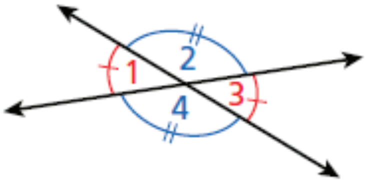
ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული 4 კუთხიდან, წყვილად მოპირდაპირეებს, ვერტიკალური კუთხეები ეწოდება.

$\angle 1$ და $\angle 3$ - ვერტიკალური კუთხეებია

$\angle 2$ და $\angle 4$ ვერტიკალური კუთხეებია



თეორემა 4.1 : ვერტიკალური კუთხეები ტოლია



∠1 = ∠3
∠2 = ∠4

დამტკიცება:

რადგან ∠1 და ∠2 მოსაზღვრე კუთხეებია
∠1 +∠2=180
ასევე ვიცით, რომ ∠1 და ∠4 მოსაზღვრე კუთხეებია.
∠1 +∠4=180

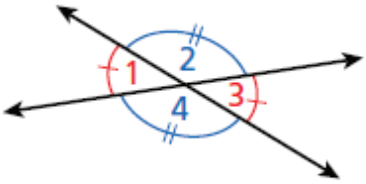
ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ∠2=∠4
რ.დ.გ.
(რის დამტკიცებაც გვინდოდა)

განმარტება:

ორი წრფის გადაკვეთისას მიიღება ოთხი კუთხე, რომლთა ჯამი 360°-ია.

∠1+ ∠2=180°
∠3+ ∠4=180°

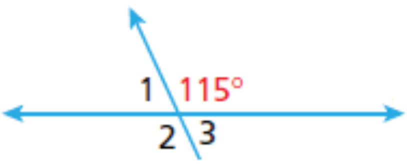
მოსაზღვრე კუთხეები



∠1+ ∠2+∠3+∠4=360°
360° -ის ტოლ კუთხეს წრიული კუთხე ეწოდება.

ნიმუში 1:

მოსაზღვრე კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე 115° -ია იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები:



∠1+ 115°=180°
∠1 =180°-115°
∠1=65°

∠1= ∠3=65° ვერტიკალური კუთხეები ტოლია
∠2= ∠4=115°

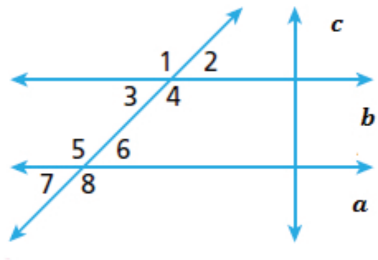
დაიმახსოვრეთ:

ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

მოსამზადებელი პრაქტიკა

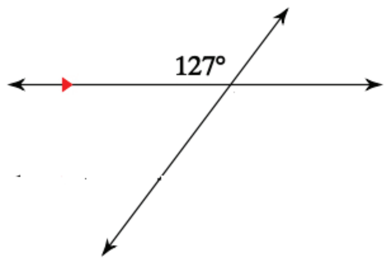
1. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ:
ა) წრფეები, რომლებიც შეიძლება იყოს პარალელური.
ბ) წრფეები, რომლებიც შეიძლება იყოს მართობული.
გ) ვერტიკალური კუთხეები.

ა).

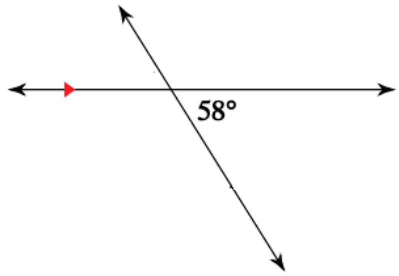


2. მოცემული კუთხის მიხედვით, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები:

ა)



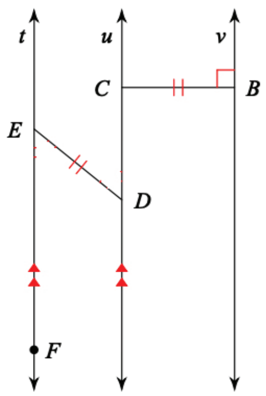
ბ)



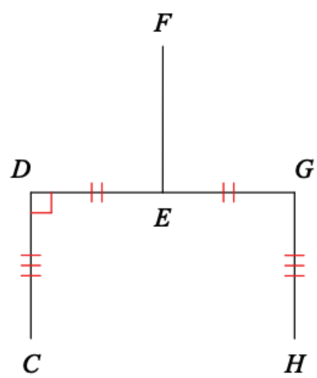
სავარჯიშოები

3. ნახაზის მიხედვით, ჩაწერეთ:
- ✓ პარალელურ წრფეთა წყვილები
- ✓ მართობულ წრფეთა წყვილები
- ✓ ტოლი მონაკვეთები

ა)

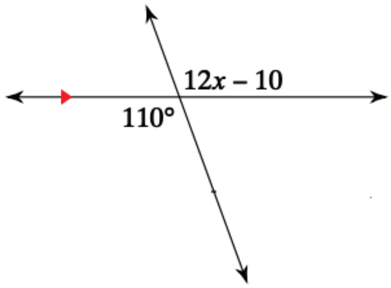


ბ)

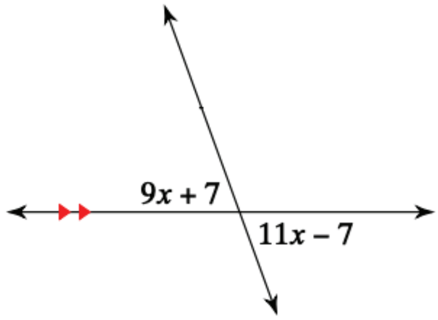


4. კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x , ასევე თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა.

ა)



ბ)



5. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{5}$ -ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.

6. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი $70°$ -ია. იპოვეთ ეს კუთხეები.

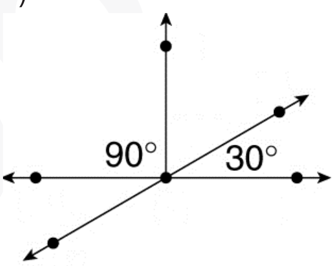
7. სტრატეგიები

შეარჩიეთ სათანადო სტრატეგიები, შეაერთეთ ყოველი 4 წერტილი ნებისმიერი მიმართულებით.
სულ რამდენი წრფე გაივლება?

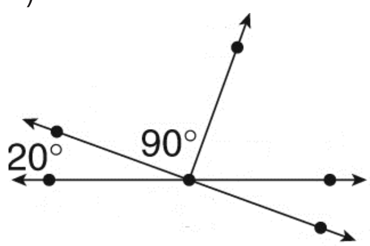
8. რთული ამოცანა

დააწერეთ წერტილებს ასოები, ჩაწერეთ მიღებული კუთხეები და იპოვეთ თითოეულის გრადუსული ზომა.

ა)

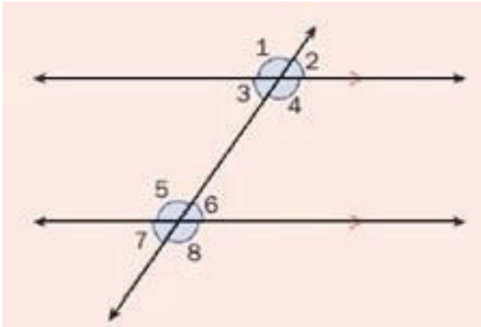


ბ)



4.5 პარალელური წრფეებით და მკვეთით მიღებული კუთხეები

ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიიღება რვა კუთხე, რომლებიც კიდევ წყვილ-წყვილად კლასიფიცირდება.



