

ქათავან ცარცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნწერება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამის (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

■ ქეთევან ცერცვაძე

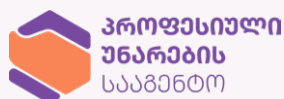
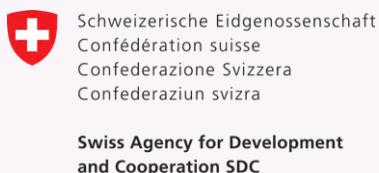
■ ევგენი გუგულაშვილი

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

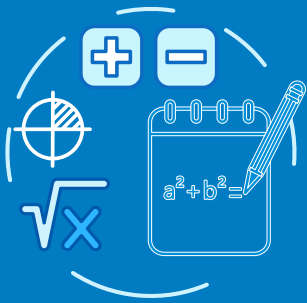
რედაქტორი: ზურაბ ვახანია

გრაფიკული დიზაინერი: ვერა პაპასკირი

საავტორო უფლებები დაცულია



საქართველო, თბილისი, 2022

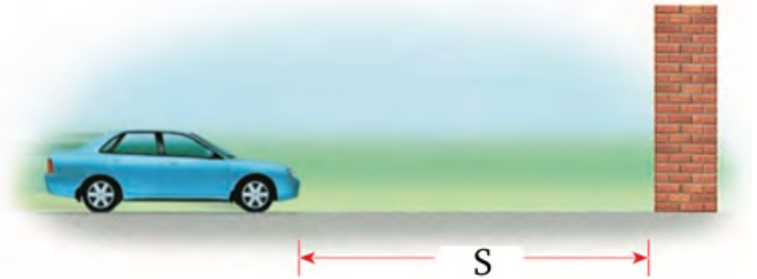


იცით თუ არა,

ავტომობილის მოძრაობის დროს ხშირია ისეთი შემთხვევა, როცა საჭიროა სწრაფად დამუხრუჭება, საავარიო სიტუაციის თავიდან არიდების მიზნით. მომხდარი ავტოსაგზაო შემთხვევის დროს კი გზის ზედაპირზე საბურავების ნაკვალავის მიხედვით ექსპერტიზით დგინდება რა სიჩქარით მოძრაობდა მძღოლი, დაარღვია თუ არა მან საგზაო მოძრაობის წესები და ა.შ.

კოვალენსური დავალება

სამუხრუჭე მანძილი



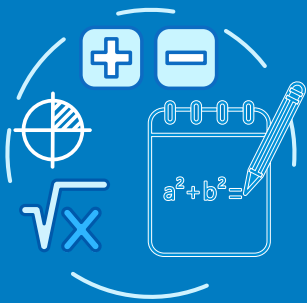
ფიზიკის კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია მანქანის სამუხრუჭე სისტემის ამუშავებიდან სრულ გაჩერებამდე მანძილის (სამუხრუჭე მანძილი) გამოსათვლელი ფორმულა $S = \frac{v^2}{\mu g}$ (1), სადაც v სიჩქარეა დამუხრუჭების დაწყების მომენტში, μ – მანქანის საბურავის გზის ზედაპირზე მოჭიდების კოეფიციენტი, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.

სრული გასაჩერებელი მანძილი კი უდრის მძღოლის მიერ რეაქციის დროს (დრო მძღოლის მიერ დაბრკოლების შემჩნევიდან სამუხრუჭე სისტემის ამუშავებამდე). შესაბამისად, გავლილი მანძილისა და სამუხრუჭე მანძილების ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = vt + \frac{v^2}{\mu g} \quad (2)$$

მათემატიკა გვებმარება რეალური მოვლენების მოდელირებასა და შესწავლაში, ხოლო როგორ არის შესაძლებელი ფორმულის შედგენა, ვისწავლით მოგვიანებით. ამ ეტაპზე მნიშვნელოვანია განვიხილოთ სხვადასხვა სიტუაციები და გავიგოთ, როგორ არის შესაძლებელი განტოლებების ამოხსნის ცოდნით გავარკვიოთ რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა საგზაო შემთხვევამდე ან საწყისი მონაცემების ცოდნით როგორ შეიძლება დავადგინოთ სამუხრუჭე მანძილი.





საკვანძო კითხვა:

- საგზაო შემთხვევის შემდეგ, როგორ არის შესაძლებელი დაადგინოთ გადააჭარბა თუ არა მანქანამ სიჩქარეს? რომელი მათემატიკური მოდელი გვეხმარება აღნიშნული ტიპის პრობლემების გადაჭრაში?



თქვენი დავალება

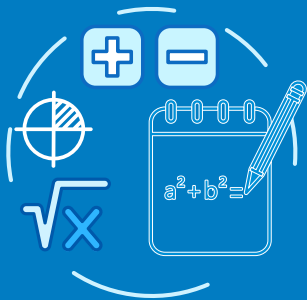
გამოიკვლიოთ და დაადგინოთ მანქანის სამუხრუჭე მანძილი სხვადასხვა სიჩქარით და სხვადასხვა ტიპის გზაზე მოძრაობის პირობებში.

ქვემოთ მოცემულია ცხრილი, თუ რას უდრის სხვადასხვა ზედაპირზე მოჭიდების კოეფიციენტი:

გზის ზედაპირის ტიპი	მოჭიდების კოეფიციენტი	
	მშრალ ზედაპირზე	სველ ზედაპირზე
საფარიანი	0,8	0,4
ღორღი	0,7	0,4
გრუნტი	0,6	0,3
მოყინული	0,1	---

1. გამოთვალეთ რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი მშრალ საფარიან გზაზე, თუ სამუხრუჭე მანძილია 240 მ და მძღოლმა აამუშავა სამუხრუჭე სისტემა, საფრთხის დანახვიდან 1 წამის შემდეგ? (ჩათვალეთ $g = 10 \frac{მ}{წმ^2}$)
2. ღორღიან სველ გზაზე მიმავალმა მძღოლმა შენიშნა საფრთხე, 2 წმ-ის შემდეგ სამუხრუჭე სისტემა აამუშავდა და ავტომობილი გაჩერდა 140 მეტრში. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი?
3. მეგობრებთან და აუცილებლად ზრდასრულის დახმარებით ჩაატარეთ ექსპერიმენტი: ამისათვის დაგჭირდებათ ველოსიპედი, წამწამი, სიგრძის საზომი და სხვადასხვა ზედაპირის მქონე გზა. აირჩიეთ უსაფრთხო გზის ნაწილი, ველოსიპედზე თანაბარი სიჩქარის აკრეფის შემდეგ წინა-





შენი დავალება

სწარ გამზადებულ ნიშნულთან დაიწყეთ დამუხრუჭება, გაზომეთ მანძილი ნიშნულიდან სრულ გაჩერებამდე. გამოითვალეთ სიჩქარე. ეს გაიმეორეთ სამჯერ სხვადასხვა სიჩქარით ერთსა და იმავე გზაზე, შემდეგ მეორე გზაზე. აუცილებლად დაიცავით უსაფრთხოების ზომები. მონაცემები შეიტანეთ ცხრილში და შეამოწმეთ დამოკიდებულება სიჩქარესა და სამუხრუჭე მანძილს შორის. ასევე, დამოკიდებულება სხვადასხვა ზედაპირსა და სამუხრუჭე მანძილს შორის ერთი და იმავე სიჩქარის შემთხვევაში.