როგორც ვიცით:

$\angle 1 = \angle 4$; $\angle 2 = \angle 3$
$\angle 5 = \angle 8$; $\angle 6 = \angle 7$

ვერტიკალური კუთხეები

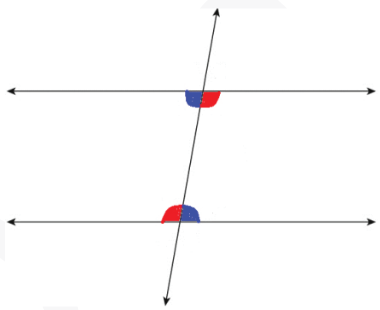
$\angle 3$ და $\angle 6$
$\angle 4$ და $\angle 5$

შიგაჯვარედინი კუთხეები

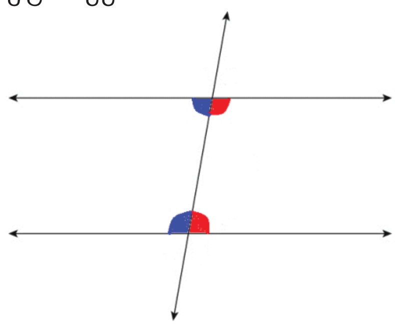
$\angle 4$ და $\angle 6$
$\angle 3$ და $\angle 5$

შიგაცალმხრივი კუთხეები

შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები



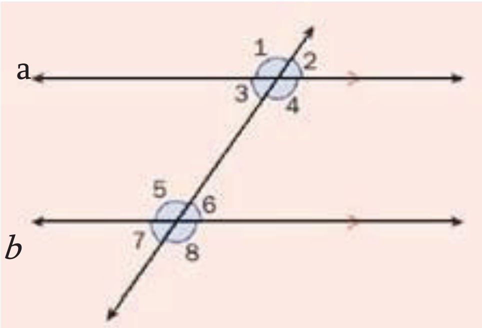
შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეები

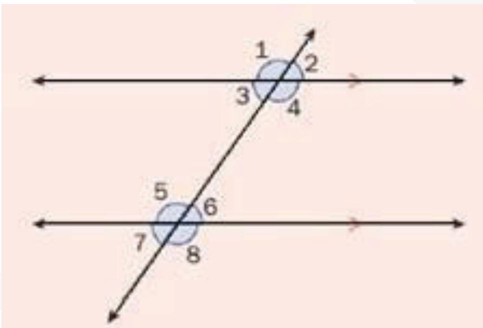


თეორემები:

თეორემა 1: ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.

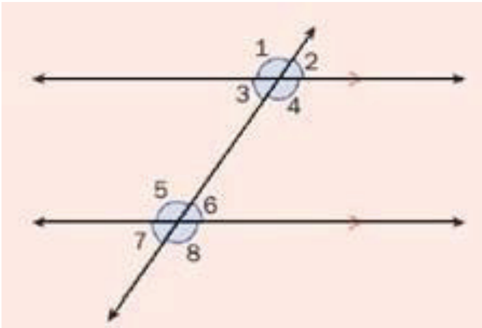
თეორემა 2: ორი პარალელური წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°- ია.

თეორემა 4.2 : ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.	**დამტკიცება:**
$\angle 3 = \angle 6$ $\angle 4 = \angle 5$ შიგა ჯვარედინი კუთხეები 	რადგან წრფეები პარალელურია, a წრფის პარალელური გადატანის შემთხვევაში ის დაემთხვევა b წრფეს. აქსიომა: ყოველი სხივიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძება გადავდოთ 180°-ზე ნაკლები ერთადერთი კუთხე. აქსიომიდან გამომდინარე: $\angle 1=\angle 5$. თავის მხრივ $\angle 1=\angle 4$; $\angle 5=\angle 8$ ე.ი. $\angle 1=\angle 4=\angle 5=\angle 8$ რ.დ.გ. (რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)

თეორემა 4.3: ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან, შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია.	**დამტკიცება:**
 $\angle 4 + \angle 6=180°$ $\angle 3 + \angle 5 = 180°$	ჩვენ ვიცით, რომ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ია. $\angle 3+\angle 4=180°$ 3.2 თეორემის თანახმად $\angle 3 = \angle 6$ მოცემული ორი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $\angle 4+\angle 6=180°$ რ.დ.გ.

მითითება: ასევე სამართლიანია მოცემული თეორემების შებრუნებული თეორემებიც.
თუ ორი წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით და შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია

პარალელური წრფეების გადაკვეთით მიღებული კუთხეების თვისებები:



- ✓ ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.
- ✓ შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია
- ✓ შიგაცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180°-ია

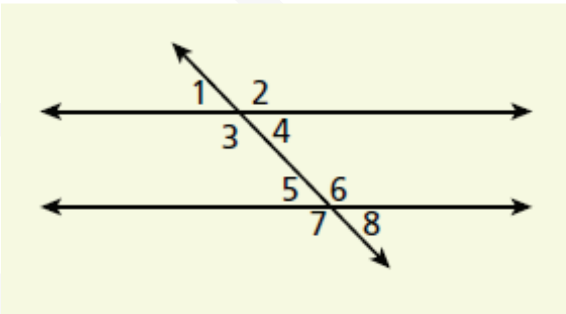
$\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$

$\angle 2 = \angle 3 = \angle 6 = \angle 7$

სასურველია გაეცნოთ თეორემებს და თეორემების დამტკიცებას.

ნიმუში 1:

იპოვეთ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები, თუ $\angle 5=80°$.



მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ია.

$\angle 6 + 80°=180°$

$\angle 6=100°$

$\angle 5=\angle 8=80°$

$\angle 6=\angle 7=100°$

ვერტიკალური კუთხეები ტოლია

$\angle 5=\angle 4=80°$

$\angle 3=\angle 6=100°$

რადგან შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია.

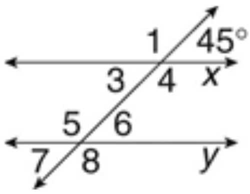
$\angle 1=\angle 4=\angle 5=\angle 8=80°$

$\angle 2=\angle 3=\angle 6=\angle 7=100°$

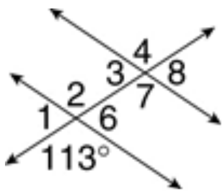
მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. X და Y წრფეები პარალელურია $X \parallel Y$ და მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული 8 კუთხიდან ვიცით ერთ-ერთი, იპოვეთ დანარჩენი შვიდი კუთხე.

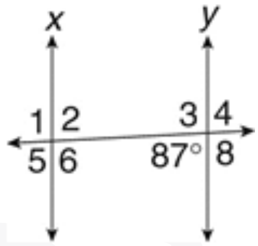
ა)



ბ)



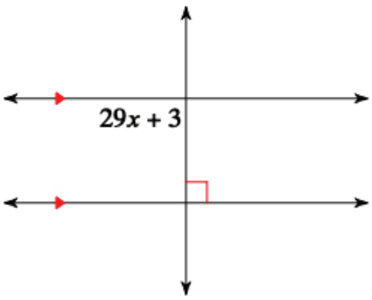
გ)



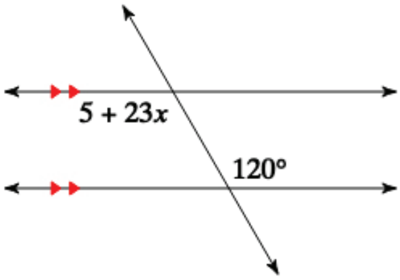
სავარჯიშოები

2. კუთხეები მოცემულია გრადუსებით, გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x , ასევე თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა.
(წითელი ისრები მიგვანიშნებს, რომ წრფეები პრალელურია)

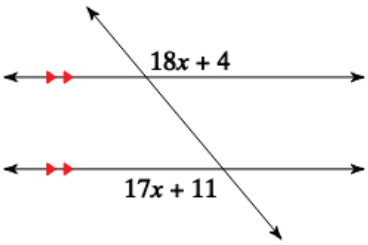
ა)



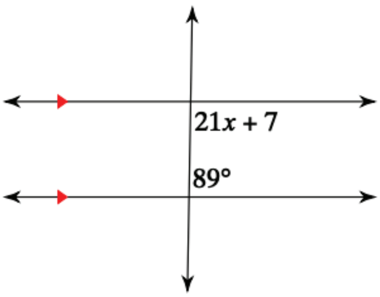
ბ)



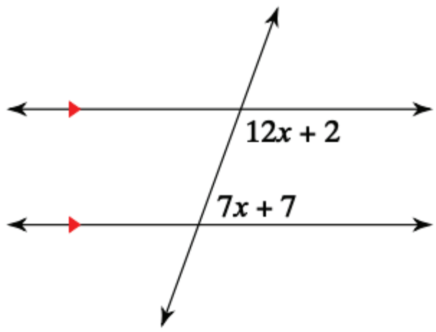
გ)



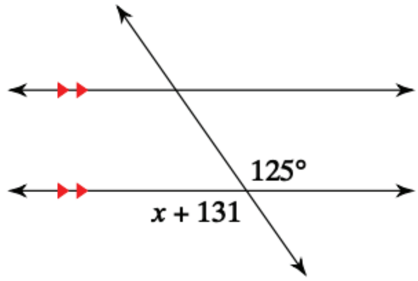
დ)



ე)



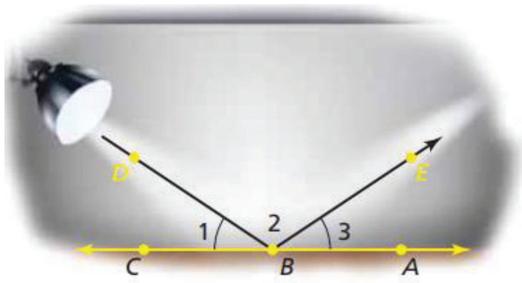
ვ)



3. ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით ისე, რომ ერთ-ერთი კუთხე 42° -ია, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

ეს საინტერესოა: კუთხეები ოპტიკაში, ფიზიკა.

ოპტიკა შეისწავლის სინათლის თვისებებს.
გეომეტრიული ოპტიკაში ძალიან დიდი ადგილი უჭირავს სინათლის ზედაპირზე დაცემისა და გარდატეხის კუთხეების შესწავლას.



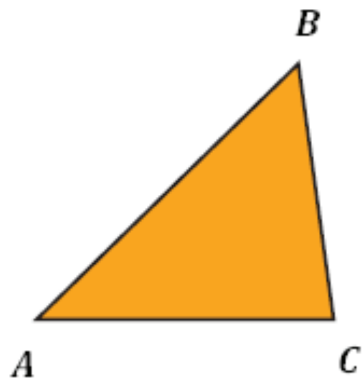
სურ 6.

4.6 კუთხეები სამკუთხედში სამკუთხედების კლასიფიკაცია

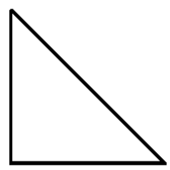
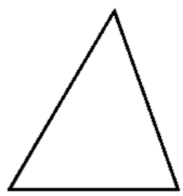
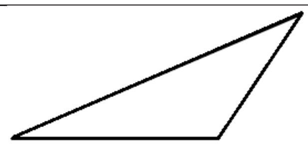
სამკუთხედი შედგება სამი ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილისა და მათი მიმდევრობით შემაერთებელი სამი მონაკვეთებისგან.

სამ წერტილს ეწოდება სამკუთხედის წვეროები, ხოლო მონაკვეთებს – სამკუთხედის გვერდები.

სიმბოლო Δ -ით ავღნიშნავთ სამკუთხედს. მოცემულია ΔABC.

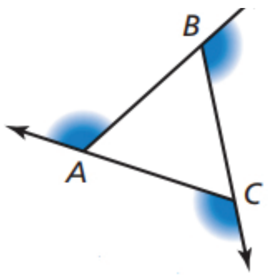


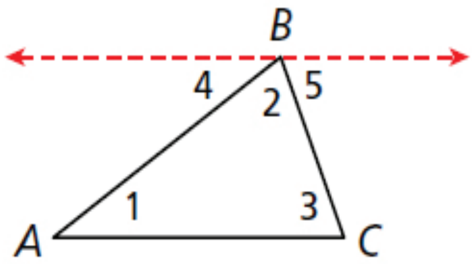
სამკუთხედების კლასიფიკაცია

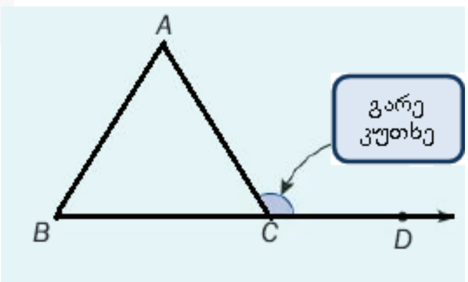
მართკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომელის ერთი-ერთი კუთხე 90° - ია.	
მახვილკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომელის სამივე კუთხე 90°- ზე ნაკლებია.	
ბლაგვკუთხა ეწოდება სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე 90°-ზე მეტი და 90°- ზე ნაკლებია.	

სამხუთხედის გარე კუთხე

გარე კუთხე ეწოდება სამკუთხედის კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს.



თეორემა 4.4: სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° - ია.	**დამტკიცება:**
მოცემულია: ΔABC დავამტკიცოთ, რომ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$  	B წერტილზე გავავლოთ AC მონაკვეთის პარალელური წრფე. პარალელური წრფეების თვისებების თანახმად, მივიღებთ: $\angle 1=\angle 4$ $\angle 3=\angle 5$ შიგა ჯვარედინი კუთხეები ტოლია რადგან, $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$ ე.ი. $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ რ.დ.გ.

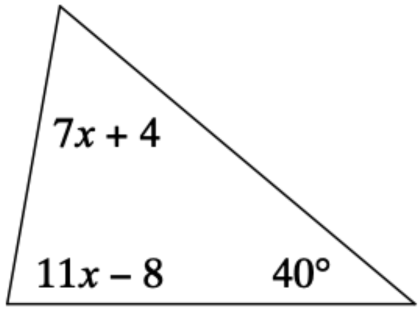
თეორემა 4.5: სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.	**დამტკიცება:**
მოცემულია: ΔABC დავამტკიცოთ, რომ $\angle ACD=\angle A+\angle B$  	ვიცით, რომ მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ია $\angle ACB+\angle ACD=180°$ (1) სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამიც 180°-ია. $\angle ACB+\angle A+\angle B=180°$ (2) (1) და (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ACD=\angle A+\angle B$ რ.დ.გ.

დაიმახსოვრეთ:

- ✓ სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია.
- ✓ სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამის ტოლია.

ნიმუში 1: სამკუთხედის შიგა კუთხეების პოვნა.

ა) იპოვეთ სამკუთხედის უცნობი კუთხეები.



როგორც ვიცით, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ია, აქედან გამომდინარე,

$7x+4+11x-8+40=180°$

$18x+36=180$

$18x=180-36$

$18x=144$

$x=8$

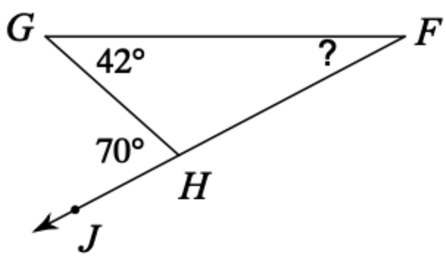
$7x+4=7\cdot 8+4=60°$

$11x-8=11\cdot 8-8=80°$

ნიმუში 2:

სამკუთხედის გარე კუთხით შიგა კუთხის პოვნა

ა) იპოვეთ $\angle F$



სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე შიგა კუთხეების ჯამის ტოლია, ე.ი.

$\angle JHG=\angle G+\angle F$

$70°=42°+x$

$x=70°-42°$

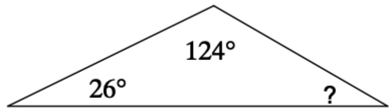
$x=28°$

$\angle F=28°$

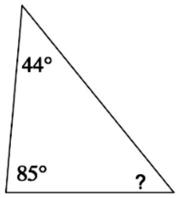
მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. გადაიხაზეთ ნაზახი რვეულში და იპოვეთ სამკუთხედის შიგა კუთხეები.

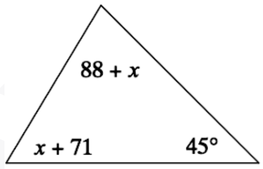
ა)



ბ)

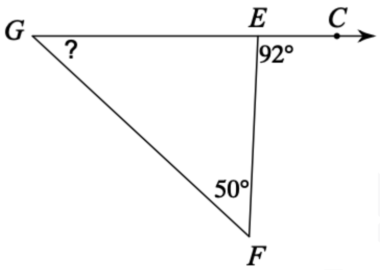


გ)

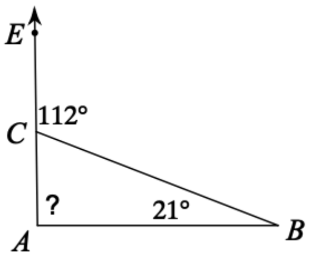


2. იპოვეთ x და უცნობი კუთხეები (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში).

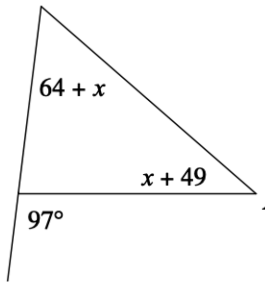
ა)



ბ)



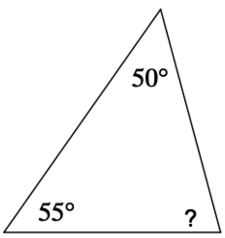
გ)



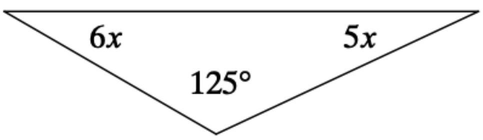
სავარჯიშოები

3. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები: (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში)

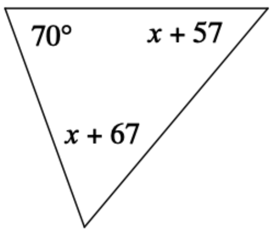
ა)



ბ)

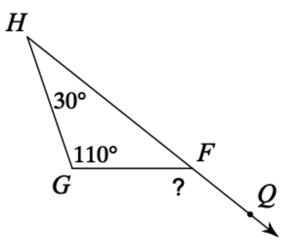


გ)

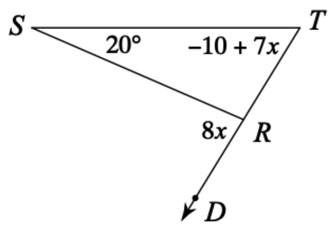


4. იპოვეთ სამკუთხედის გარე კუთხე და კუთხეები.