4. გაეცანით მოძრაობის წესებს, გამოიკვლიეთ გათვალისწინებულია თუ არა სიჩქარის შეზღუდვები სხვადასხვა ზედაპირიან გზებზე. კიდევ რას ითვალისწინებს საგზაო მოძრაობის წესები?
5. თქვენ მიერ მოძიებული შედეგების ანალიზის შედეგად, შეიმუშავეთ რეკომენდაციები ურჩი მძღოლებისათვის, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია მოძრაობის წესების დაცვა. დაამზადეთ საინფორმაციო ბუკლეტი და გაავრცელეთ სასკოლო საზოგადოებაში.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, რომელშიც იქნება ინფორმაცია ზემოთ მოცემულ თითოეულ პუნქტზე.

ნაშრომის პრეზენტაციისას ხაზგასმით უპასუხეთ კითხვებს:

- I.** რამდენად მნიშვნელოვანია რეალური პროცესის მათემატიკური მოდელის შექმნა? მსჯელობისას ისაუბრეთ სამუხრუჭე მანძილის გამოსათვლელ ფორმულაზე.
- II.** გაანალიზეთ თქვენ მიერ შეგროვებული მონაცემები, თუ აღმოაჩინეთ რაიმე კანონზომიერება?
- III.** თუ საგზაო ინსპექტორმა იცის სამუხრუჭე მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა, ასევე გზის მოჭიდების კოეფიციენტი (ხახუნის კოეფიციენტი), როგორ შეუძლია დაადგინოს რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა? რა შემთხვევაში შეუძლია ისაუბროს სიჩქარის გადაჭარბებაზე?

თემა 4. კვადრატული მოდელები

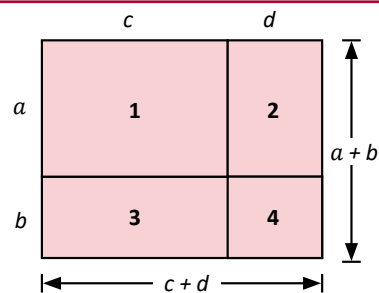


წინარე მასალის გახეობა

შემოკლებული გამრავლების ფორმულები და ცნებები:

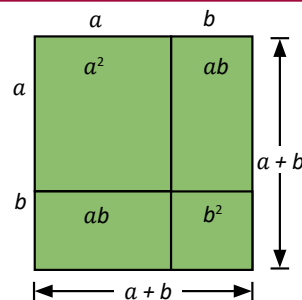
წინა პარაგრაფებში გავეცანით ორწევრის ორწევრზე გამრავლებას, ნამრავლის წარმოდგენას ჯამის სახით; ასევე შემოკლებული გამრავლების ფორმულებს

$$1. \quad (a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

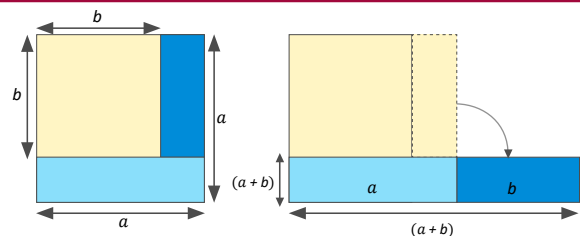


$$2. \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$3. \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



$$4. \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



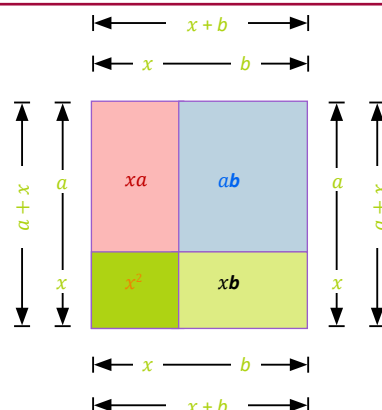
5.

ნამრავლის წარმოდგენა ჯამად

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab =$$

ჯამის წარმოდგენა ნამრავლად

$$= x^2 + (a + b)x + ab =$$



4.1. კვადრატული სამწევრი



საკვანძო კითხვა: გიფიქრიათ თუ არა, როგორ არის შესაძლებელი ალგებრული გამოსახულებებით რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა?

$ax^2 + bx + c$ ალგებრული გამოსახულებას, როდესაც $a \neq 0$ -ს კვადრატული სამწევრი ეწოდება.

კვადრატული სამწევრი შედგება 3 წევრისაგან, x -წარმოადგენს ცვლადს, ხოლო a, b და c რიცხვებია, a -ს და b -ს უწოდებენ კოეფიციენტებს, ხოლო c -ს თავისუფალ წევრს.

ჩვენ ვიცით, რომ როდესაც $a = 1$ არსებობს მეთოდი, რომლის მიხედვით შესაძლებელია კვადრატული სამწევრის ნამრავლად დამლა, იმ შემთხვევაში, როდესაც მარტივად არის შესაძლებელი ვიპოვოთ ის ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი უდრის თავისუფალ წევრს, ხოლო ჯამი – მეორე კოეფიციენტს.

კვადრატული სამწევრის მნიშვნელობის პოვნა

ნახაზზე მოცემულია ბინის გეგმა. გეგმის მიხედვით ვხედავთ, რომ მისაღები ოთახის ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით –

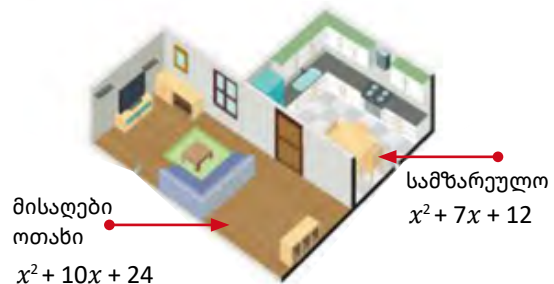
$x^2 + 10x + 24$, ხოლო სამზარეულოს ფართობი

გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით –

$x^2 + 7x + 12$.

რა იქნება ბინის ფართობი, თუ ვიცით რომ $x = 1$?

$x = 10$?



მოცემულია ორი კვადრატული სამწევრი, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადის x -ის მნიშვნელობაზე.

ფართობი ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობისთვის

ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება	$x = 1$	$x = 10$
$x^2 + 10x + 24$	$1^2 + 10 \cdot 1 + 24 = 1 + 10 + 24 = 25$	$10^2 + 10 \cdot 10 + 24 = 100 + 100 + 24 = 224$
$x^2 + 7x + 12$	$1^2 + 7 \cdot 1 + 12 = 1 + 7 + 12 = 20$	$10^2 + 7 \cdot 10 + 12 = 100 + 70 + 12 = 182$

როგორც ვხედავთ ფართობი დამოკიდებულია x -ის მნიშვნელობაზე.

კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა



ნიმუში 1 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

ა) $x^2 + 10x + 24 = (x + \dots)(x + \dots)$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია 24 და ჯამი 10:

ნამრავლი	ჯამი
$1 \cdot 24 = 24$	$1 + 24 = 25 \neq 10$
$2 \cdot 12 = 24$	$2 + 12 = 14 \neq 10$
$4 \cdot 6 = 24$	$4 + 6 = 10$

იმისათვის, რომ კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად შევარჩიეთ ორი რიცხვი 4 და 6

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$$

დასაბუთება: $x^2 + 10x + 24 = x^2 + 4x + 6x + 24 =$
 $= x(x + 4) + 6(x + 4) = (x + 4)(x + 6)$

ბ) $x^2 + 7x + 12 = (x + \dots)(x + \dots)$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია 12 და ჯამი 7:

ნამრავლი	ჯამი
$1 \cdot 12 = 12$	$1 + 12 = 13 \neq 7$
$2 \cdot 6 = 12$	$2 + 6 = 8 \neq 7$
$3 \cdot 4 = 12$	$3 + 4 = 7$

იმისათვის, რომ კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად შევარჩიეთ ორი რიცხვი 3 და 4

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

დასაბუთება: $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 =$
 $x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$

როგორც ვხედავთ:

მისაღები ოთახის ფართობი $= x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

სამზარეულოს ფართობი $= x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$



საკვანძო კითხვა: როგორ ფიქრობთ, რომელი თანამამრავლი შეესაბამება რომელ გვერდს? ჩაწერეთ ბინის გვერდები ცვლადებით.



ნიმუში 2 – კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა

წარმოვადგინოთ მოცემული კვადრატული სამწევრი ნამრავლად:

$$x^2 - 3x - 10 =$$

უნდა ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია „-10“ და ჯამი „-3“,

ავარჩიეთ რიცხვის წყვილი 2 და (-5)

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

დასაბუთება:

$$x^2 - 3x - 10 = x^2 + 2x - 5x - 10 =$$

$$= x(x + 2) - 5(x + 2) = (x + 2)(x - 5)$$

მითითებები

ეცადეთ გონებაში იპოვოთ რიცხვთა წყვილი, აღნიშნული ალგორითმით

ნამრავლი	ჯამი
$-1 \cdot 10 = -10$	$-1 + 10 \neq -3$
$1 \cdot (-10) = -10$	$1 + (-10) \neq -3$
$-2 \cdot 5 = -10$	$-2 + 5 \neq -3$
$2 \cdot (-5) = -10$	$-5 + 2 = -3$

კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა



ნიმუში 3

ჩვენ ვიცით, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები; თუ კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენით მივიღებთ ორწევრის კვადრატს, ვამბობთ, რომ მივიღეთ სრული კვადრატი

ა) $x^2 - 14x + 49 =$

ნამრავლი	ჯამი
$7 \cdot 7 = 49$	$7 + 7 = 14$
$(-7) \cdot (-7) = 49$	$(-7) + (-7) = -14$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

ბ) განვიხილოთ კვადრატული სამწევრი, როდესაც $a \neq 0$;

$$4x^2 - 12x + 9 =$$

$2x \cdot 2x$ $3 \cdot 3$
 $2 \cdot (2x \cdot 3)$
 $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა

ალგებრული გამოსახულებების გამარტივებისთვის საჭიროა სხვადასხვა მანიპულაციის ცოდნა. გავცნოთ გარდაქმნას, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, აღნიშნული ხერხის გამოყენებით მარტივად დაუფლებით კვადრატული განტოლების ამოხსნის ხერხებს.



ნიმუში 4

$$x^2 - 18x + 2 =$$

ვიცით, რომ

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$x^2 - 2 \cdot 9x + 2 =$$

$$x^2 - 2 \cdot 9x + 81 - 81 + 2 =$$

$(x - 9)^2$ $- 79$

პირველი სამი წევრის დაჯგუფებით მივიღეთ სრული კვადრატი, გამოდის რომ:

$$x^2 - 18x + 2 = (x - 9)^2 - 79$$

აღნიშნულ გარდაქმნას ეწოდება სრული კვადრატის გამოყოფა.



ნიმუში 5

შედარებით რთული ნიმუში

$$2x^2 - 20x + 2 =$$

გავიტანოთ მამრავლი ფრჩხილს გარეთ:

$$2(x^2 - 10x + 1) =$$

ფრჩხილებში მოცემული სამწევრიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$2(x^2 - 2 \cdot 5x + 1) =$$

$$x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 1 =$$

$(x - 5)^2$ $- 24$

$$2((x - 5)^2 - 24) = 2(x - 5)^2 - 48$$



მაგალიტი 6 – კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, ვიზუალური წარმოდგენა

$$x^2 + 6x + 2 =$$

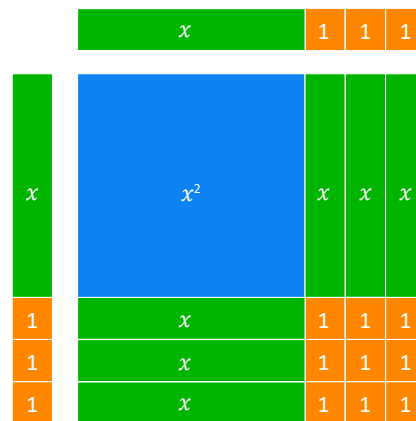
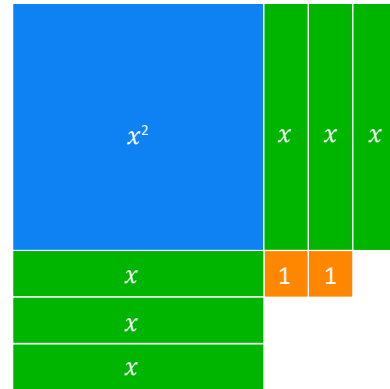
ვიცით, რომ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