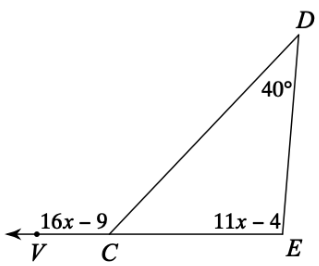
ა)



ბ)



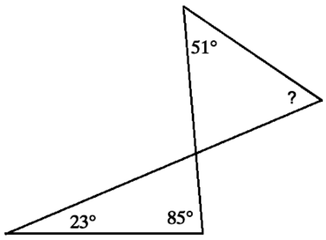
გ)



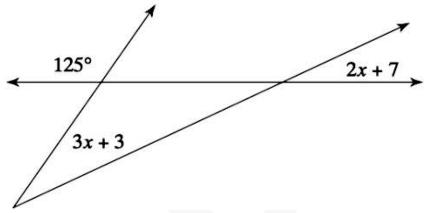
5. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც
ა). 1:2:2 ; ბ). 3:3:4 გ). 1:2:3 დ). 1:1:2
იპოვეთ კუთხეები ცალ-ცალკე და დაახასიათეთ თითოეული შემთხვევა, როგორია მოცემული სამკუთხედი?

6. რთული ამოცანები: იპოვეთ უცნობი კუთხეები (იგულისხმება, რომ სამკუთხედის თითოეული კუთხე მოცემულია გრადუსებში).

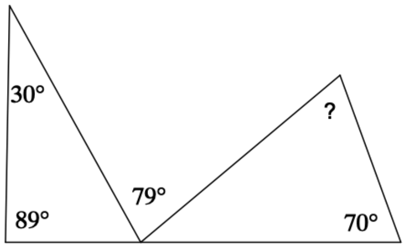
ა)



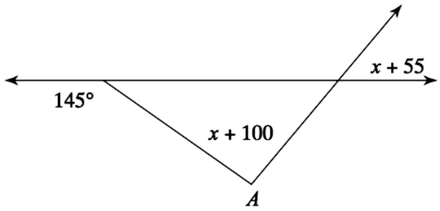
ბ)



გ)



დ)



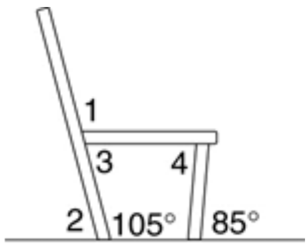
7. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხეა 50° , იპოვე სამკუთხედის მეორე კუთხე.

8. რთული ამოცანა:

დაასაბუთეთ, რას უდრის სამკუთხედის სამივე გარე კუთხის ჯამი.

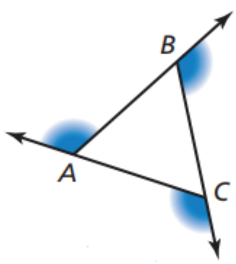
აპლიკაცია რეალური ცხოვრებიდან

სკამის დასაჯდომი სიბრტყე იატაკის პარალელურია. ნახაზის მიხედვით, იპოვეთ კუთხეები.



რთული ამოცანა

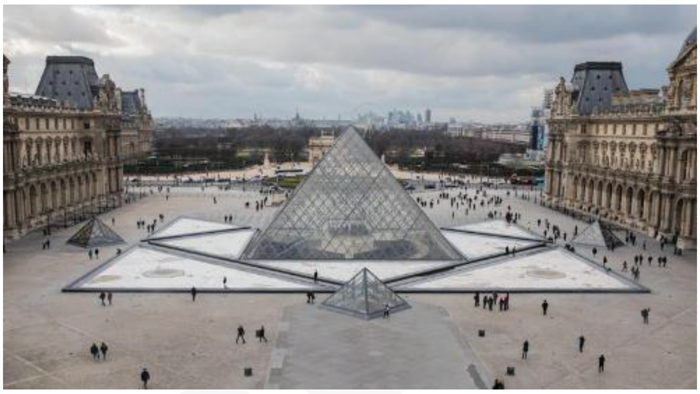
სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარედბა ერთმანეთს როგორც 2:3:4. იპოვეთ მოცემული სამკუთხდის გარე კუთხეები. (მინიშნება: თითო კუთხეს აქვს ორი გარე კუთხე, აიღეთ თითო წვეროსთან თითო გარე კუთხე).



4.7 კუთხეები სხვადასხვა სამკუთხედებში

კუთხეების მნიშვნელობა ძალიან დიდია არქიტექტურაში.

ლუვრის ეზოში არის პირამიდა, რომელსაც წინიდან თუ შევხედავთ წახნაგი სამკუთხედი აქვს, რომელსაც გვერდები ტოლი აქვს. ასევე ეზოს დიზაინს თუ დავაკვირდებით დავინახავთ მახვილკუთხა სამკუთხედებს.



სურ. 7

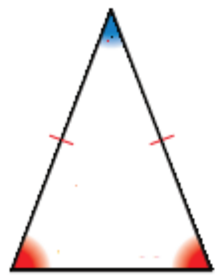
დავადგინოთ, არის თუ არა კავშირი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

კუთხეები ტოლფერდა და ტოლგვერდა სამკუთხედებში

ტოლფერდა ეწოდება სამკუთხედს, რომელსაც ორი გვერდი ტოლი აქვს.

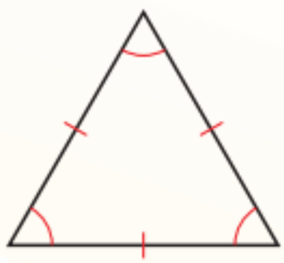
ტოლ გვერდებს **ფერდები** ეწოდება, მესამეს ფუძე

თეორემა: ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.



ტოლგვერდა ეწოდება სამკუთხედს, რომელსაც სამივე გვერდი ტოლი აქვთ.

თოლგვერდა სამკუთხედში სამივე კუთხე ტოლია და უდრის 60°-ს.



დაიმახსოვრეთ ტერმინები!

სამკუთხედები არის კუთხეების მიხედვით:
მართკუთხა **მახვილკუთხა** **ბლაგვკუთხა**

გვერდების მიხედვით: **ტოლფერდა** **ტოლგვერდა**
სხვადასხვაგვერდა

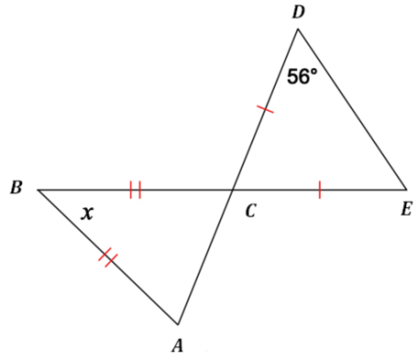
ნიმუში 1: იპოვეთ x.

1. ΔCDE ტოლფერდაა,
რადგან ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია:

$$\angle D=\angle E=56°$$

$\angle DCE=180°-56°-56°=68°$

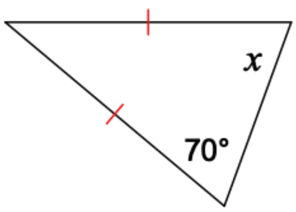
2. ΔABC ტოლფერდაა,
რადგან ვერტიკალური კუთხეები ტოლია:
$\angle DCE=\angle BCA=68°$
რადგან ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.
$\angle BCA=\angle A=68°$
$\angle B=180°-68°-68°=44°$



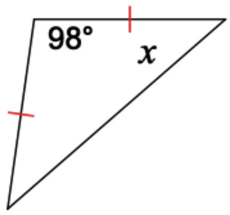
მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში, დააწერეთ სამკუთხედის წვეროებს ასოები, ჩაწერეთ ტოლი გვერდები და იპოვეთ უცნობი კუთხე. (იგულისხმება, რომ კუთხეები იზომება გრადუსებით).

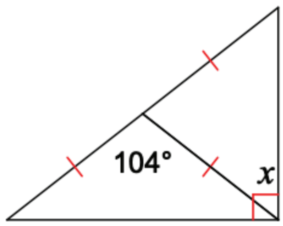
ა)



ბ)



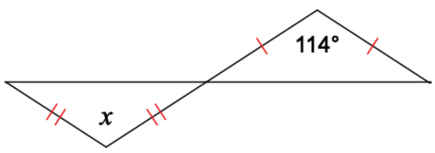
გ)



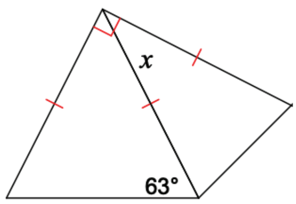
სავარჯიშოები

2. იპოვეთ x, ასევე:
- ✓ დააწერეთ სამკუთხედის წვეროებს ასოები
- ✓ ამოწერეთ ტოლი გვერდები
- ✓ იპოვეთ სამკუთხედების ყველა კუთხე.

ა)



ბ)



3. **დაასაბუთეთ**: სამკუთხედის წვეროებია A, B, C. ვიცით, რომ AC⊥CB და AC=CB. ააგეთ სამკუთხედი და იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4. **დაასაბუთეთ:** რატომ არის ტოლგვერდა სამკუთხედის ყველა კუთხე 60°-ის ტოლი?

5. სამკუთხედის კუთხეებია 48°, 72°, იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გარე კუთხის ზომა.

6. **ვიზუალიზაცია**:

ა) რამდენი ტოლფერდა სამკუთხედის მიღება შეიძლება წერტილების შეერთებით სხვადასხვა გზით?

ბ) რამდენი სხვადასხვა სამკუთხედის მიღება შეიძლება?

აქტივობა :

ნახაზზე მოცემულია, მხატვარ აუგუსტ ჰერბინის ესკიზი. ის სიბრტყეზე ხატავდა გეომეტრიულ ფიგურებს და შემდეგ აფერადებდა.

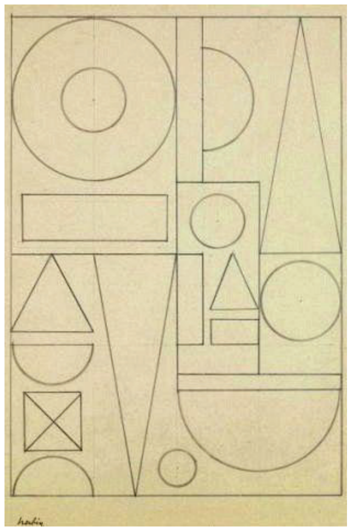
მან შექმნა გეომეტრიული სერია ნამუშევრების „გეომეტრიული აბსტრაქციები“:

ა) დაწერეთ, რომელ ფიგურებს ცნობთ?

ბ) გადაიხაზეთ ნახაზი ან ფურცელზე დახაზეთ ის გეომეტრიული ფიგურები, რომელიც იცით და გააფერადეთ.

გ) ააგეთ კომპიუტერულ პროგრამაში PAINT – გეომეტრიული ფიგურები და გემოვნებისამებრ ჩაასხით ფერები.

საჭიროების შემთხვევაში გამოიყენეთ სკოლის რესურსები, მაგ.: კომპიუტერი.



სურ.8

4.8 მრავალკუთხედები
კუთხეები მრავალკუთხედებში

სურ.9

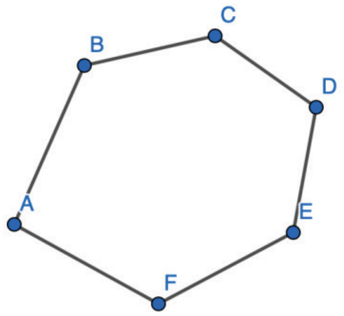
ამერიკის შეერთებულ შტატებში ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი შენობაა პენტაგონი, რომელის სახელწოდებაც ნიშნავს ხუთკუთხედს.

შენობას აქვს მრავალკუთხედის ფორმა, შედგება ხუთი წვეროსაგან და ხუთი გვერდისაგან.

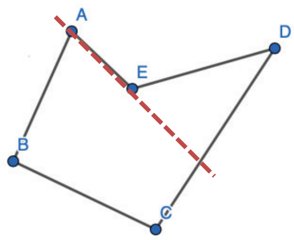
მრავალკუთხედი არის შეკრული ბრტყელი ფიგურა, რომელიც შედგება სამი ან მეტი გვერდისაგან. მრავალკუთხედის გვერდები ერთმანეთს არ კვეთს.

ამოზნექილი მრავალკუთხედი ეწოდება ისეთ მრავალკუთხედს, რომელიც მისი ნებისმიერი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს.

ამოზნექილი მრავალკუთხედის ნებისმიერ გვერდზე გავლებული წრფე სხვა გვერდს არ უნდა კვეთდეს.

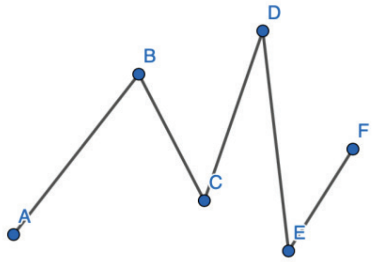


არაამოზნექილი მრავალკუთხედი ეწოდება ისეთ მრავალკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი გვერდის შემცველი წრფე სხვა გვერდს კვეთს.



ტეხილი შედგება წერტილებისაგან და მათი მიმდევრობით შემაერთებელი მონაკვეთებისაგან.
ტეხილი ჩაიწერება წვეროებზე მოცემული ლათინური ასოებით: ABCDEF

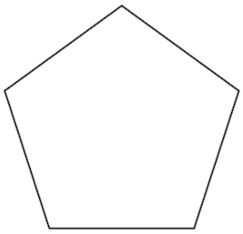
ტეხილი შეიძლება იყოს გახსნილი და შეკრული. შეკრული ეწოდება ტეხილს, რომლიც საწყისი და ბოლო წერილი ემთხვევა. მაგ.: მრავალკუთხედი შეკრული ტეხილია.



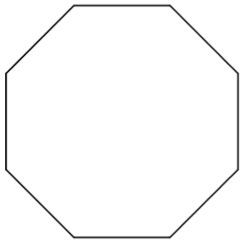
ამოზნექილ მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე ტოლია, **წესიერი** მრავალკუთხედი ეწოდება.

მრავალკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით:

წესიერი პენტაგონი



წესიერი ოქტაგონი

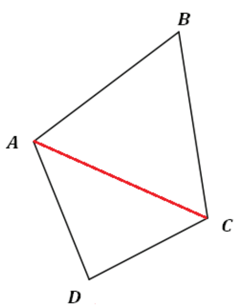


მრავლკუთხედების კლასიფიკაცია გვერდების მიხედვით.

გვერდების რაოდენობა	**სახელი**
3	სამკუთხედი
4	ოთხკუთხედი
5	პენტაგონი
6	ექვსკუთხედი
8	ოქტაგონი
10	დეკაგონი
12	დოდეკაგონი
n	n-კუთხედი

ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360°-ია.

<table>
<tr><td>თეორემა: ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360 °-ია</td><td>დამტკიცება:</td></tr>
<tr><td>მოცემულობა:
მოცემულია: $ABCD$ ოთხკუთხედი
დავამტკიცოთ, რომ
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

ერთ წრფეზე არამდებარე ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს დიაგონალი ეწოდება. AC დიაგონალია.

</td><td>$ABCD$ ოთხკუთხედი
AC დიაგონალით გაყოფილია ორ სამკუთხედად, თითოეულის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია.

ΔABC -ში ვიცით, რომ
$\angle CAB+\angle B+\angle BCA=180°$ (1)

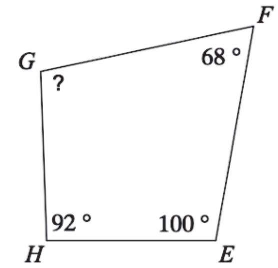
ΔADC —ში ვიცით, რომ
$\angle CAD+\angle D+\angle DCA=180°$ (2)

ორი ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:
$\angle CAB+\angle B+\angle BCA+$
$\angle CAD+\angle D+\angle DCA= 180°+180°$
$\angle CAB+\angle CAD=\angle A$
$\angle BCA+\angle DCA=\angle C$
შევიტანოთ ტოლობაში აღნიშნული ინფორმაცია და მივიღებთ, რომ:
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$
რ.დ.გ.</td></tr>
</table>

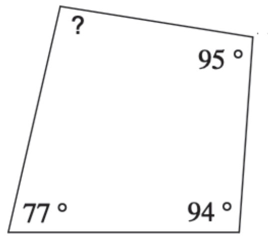
მოსამზადებელი სავარჯიშოები

1. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ ოთხკუთხედის უცნობი კუთხეები:

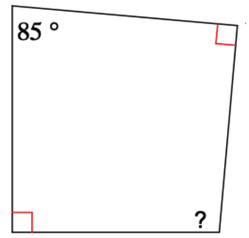
ა)



ბ)

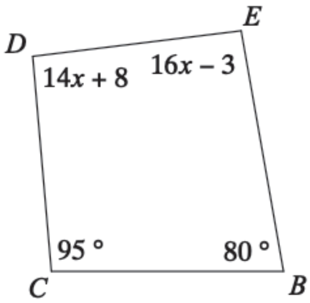


გ)

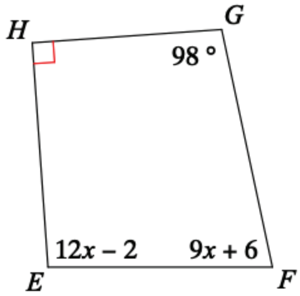


2. გადაიხაზეთ ნახაზები რვეულში და იპოვეთ x

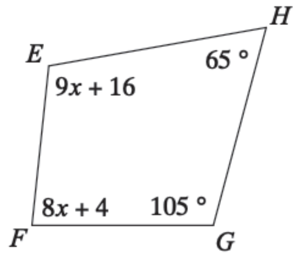
ა)



ბ)



გ)



3. იმსჯელეთ:

აღწერეთ პენტაგონის შენობის არქიტექტურა.