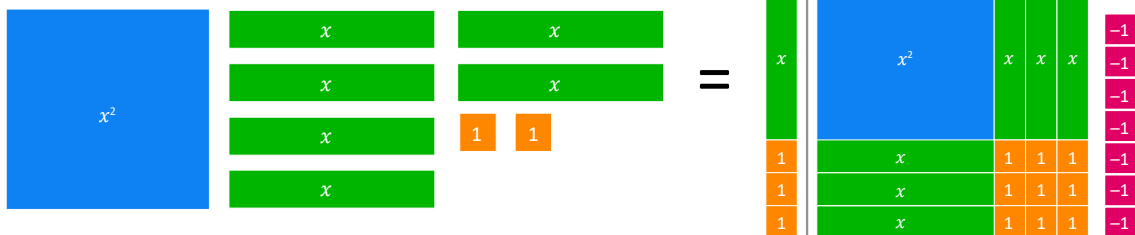
$$x^2 + 2 \cdot 3x + 2 =$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 2 =$$

$$(x + 3)^2 - 7$$



$$x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$$

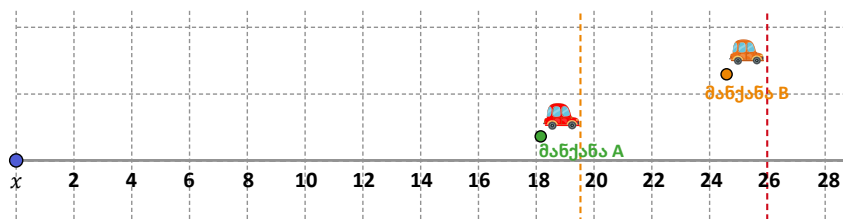




ნიშნობა 7

თბილისიდან ბათუმის მიმართულებით, გაემგზავრა ჯერ სატვირთო, ერთი საათის შემდეგ კი მსუბუქი ავტომობილი. ქალაქებს შორის მანძილი 360 კმ-ია. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მსუბუქი ავტომობილის სიჩქარე 2-ჯერ მეტია სატვირთო ავტომობილის სიჩქარეზე, რის გამოც ის 2 საათით ადრე ჩავიდა ბათუმში.

წარმოვიდგინოთ სიტუაცია



❖ იხილეთ სიმულაცია, ასევე გრაფიკი

აღნიშნულ სიმულაციაში შეგიძლიათ პარამეტრების შეცვლა და სიტუაციის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა; ჩათვალეთ, საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთი ერთეული უდრის 10 კმ-ს.

მსჯელობა:

დავუშვათ A მანქანის სიჩქარეა x კმ/სთ, მაშინ B მანქანის სიჩქარე იქნება $2x$ კმ/სთ;

360-ის გავლას A მანქანა მოანდომებდა $\frac{360}{x}$ სთ-ს;

360-ის გავლას B მანქანა მოანდომებდა $\frac{360}{2x}$ სთ-ს;

ვიცით, რომ B მანქანა გავიდა 1 საათით გვიან, თუმცა ჩავიდა 2 საათით ადრე, ე.ი. B მანქანამ იარა 3 სთ-ით ნაკლები, ვიდრე A მანქანამ;

სიტუაციის მათემატიკური მოდელის (განტოლების) შესადგენად გამოვიყენოთ აღნიშნული პირობა და მივიღებთ:

A მანქანის მიერ დახარჯულ დროს – **B მანქანის** მანქანის მიერ დახარჯული დრო = 3 სთ

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{2x} = 3$$

მივიღეთ რაციონალური განტოლება, განტოლების ამოხსნით ვიპოვით სიჩქარეს:

$$\frac{360}{x} - \frac{180}{x} = 3$$

$$\frac{180}{x} = 3$$

$$x = 60 \text{ კმ/სთ}$$

A მანქანის სიჩქარე არის 60 კმ/სთ;

B მანქანის სიჩქარე არის 120 კმ/სთ.



სავარჯიშოები

ამოცანები სიჩქარეებზე, ნაწილებზე

1. ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 435 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი ავტომობილი გამოვიდა. რა დროში შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს, თუ მათი სიჩქარეებია 75 კმ/სთ და 85 კმ/სთ?
2. A და B ქალაქს შორის მანძილი 450 კმ-ია. A-დან B-ს მიმართულებით გამოვიდა პირველი ავტომობილი 60 კმ/სთ სიჩქარით. ერთი საათის შემდეგ მისი შემხვედრი მიმართულებით B ქალაქიდან გამოემგზავრა მეორე ავტომობილი 70 კმ/სთ სიჩქარით. A პუნქტიდან რა მანძილზე შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს?
3. ერთი პუნქტიდან ერთი და იმავე მიმართულებით გამოვიდა ორი ქვეითი. ერთის სიჩქარე 1 კმ/სთ-ით მეტია მეორეს სიჩქარეზე. რამდენი წუთის შემდეგ იქნება მათ შორის 500 მ?
4. მოტორიანმა ნავმა, რომლის საკუთარი სიჩქარეა 40 კმ/სთ, მდინარის დინების მიმართულებით 3 სთ-ში გაიარა 126 კმ. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე.
5. ერთ მუშას შეკვეთის შესრულება შეუძლია 12 საათში, მეორეს კი – 20 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს სამუშაოს ორივე მუშა თუ ერთად იმუშავენ?
6. ორი მილით ერთდროულად ავზის ავსებას სჭირდება 4 საათი. მარტო პირველი მილით ავზის ავსებას სჭირდება 6 საათი. რამდენი საათი დასჭირდება მარტო მეორე მილს ავზის ასავსებად?
7. დათო და ლუკა მუშაობენ ერთნაირ ტესტზე. დათოს საათში შეუძლია პასუხი გასცეს ტესტის 18 კითხვას, ლუკას კი – 36 კითხვას. ბიჭებმა ერთდროულად დაიწყეს მუშაობა. რამდენი კითხვა იყო ტესტში, თუ ლუკამ 60 წუთით ადრე დაასრულა ტესტზე მუშაობა?



რეალური პროცესების მათემატიკური მოდელირება/ამოცანები განტოლების შედგენით

8. მოტორიანი ნავი 2 საათი მოძრაობდა ტბაზე და 3 საათი მდინარის დინების მიმართულებით, რომლის სიჩქარეა 2 კმ/სთ. მან სულ გაიარა 81 კმ. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე.
ამოცანა ამოხსნათ განტოლების შედგენით.

ნიშვნა: გავიაროთ ნაბიჯ-ნაბიჯ ამოხსნის ალგორითმი

	მსჯელობა ანალიზი ამოცანის პირობის მიხედვით	მოქმედება
ნაბიჯი 1:	ნავის საკუთარი სიჩქარე უცნობია	ნავის საკუთარი სიჩქარე აღვნიშნოთ x კმ/სთ-ით
ნაბიჯი 2:	ტბაზე ნავი მოძრაობდა 2 სთ. გამოვიყენოთ მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა $S = V \cdot t$ და ვიპოვოთ ნავის მიერ ტბაზე გავლილი მანძილი	$S_1 = 2x$ კმ-ტბაზე 2 საათში გავლილი მანძილი

სავარჯიშოები

ნაბიჯი 3:	ნავი 3 სთ მოძრაობდა მდინარის დინების მიმართულებით სიჩქარე დინების მიმართულებით $V_{\text{მომ}} = V_{\text{საქ}} + V_{\text{დინ}}$	$2V_{\text{მომ}} = x + 2$ კმ/სთ $S_2 = 3(x + 2)$ კმ – დინების მიმართულებით 3 საათში გავლილი მანძილი
ნაბიჯი 4	ამოცანის პირობის თანახმად ნავმა სულ გაიარა 81 კმ $\rightarrow S_1 + S_2 = 81$	შევადგინოთ განტოლება $2x + 3(x + 2) = 81$
ნაბიჯი 5	ამოვხსნათ განტოლება მოტორიანი ნავის საკუთარი სიჩქარე	$2x + 3x + 6 = 81$ $5x = 81 - 6$ $5x = 75$ $x = 75 : 5$ $\rightarrow x = 15 \frac{\text{კმ}}{\text{სთ}}$

- ავტომობილმა 3 საათში გაიარა 15 კმ-ით მეტი ვიდრე მოტოციკლემ 2,5 საათში. იპოვეთ ავტომობილის და მოტოციკლეთის სიჩქარე, თუ მოტოციკლეთის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია ავტომობილის სიჩქარეზე.
- ოსტატი საათში ამზადებს 12 დეტალით მეტს შეგირდთან შედარებით. ოსტატმა იმუშავა 2 საათი და დაამზადა 2-ჯერ მეტი დეტალი, ვიდრე შეგირდმა 5 საათში. რამდენ დეტალს ამზადებს ოსტატი საათში?
- კატერი მდინარის დინების მიმართულებით 7 სთ-ში იმავე მანძილს გადის, რასაც მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 8 საათში. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე, თუ კატერის საკუთარი სიჩქარეა 30 კმ/სთ.
- ორი ავტომანქანა მოძრაობს გზაზე ერთნაირი სიჩქარით. თუ პირველი ავტომანქანა გაზრდის სიჩქარეს 10 კმ/სთ-ით, მეორე კი 10 კმ/სთ-ით შეამცირებს, მაშინ პირველი 3 საათში გაივლის იმავე მანძილს, რასაც მეორე 2 საათში. რა სიჩქარით მოძრაობენ ავტომანქანები?
- ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის მანძილი 1020 კმ-ია, ერთდროულად ერთმანეთის შესახვედრად ორი მატარებელი დაიძრა, ამასთან ერთის სიჩქარე 10 კმ/სთ-ით მეტია მეორე მატარებლის სიჩქარეზე. მოძრაობის დაწყებიდან 5 საათის შემდეგ ისინი ჯერ ვერ შეხვდნენ ერთმანეთს და მათ შორის დარჩენილი იყო 170 კმ. იპოვეთ მატარებლების სიჩქარე.
- სპორტსმენმა ვარჯიშის შედეგად სირბილის საშუალო სიჩქარე 250 მ/წმ-დან 300 მ/წმ-მდე გაზარდა. შედეგად მან დისტანციის გავლის დრო 1 წუთით გააუმჯობესა. რა სიგრძის არის სირბილის დისტანცია?
- ტურისტების ჯგუფი ბანაკიდან ჩანჩქერამდე მიდიოდა 5 კმ/სთ სიჩქარით. ბანაკში დაბრუნებისას კი მოძრაობდნენ 4 კმ/სთ სიჩქარით და უკანა გზას მოანდომეს 30 წუთით მეტი დრო. იპოვეთ რა მანძილია ტურისტების ბანაკიდან ჩანჩქერამდე.

სავარჯიშოები

16. რა რიცხვები უნდა ჩავსვათ გამოტოვებულ ადგილას, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი?

- ა) $x^2 + 10x + \dots^2 = (x + \dots)^2$; ვ) $x^2 - 9x + \dots^2 = (x - \dots)^2$;
 ბ) $x^2 + 14x + \dots^2 = (x + \dots)^2$; ზ) $x^2 - 15x + \dots^2 = (x - \dots)^2$;
 გ) $x^2 - 4x + \dots^2 = (x - \dots)^2$; თ) $x^2 + x + \dots^2 = (x + \dots)^2$;
 დ) $x^2 + 12x + \dots^2 = (x + \dots)^2$; ი) $x^2 + \frac{3}{5}x + \dots^2 = (x + \dots)^2$;
 ე) $x^2 + 16x + \dots^2 = (x + \dots)^2$; კ) $x^2 - \frac{9}{4}x + \dots^2 = (x - \dots)^2$.

17. წარმოადგინეთ ნამრავლად

- ა) $8x + 40$; ე) $x^2 + 14x + 49$; ი) $x^3 - x^2$;
 ბ) $4x + 36x^2$; ვ) $x^2 + 9x + 14$; კ) $x^2 - 49$;
 გ) $8x^2 - 64$; ზ) $x^2 - 14x + 49$; ლ) $x^2 + 7x - 8$;
 დ) $4x^2 - 100$; თ) $x^2 + 19x - 20$; მ) $x^2 - 9x - 36$.

18. შეკვეთეთ წილადი:

- ა) $\frac{14ab}{21a^2}$; ბ) $\frac{5x^2y^3}{10x^2y^2}$; ვ) $\frac{56x^4y^3}{24x^2y^5}$;
 ბ) $\frac{a^2 - 25}{3a + 15}$; დ) $\frac{4x - 12y}{x^2 - 9y^2}$; კ) $\frac{4x - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

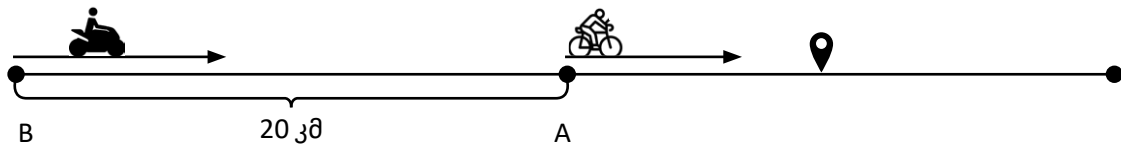
19. შეასრულეთ გამრავლება (გაყოფა):

- ა) $\frac{x^2 - 3x}{3y^3} \cdot \frac{6y^2}{5x}$; ბ) $\frac{a^2 + 2a}{5a} \cdot \frac{5 + 5a}{10 + 5a}$; გ) $\frac{a^2 + a^3}{12b^2} : \frac{5 + 5a}{5b^3}$.

20.  გამოწვევა: გაამარტივეთ გამოსახულება

- ა) $\left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$; ბ) $\frac{5x^2}{1 - x^2} : \left(1 - \frac{1}{1 - x}\right)$; გ) $\frac{p - q}{p} - \frac{7q}{p^2} \cdot \frac{p^2 - pq}{7q}$.

21. A და B პუნქტებიდან, ერთდროულად ერთი და იმავე მომართულებით, მოძრაობა დაიწყო ველოსიპედისტმა და მოტოციკლისტმა. A პუნქტიდან 10 კმ მანძილზე მოტოციკლისტი დაეწია ველოსიპედისტს. (იხ. ნახ 1) იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მოტოციკლისტის მოძრაობის სიჩქარე 18 კმ/სთ-ით მეტია ველოსიპედისტის სიჩქარეზე.