- ✓ როგორ დააპროექტრა არქიტექტორმა შენობა? როგორი წრფეები გამოიყენა გეგმის შედგენისას?
- ✓ ხედავთ თუ არა პარალელურ შენობებს?
- ✓ რომელი შენობებია მართობული?

სურ.10

პროექტი, მათემატიკური LAB

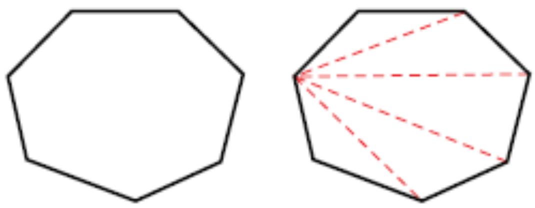
ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი გამოითვლება ფორმულით 180(n-2) , სადაც n — მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობაა.

კვლევა

იპოვეთ ხუთკუთხედის, ექვსკუთხედის, შვიდკუთხედის შიგა კუთხების ჯამი.

ქვემოთ მოცემული ცხრილის მიხედვით, დაადგინეთ კანონზომიერება გვერდებსა და შიგა კუთხეების ჯამს შორის.

გვერდების რაოდენობა	რამდენი სამკუთხედი შედგა?	შიგა კუთხეების ჯამი
3	1	180
4		180 · ■ = ■
5		180 · ■ = ■
6		180 · ■ = ■
7		180 · ■ = ■
n		180 · ■ = ■



კვლევის შედეგების მიხედვით, დაადგინეთ:

- ✓ რის ტოლი იქნება წესიერი ხუთკუთხედის (პენტაგონის) თითოეული კუთხე?
- ✓ რის ტოლი იქნება წესიერი ოქტაგონის თითოეული კუთხე?
- ✓ თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 120° -ია, რამდენი კუთხისაგან შედგება მოცემული n კუთხედი?
- ✓ თუ ვიცით, რომ წესიერი n კუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 135° -ია, რამდენი კუთხისაგან შედგება მოცემული n კუთხე?

4

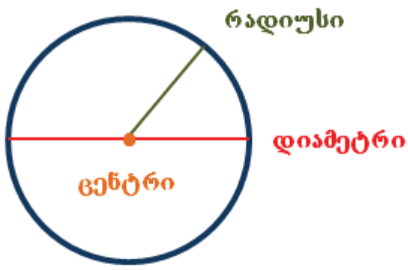
4.9 წრე, წრის ნაწილები, ცენტრალური კუთხე

ფოტოზე აღბეჭდილია „ეშმაკის ბორბალი“, რომელიც მდებარეობს ბათუმში. სურათიდან კარგად ჩანს, რომ „ეშმაკის ბორბალს“ აქვს წრის ფორმა.

თუ კარგად დავაკვირდებით, დავინახავთ, რომ ბორბლის გარშემოწერილობა (რომელზედაც სკამებია დამაგრებული) თანაბრად არის დაშორებული ცენტრისაგან, რის გამოც ბორბალი გაწონასწორებულია.

სურ. 9

წრეწირი ეწოდება სიბრტყეზე მოცემული წერტილიდან თანაბრად დაშორებულ წერტილთა ერთობლიობას.



✓ მოცემულ წერტილს წრეწირის **ცენტრი** ეწოდება.

✓ მონაკვეთს ცენტრიდან წრეწირის წერტილამდე — **რადიუსი**.

✓ წრეწირით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს **წრე** ეწოდება.

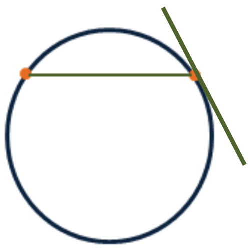
რადიუსი აღინიშნება ლათინური ასოებით: R ან r.

✓ წრეწირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს, რომელიც გადის ცენტრზე, **დიამეტრი** ეწოდება.

ქორდა წრეწირის ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთია.

დიამეტრიც უდიდესი ქორდაა და მისი სიგრძე ორი რადიუსის სიგრძის ტოლია.
$d=2R$.

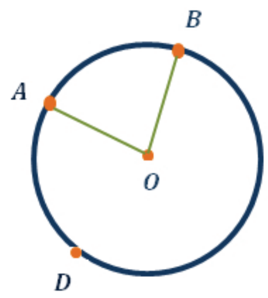
მხები ეწოდება წრფეს, რომელსაც წრესთან ერთი საერთო წერტილი აქვს.



ცენტრალური კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის წვეროც წრის ცენტრს ემთხვევა.

რკალი წრის ორი წერტილის შემაერთებელი წირია და აღინიშნება $\overset{\frown}{AB}$.

ნახაზზე მოცემულია $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{ADB}$ რკალები.

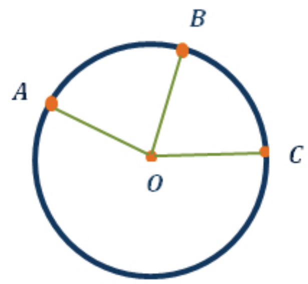


რკალის გრადუსული ზომა მის ბოლოზე გავლებული ცენტრული კუთხის ტოლია.

$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$

ორი რკალი ტოლია, თუ მათი შესაბამისი ცენტრალური კუთხეები ტოლია.

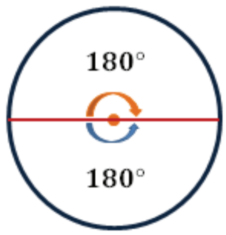
სექტორი კუთხის გვერდებს შორის მოქცეული წრის ნაწილია.



თუ $\angle AOB = \angle BOC$,
მაშინ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

დიამეტრით წრე იყოფა ორ ნახევარწრედ.

წრიული კუთხე 360° -ია.



ნიმუში 1 ცენტრალური კუთხეების და რკალის გრადუსული ზომის პოვნა

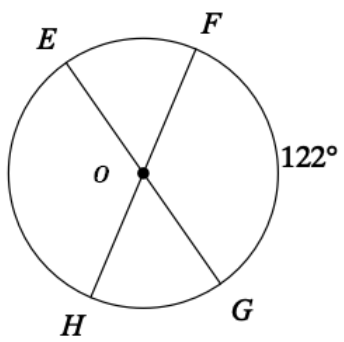
იპოვეთ თითეოული რკალის და შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.

$\angle FOG = \overset{\frown}{FG} = 122°$

$\angle FOG = \angle EOH = 122°$ ვერტიკალური კუთხეებია

$\angle EOF = 180° - \angle FOG = 180° - 122° = 58°$

$\angle EOF = \angle GOH$

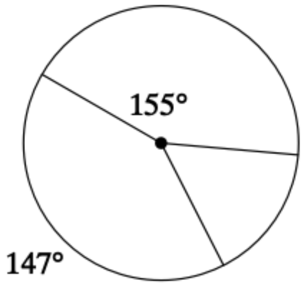


წრე	რადიუსი	ცენტრალური კუთხე
წრეწირი	დიამეტრი	რკალი
ცენტრი	ქორდა	სექტორი

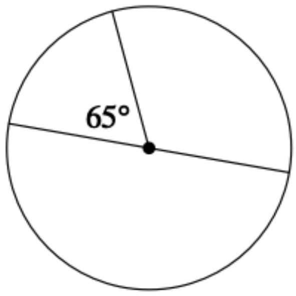
მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. იპოვეთ თითოეული ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.

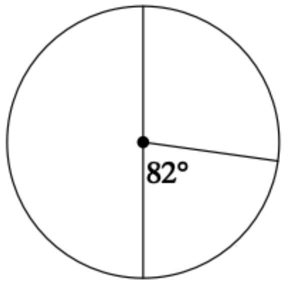
ა)



ბ)



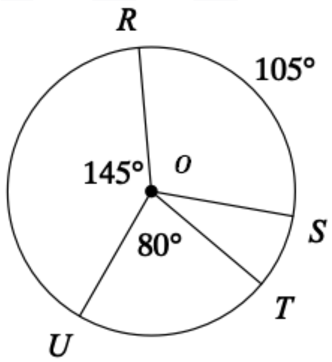
გ)



2. მოცემული ნახაზის მიხედვით, უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

ა) იპოვეთ თითოეული ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა.

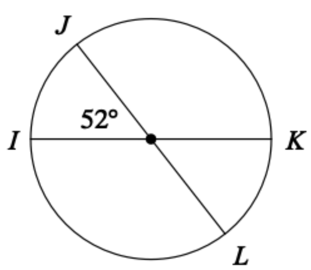
ბ) დაწერეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.



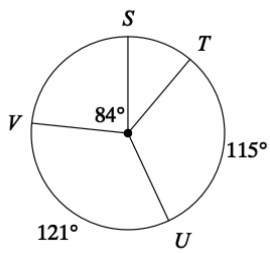
სავარჯიშოები

3. იპოვეთ თითოეული ცენტრალური კუთხის და რკალის გრადუსული ზომა.

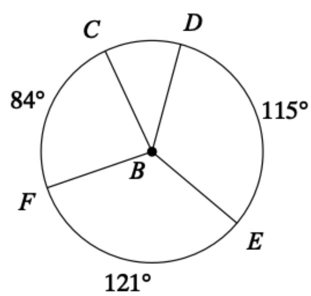
ა)



ბ)



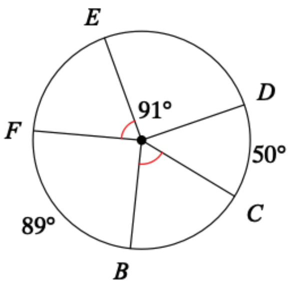
გ)



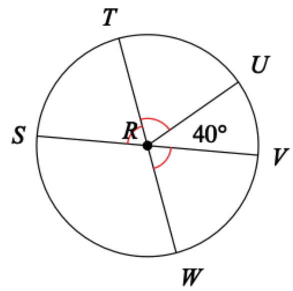
4. წრეწირი მასზე მდებარე A, B, C წერტილებით იყოფა 3 რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც — 3:4:5. იპოვეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.

5. რთული ამოცანა: იპოვეთ წრის უცნობი ცენტრალური კუთხეები და რკალის გრადუსული ზომები.

ა)



ბ)



6. წრეწირი მასზე მდებარე A, B, C წერტილებით იყოფა 3 რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც — 9:7:2. ააგეთ, რაც შეიძლება ზუსტი ნახაზი და იპოვეთ თითოეული რკალის გრადუსული ზომა.

7. რეალური აპლიკაცია

ა) დაითვალეთ, სულ რამდენ სექტორად არის დაყოფილი ეშმაკის ბორბალი.

ბ) რა იქნება თითოეული სექტორის ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა?

სურ.10

სახალისო კითხვა:

ბ) თუ პიცას დავყოფთ 8 ნაჭრად, რა იქნება ერთი სექტორის (ნაჭრის) შესაბამისი ცენტრალური კუთხე?

სურ.11

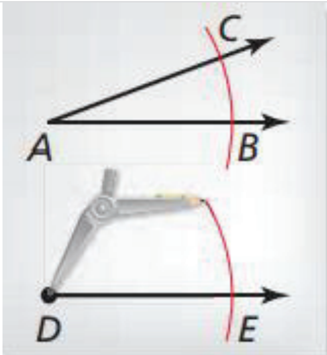
საინტერესო ინფორმაცია

ჩვენ ვიცით, წრის გრადუსული ზომა არის 360°. ერთ-ერთი თეორიის თანახმად წრის გრადუსულ ზომად მიჩნეულია 360° იმიტომ, რომ მოცემული რიცხვი ახლოს არის წელიწადში დღეების რაოდენობასთან. უძველესი ანსტორნომები თვლიდნენ, რომ მზე თავის ორბიტაზე გადაადგილებას 360 დღეს ანდომებდა. ისინი თვლიდნენ, რომ მზე ყოველდღე ბრუნდავდა 1°-ით.

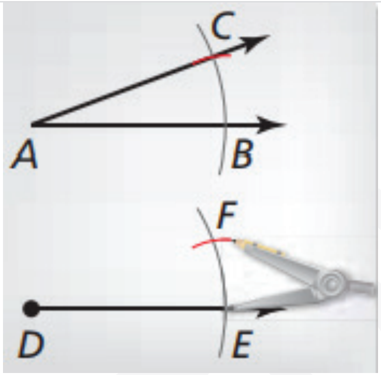
8. **ჯგუფური სამუშაო.** 

LAB — მათემატიკური კვლევა.
როგორ ავაგოთ კუთხის ტოლი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით?

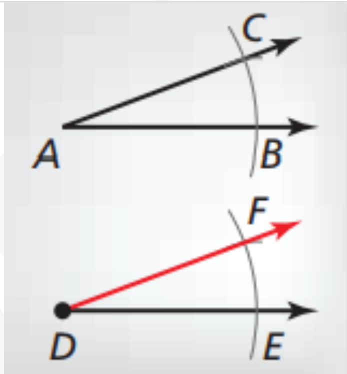
დახაზეთ ნებისმიერი მახვილი ან ბლაგვი კუთხე და ააგეთ მოცემული კუთხის ტოლი კუთხე ფარგლისა და სახაზავის მეშვეობით.



ნაბიჯი 1: გავავლოთ სხივი და ფარგლის მეშვეობით სხივის სათავიდან მოვხაზოთ რკალი



ნაბიჯი 2: ფარგლის მეშვეობით გავზომოთ B და C წერტილებს შორის მანძილი და E წერტილიდან მოვხაზოთ BC რადიუსის ტოლი რკალი



ნაბიჯი 3: შევაერთოთ A წერტილი რკალების გადაკვეთის წერტილთან.

დამატებითი სავარჯიშოები

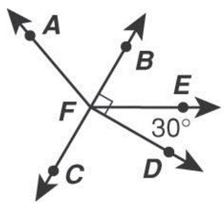
თავის შემაჯამებელი კითხვები

ტესტისთვის მზადება:

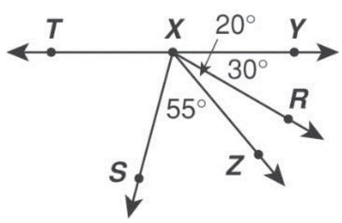
1. მოცემული ნახაზის მიხედვით, გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს.

ამოწერეთ:
ა) მახვილი კუთხეები
ბ) ბლაგვი კუთხეები
გ) მართი კუთხეები
დ) რას უდრის $\angle EFB$ $\angle EFC$?
ე) რომელია მოსაზღვრე კუთხეები?

ნახაზი 1:

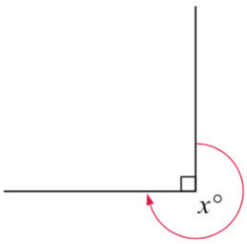


ნახაზი 2.

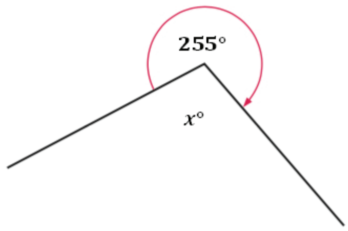


2. გაიხსენეთ, რას ეწოდება წრიული კუთხე და იპოვეთ $x°$.

ა)



ბ)



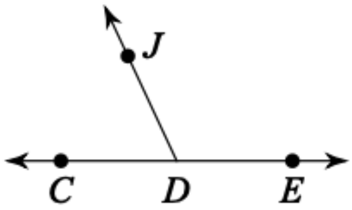
3. იპოვეთ :

ა) $\angle JDC$, თუ $\angle JDE = 115°$

ბ) $\angle JDE$, თუ $\angle JDC = 62°$

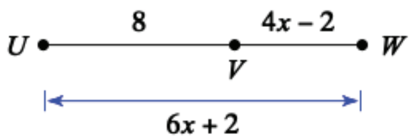
გ) თითეოული კუთხე თუ

$\angle JDC : \angle JDE = 4 : 5$

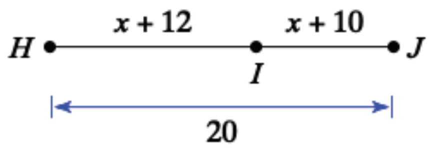


4. იპოვეთ თითოეული მონაკვეთის სიგრძე.