ნახატი 1

22. ფერმერს ყოველ დღე 80 ჰექტარი მიწის ნაკვეთი უნდა მოეხნა, რათა სამუშაო დაესრულებინა დაგეგმილ ვადაში. თუმცა მან შეძლო დღეში 10 ჰექტრით მეტი მიწა დაემუშავებინა, ამიტომ ვადაზე 1 დღით ადრე მას მოსახნავი ღარჩა 30 ჰექტარი მიწა. რამდენი ჰექტარი მიწა ჰქონდა მოსახნავი ფერმერს?

სავარჯიშოები



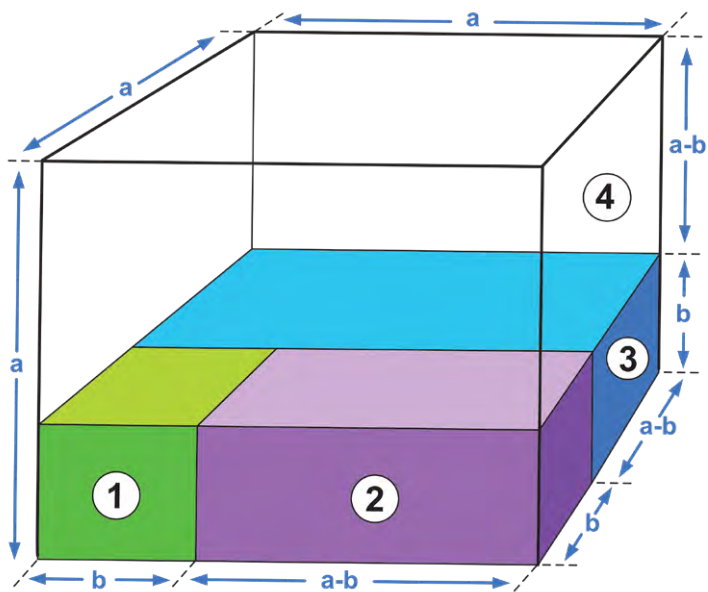
ჯგუფური აქტივობა



საკვლევი კითხვა:

დაადგინეთ როგორ არის შესაძლებელი $a^3 - b^3$ გამოსახულების ნამრავლად წარმოდგენა?

- 23. მოცემულია კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა a სმ, მასში მოთავსებულია პატარა კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა b სმ.
- 24. როგორც ხედავთ, სურათზე, მოცემული მთლიანი კუბის მოცულობა 4 ნაწილად არის დაყოფილი.
- 25. იპოვეთ თითოეული მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა.



ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე შეავსეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი, იპოვეთ თითოეული ნაწილის მოცულობა. შემდეგ დაადგინეთ რას უდრის $a^3 - b^3$

ნაწილი 1-ის მოცულობა	ნაწილი 2-ის მოცულობა	ნაწილი 3-ის მოცულობა	ნაწილი 4-ის მოცულობა
	$(a - b) \cdot b \cdot b$		

კვადრატული განტოლება

ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 76 მ^2 -ის ტოლია, როგორ ვიპოვოთ ოთახის გვერდების სიგრძეები?

შეადგინეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.



$$x^2 + 12x + 24$$

$$x^2 + 6x + 8$$

ვიცით, რომ ერთი ოთახის ფართობია $x^2 + 12x + 24$, ხოლო მეორე ოთახის $x^2 + 6x + 8$, რადგან ბინის სრული ფართობი 76 მ^2 -ია, მივიღებთ განტოლებას

$$x^2 + 12x + 24 + x^2 + 6x + 8 = 76$$

მსგავსი წევრების შეერთებით მივიღებთ, რომ

$$2x^2 + 18x + 32 = 76$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება კვადრატული განტოლება.

- როგორ ვიპოვოთ კვადრატული განტოლების ამონახსნები?

კვადრატული განტოლება

$ax^2 + bx + c = 0$ ტიპის განტოლებას, სადაც a, b, c ნამდვილი რიცხვებია, სადაც $a \neq 0$, ხოლო x არის ცვლადი, კვადრატული განტოლება ეწოდება.

a -ს ეწოდება განტოლების პირველი კოეფიციენტი, b -ს მეორე კოეფიციენტი, ხოლო c -ს თავისუფალი წევრი $ax^2 + bx + c = 0$ – ფორმით მოცემულ განტოლებას, კვადრატული განტოლების სტანდარტული ფორმა ეწოდება.

თუ $a = 1$ -ს, მიღებულ $x^2 + bx + c = 0$ განტოლებას, ეწოდება დაყვანილი კვადრატული განტოლება ან კვადრატული განტოლების კერძო შემთხვევა.

განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის კვადრატული განტოლება:

ჩვენ უკვე ვიცნობთ სხვადასხვა ტიპის კვადრატულ განტოლებებს, მაგალითად:

$$x^2 - 9 = 0; (x - 1)^2 = 0; (2x - 1)^2 = 9;$$

$(x - 1)(x + 2) = 0$ და სხვა; დავაკავშიროთ აღნიშნული კვადრატული განტოლებები სტანდარტულ ფორმასთან.



დაიმახსოვრეთ, როდესაც კვადრატულ განტოლებას წარმოვადგენთ სტანდარტული ფორმით, ტოლობის მარჯვენა მხარეს უნდა გვქონდეს 0.



ნიშნობა 1 – კვადრატული განტოლებების კავშირი სტანდარტულ ფორმასთან

კვადრატული განტოლება	კავშირი სტანდარტულ ფორმასთან $ax^2 + bx + c = 0$	a, b, c -ს მნიშვნელობები
$x^2 - 9 = 0$	$1 \cdot x^2 + 0x - 9 = 0$	$a = 1; b = 0; c = -9$
$2x^2 = 9$	$2x^2 - 9 = 0$ $2x^2 + 0x - 9 = 0$	$a = 2; b = 0; c = -9$
$2x^2 = 9x$	$2x^2 - 9x = 0$ $2x^2 - 9x + 0 = 0$	$a = 2; b = -9; c = 0$
$(x - 1)^2 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$a = 1; b = -2; c = 1$
$(3x + 1)^2 = 25$	$9x^2 + 6x + 1 = 25$ $9x^2 + 6x - 24 = 0$	$a = 9; b = 6; c = -24$
$(x - 1)(x + 2) = 0$	$x^2 + x - 2 = 0$	$a = 1; b = 1; c = -2$



ნიშნობა 2 – განვიხილოთ კვადრატული განტოლებების სხვადასხვა ნიმუშები

ა) $x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -3$ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი (ფესვი) შემოწმება $3^2 = 9 \quad (-3)^2 = 9$	ბ) $(x - 2)^2 - 9 = 0$ იგივეა, რაც $(x - 2)^2 = 9$ ამ შემთხვევაში ხარისხის ფუძე არის $(x - 2)$, შესაბამისად $x - 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ მივიღებთ, ორ წრფივ განტოლებას: $x - 2 = 3 \quad x - 2 = -3$ $x = 5 \quad x = -1$ გამოდის, რომ განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი, ფესვი $x_1 = 5$ და $x_2 = -1$ შემოწმება: $(5 - 2)^2 - 9 = 3^2 - 9 = 0$ $(-1 - 2)^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = 0$
---	--

$$\text{თუ } x^2 = k \text{ მაშინ } \begin{cases} x = \pm \sqrt{k}, \text{ როდესაც } k > 0 \\ x = 0, \text{ როდესაც } k = 0 \\ x = \emptyset, \text{ როდესაც } k < 0 \end{cases} \quad \text{არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში}$$

წულის თვისება/კვადრატული განტოლების ამოხსნა ნამრავლად წარმოდგენით

როგორც ვიცით, რომ ნამრავლი მაშინ არის 0-ის ტოლი, როდესაც ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც უდრის 0-ს.

თუ ვიცით, რომ $m \cdot n = 0$ -ს, ე.ი ან $m = 0$ ან $n = 0$



ნიმუში 3 — განვიხილოთ კვადრატული განტოლებების სხვადასხვა ნიმუში

ა) $(x - 1)(x + 2) = 0$

გამოვიყენოთ 0-ის წესი

$$(x - 1) = 0 \text{ ან } (x + 2) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ან} \quad x = -2$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

ბ) $2x^2 = 9x$

გავუტოლოთ მარჯვენა მხარე 0-ს

$$2x^2 - 9x = 0$$

წარმოვადგინოთ, ნამრავლის სახით

$$x \cdot (2x - 9) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ან} \quad 2x - 9 = 0$$

$$x = 4.5$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4.5$$

გ) $x^2 - 5x + 6 = 0$

როცა $a = 1$, თუ კვადრატული სამწევრი წარმოდგენა შესაძლებელია ნამრავლის სახით, წარმოვადგინოთ ნამრავლად:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$(x - 2) = 0 \quad \text{ან} \quad (x - 3) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ან} \quad x = 3$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

შემოწმება:

როცა $x_1 = 1$ მივიღებთ, რომ

$$(1 - 1)(1 + 2) = 0 \cdot 3 = 0$$

როცა $x_2 = -2$ მივიღებთ, რომ

$$(-2 - 1)(-2 + 2) = -3 \cdot 0 = 0$$

შემოწმება:

როცა $x_1 = 0$ მივიღებთ

$$2 \cdot 0^2 = 9 \cdot 0$$

$$0 = 0$$

როცა $x_2 = 4.5$, მივიღებთ

$$2 \cdot 4.5^2 = 9 \cdot 4.5$$

$$40.5 = 40.5$$

შემოწმება:

როცა $x_1 = 2$ მივიღებთ

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

$$4 - 10 + 6 = 0$$

როცა $x_2 = 3$, მივიღებთ

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

$$9 - 15 + 6 = 0$$

შემოწმების დროს შეგვიძლია ვისარგებლოთ ასევე ნამრავლად წარმოდგენილი ფორმით

4.2. კვადრატული განტოლების ამოხსნის პროცედურა

როდესაც მოცემულია კვადრატული განტოლება, მის ამოხსნელად დაიცავით შემდეგი ნაბიჯები:

ნაბიჯი 1:

საჭიროების შემთხვევაში მარჯვენა მხარე გაუტოლეთ ნულს (ტოლობის თვისებების გამოყენებით განათავსეთ წევრები ტოლობის ერთ მხარეს).

ნაბიჯი 2:

თუ შესაძლებელია მიღებული გამოსახულების ნამრავლად წარმოდგენა, წარმოადგინეთ ნამრავლად.

ნაბიჯი 3:

ნულის თვისების გამოყენებით ამოხსენით განტოლება.

ნაბიჯი 4:

შეამოწმეთ განტოლების ფესვები.

სიტუაციის მოდელირება კვადრატული განტოლებით

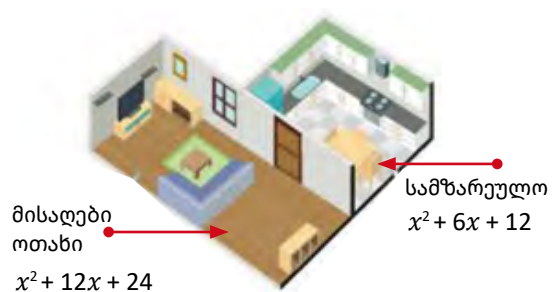


ნიმუში 4

განვიხილოთ პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანა და დავადგინოთ თითოეული ოთახის ფართობი, ასევე გვერდების სიგრძეები:

ჩვენ ვიცით, რომ ბინის სრული ფართობი შეადგენს 76 მ^2 -ს და ჩაწერეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$$2x^2 + 18x + 32 = 76$$



ამოვსნათ განტოლება:

$$2x^2 + 18x + 32 - 76 = 0$$

$$2x^2 + 18x - 44 = 0$$

$$2(x^2 + 9x - 22) = 0$$

ჩვენ ვიცით, რომ ნამრავლი მაშინ არის 0-ის ტოლი, როდესაც ერთ-ერთი თანამამრავლია 0, ვიცით, რომ $2 \neq 0$ -ს, შესაბამისად, მივიღებთ

$$x^2 + 9x - 22 = 0 \text{ (ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია } -22, \text{ ჯამი } 9);$$

$$\begin{array}{l} -2 + 11 = 9 \\ (-2) \cdot 11 = -22 \end{array}$$





ტოლობის მარცხენა მხარეს მოცემული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლად:

$$(x - 2)(x + 11) = 0$$

$$(x - 2) = 0 \text{ ან } (x + 11) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ან} \quad x = -11$$

$$x_1 = 2 \quad \text{ან} \quad x_2 = -11$$

მივიღეთ ორი ამონახსნი (ფესვი), გამომდინარე იქიდან, რომ ოთახის გვერდის სიგრძე ვერ იქნება უარყოფითი რიცხვი, გამოდის, რომ ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს ერთი ფესვი: $x_1 = 2$

დავადგინოთ თითოეული ოთახის ფართობი:

ა) მისაღები ოთახის ფართობი იქნება

$$x^2 + 12x + 24 = 2^2 + 12 \cdot 2 + 24 = 4 + 24 + 24 = 52 \text{ მ}^2$$

ბ) სამზარეულოს ფართობი იქნება:

$$x^2 + 6x + 8 = 2^2 + 6 \cdot 2 + 8 = 4 + 12 + 8 = 24 \text{ მ}^2$$

ან სამზარეულოს ფართობი შეგვიძლია ვიპოვოთ, თუ სრულ ფართობს გამოვაკლებთ მისაღები ოთახის ფართობს: $76 \text{ მ}^2 - 52 \text{ მ}^2 = 24 \text{ მ}^2$

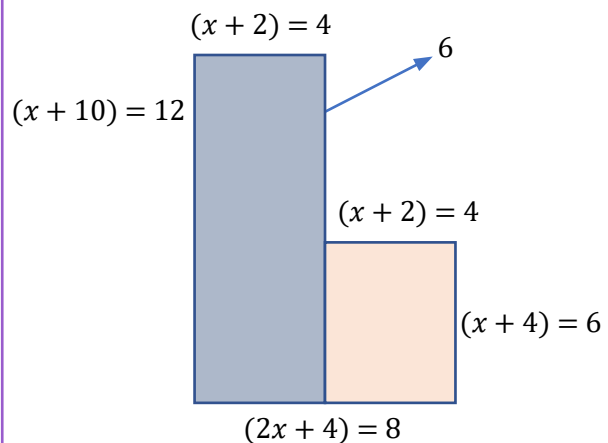
დავადგინოთ ოთახის თითოეული გვერდის სიგრძე:

თითოეული ოთახის ფართობის გამოსათვლელი კვადრატული სამწევრი წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით, მივიღებთ:

$$x^2 + 12x + 24 = (x + 2)(x + 10)$$

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

შევუსაბამოთ აღნიშნული ინფორმაცია ნახაზს, ჩავსვათ x -ის მნიშვნელობა და დავადგენთ თითოეული გვერდის სიგრძეს.





ნიშნობა 5 – ამოცანის ამოხსნა ცვლადის შემოტანით

იპოვეთ ორი რიცხვი, თუ ვიცით, რომ ერთი მეორეზე 5-ით მეტია და მათი ნამრავლი უდრის 84-ს.

მსჯელობა:

ვთქვათ, ერთი რიცხვია x ,

მაშინ, მეორე რიცხვი იქნება $(x + 5)$

რადგან ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ვიცით, რომ მათი ნამრავლი უდრის 84-ს, მივიღებთ განტოლებას:

$$x(x + 5) = 84$$

$$x^2 + 5x - 84 = 0$$

როდესაც კვადრატული სამწევრის პირველი კოეფიციენტი $a = 1$ -ს, კვადრატული სამწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ ნამრავლად შემდეგი წესით:

$$x^2 + 5x - 84 \text{ (ვიპოვოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლია } -84, \text{ ჯამი } 5);$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ -7 + 12 = 5 & (-7) \cdot 12 = -84 \end{array}$$

რადგან კვადრატული სამწევრის წარმოდგენა შესაძლებელია ნამრავლად, კვადრატულ განტოლებაში ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოვადგინოთ ნამრავლად და ამოვხსნათ ნულის თვისებით:

$$(x - 7)(x + 12) = 0$$

$$(x - 7) = 0 \quad \text{ან} \quad (x + 12) = 0$$

$$x = 7 \quad \text{ან} \quad x = -12$$

თუ ერთი რიცხვი არის 7, მაშინ მასზე 5-ით მეტი იქნება 12;

ხოლო თუ ჩვენ მიერ ადებული რიცხვი არის -12 , მაშინ მასზე მეტი იქნება $-12 + 5 = -7$;

შესაბამისად, ამოცანას აკმაყოფილებს რიცხვთა ორი წყვილი:

5 და 12; ასევე -12 და -7



სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემულია კვადრატული განტოლებები, დააკავშირეთ თითოეული განტოლება სტანდარტულ ფორმასთან. ამოწმეთ თითოეული შემთხვევისთვის a , b , c -ს მნიშვნელობები:

მინიმუმია: იხილეთ **ნიმუში 1**

ა) $x^2 - 5x + 1 = 0$;	დ) $(x - 6)^2 = 0$;	ზ) $-x^2 + 5x + 3 = 0$;
ბ) $2x^2 + 3x = 0$;	ე) $(2x + 3)^2 = 0$;	თ) $(x - 5)(x + 1) = 0$;
გ) $-2x^2 = 5$;	ვ) $(x + 1)^2 = 5$;	ი) $x(x + 7) = 0$.

2. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x^2 = 100$;	დ) $8x^2 = 16$;	ზ) $4 - 2x^2 = 12$;	კ) $12x^2 = 0$;
ბ) $8x^2 = 72$;	ე) $4x^2 = 100$;	თ) $x^2 - 3 = 0$;	ლ) $4x^2 + 2 = 10$;
გ) $3x^2 - 3 = 26$;	ვ) $3x^2 = -45$;	ი) $4x^2 = 32$;	მ) $5x^2 + 10 = 0$.

3. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $(x + 1)^2 = 9$;	დ) $(x - 2)^2 = 5$;	ზ) $(2x + 5)^2 = 0$;
ბ) $(x + 4)^2 = 16$;	ე) $(2x - 7)^2 = -16$;	თ) $(3x + 1)^2 = 4$;
გ) $(x - 2)^2 = -1$;	ვ) $(x - 5)^2 = 0$;	ი) $\frac{1}{3}(2x + 3)^2 = 2$.

4. ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x(x - 5) = 0$;	ე) $-2(x + 1) = 0$;	ი) $-6(x - 2)(3x + 1) = 0$;
ბ) $2(x + 3) = 0$;	ვ) $4(x + 6)(2x - 3) = 0$;	კ) $x^2 = 0$;
გ) $(2x + 1)(x - 3) = 0$;	ზ) $(2x + 1)(2x - 1) = 0$;	ლ) $4(5 - x)^2 = 0$;
დ) $3(4 - x) = 0$;	თ) $11(x + 3)(x - 5) = 0$;	მ) $-3(3x - 6)^2 = 0$.

5. ამოხსენით განტოლებები ნულის თვისების გამოყენებით/ნამრავლად წარმოდგენის წესით:

ა) $(x + 2)^2 = 0$;	დ) $x^2 + 5x + 6 = 0$;	ზ) $x^2 + 9x + 14 = 0$;	კ) $x^2 + 4x = 12$;
ბ) $x^2 + 3x + 2 = 0$;	ე) $x^2 - 5x + 6 = 0$;	თ) $x^2 + 11x = -30$;	ლ) $x^2 = 11x - 24$;
გ) $x^2 - 3x + 2 = 0$;	ვ) $x^2 + 7x + 6 = 0$;	ი) $x^2 + 2x = 15$;	მ) $x^2 = 14x - 49$.

6. ამოხსენით კვადრატული განტოლება ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდით:

ა) $x^2 + 9x + 20 = 0$;	დ) $x^2 + x = 12$;	ზ) $x^2 = x + 6$;	კ) $10 - 3x = x^2$;
ბ) $x^2 + 11x + 28 = 0$;	ე) $x^2 + 6 = 5x$;	თ) $x^2 = 7x + 60$;	ლ) $x^2 + 12 = 7x$;
გ) $x^2 + 2x = 8$;	ვ) $x^2 + 4 = 4x$;	ი) $x^2 = 3x + 70$;	მ) $9x + 36 = x^2$.

7. იპოვეთ რიცხვი, თუ ამ რიცხვისა და მისი კვადრატის ჯამია 110.

8. რიცხვისა და 4-ით გაზრდილი ამ რიცხვის ნამრავლია 32. იპოვეთ ამ რიცხვის ორი შესაძლო მნიშვნელობა.

9. თუ რიცხვის კვადრატს გამოვაკლებთ 24-ს, მივიღებთ ადებულ რიცხვზე 5-ჯერ მეტ რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვი.