ა)

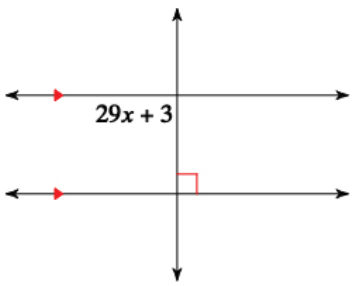


ბ)

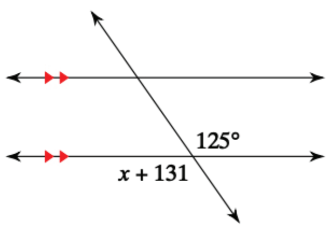


5. მოცემული ნახაზების მიხედვით, იპოვეთ X

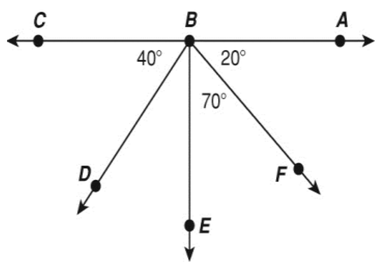
ა)



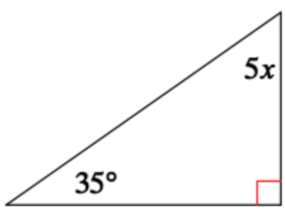
ბ)



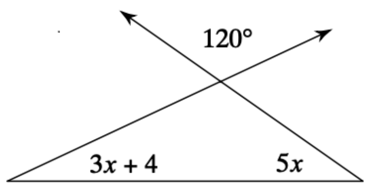
გ)



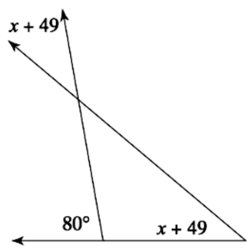
დ)



ე)

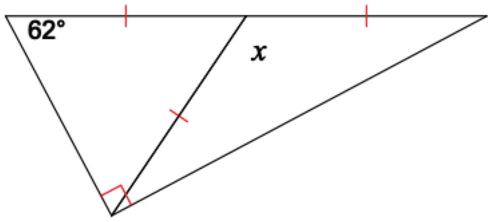


ვ)

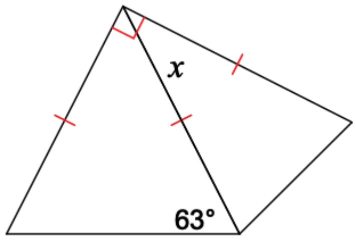


6. *რთული ამოცანები:*

ა)



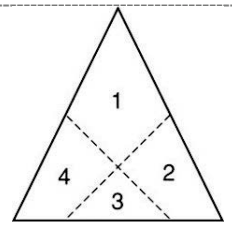
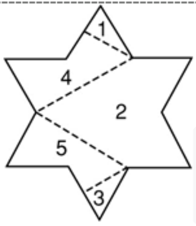
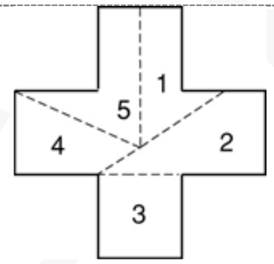
ბ)



7. ააგეთ ნახაზები და ამოხსენით ამოცანები:

1. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AB=12 სმ, BC = 18სმ. იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა, წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.
2. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AC=9.5 სმ, BC = 4სმ. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა, წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.
3. წრფეზე მდებარეობს A, B, C წერტილები ისე, რომ AB:BC = 3:8 იპოვეთ თითოეული მონაკვეთის სიგრძე, თუ AC=4.4 სმ.
4. დაადგინეთ, მდებარეობს თუ არა A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე, თუ AB=4 სმ, BC = 9სმ, AC = 20სმ. დაასაბუთეთ პასუხი.
5. ∠AOC=80° ∠COB=30° იპოვეთ ∠AOB°-ს გრადუსული ზომა, განიხილეთ ყველა შესაძლო ვარიანტი.
6. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 80°-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
7. ორი კუთხის გადაკვეთისას მიღებულ 3 კუთხის ჯამი 300° -ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
8. მოსაზღვრე კუთხეებიდან, ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{3}$-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
9. ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი კუთხე მეორე კუთხის $\frac{1}{2}$-ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.
10. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 35° -ია, იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
11. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე 80° -ია, იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
12. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 35° -ია, იპოვეთ წვეროსთან მდებარე კუთხე.
13. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 50° -ია, იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები. დაასაბუთეთ, რომელი გარე კუთხე უნდა ავიღოთ?
14. მართკუთხა სამკუთედის მახვილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთამენთს, როგორც 1:2 , იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

სახალისო ამოცანები:

ა) დაკეცეთ ტოლგვერდა სამკუთხედი ისე, რომ მიიღოთ კვადრატი.	
ბ) დაკეცეთ ვარსკვლავის ფორმის ფიგურა ისე, რომ მიიღოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი.	
გ) დაკეცეთ ფიგურა ისე, რომ მიიღოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი.	
დ).მოცემულია საათი: ✓ იპოვეთ კუთხე საათის დიდ და პატარა ისრებს შორის, როდესაც 1:00 სთ-ია. ✓ იპოვეთ კუთხე საათის დიდ და პატარა ისრებს შორის, როდესაც 12:24 სთ-ია.	

ჯგუფური აქტივობა:

1770 წელს მათემატიკოსმა ლაგრანჟმა ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა თეორემა, რომელსაც „ოთხი კვადრატის თეორემა“ ეწოდება.

თეორემა: ნებისმიერი მთელი რიცხვი შეიძლება ჩავწეროთ, როგორც ოთხი რიცხვის კვადრატის სახით.

მაგალითად:

$35= 1^2+3^2+3^2+4^2$

$11= 3^2+1^2+1^2+0^2$

ლაგრანჟი

ნებისმიერი ნატურალური n

$n=a^2+b^2+c^2+d^2$

I. დაიყავით წყვილებად და შემდეგი ოთხი რიცხვიდან:

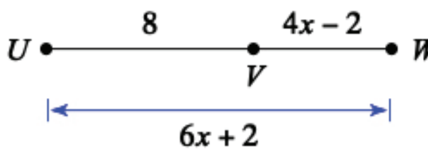
ა). 17 ბ). 30 გ). 43 დ). 103

II. დაწერეთ რაიმე ორნიშნა რიცხვი და წარმოადგინეთ ოთხი რიცხვის კვადრატის ჯამის სახით.

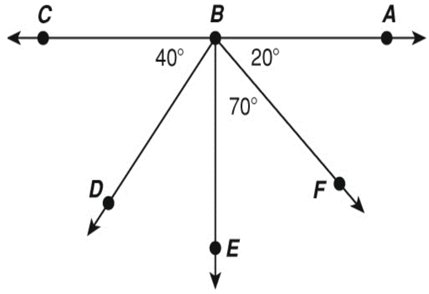
– თითეოული წარმოადგინეთ ოთხი რიცხვის კვადრატის სახით .

ტესტის ნიმუში:

1)იპოვეთ უცნობი გვერდი:



2). იპოვეთ უცნობი კუთხე:

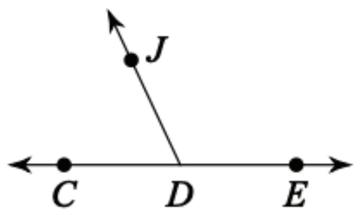


3)იპოვეთ :

ა) ∠JDC , თუ ∠JDE=115°

ბ) ∠JDE, თუ ∠JDC=62°

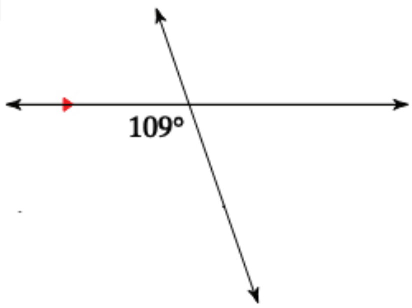
გ) თითეოული კუთხე თუ ∠JDC : ∠JDE=4 :5



4) წრფეზე მდებარეობს A,B,C წერტილები ისე, რომ AB=12 სმ, BC = 14სმ. იპოვეთ AC მონაკვეთის სიგრძე. განიხილეთ ორი შემთხვევა, წერტილების სხვადასხვა განლაგებით.

5)ორი კუთხის გადაკვეთისას მიღებულ 3 კუთხის ჯამი 210° -ია, იპოვეთ ეს კუთხეები.

6)ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული ოთხი კუთხიდან, ერთი-ერთი 109°-ია, იპოვეთ დანარჩენი სამი კუთხე.



7)იპოვეთ უცნობი კუთხეები: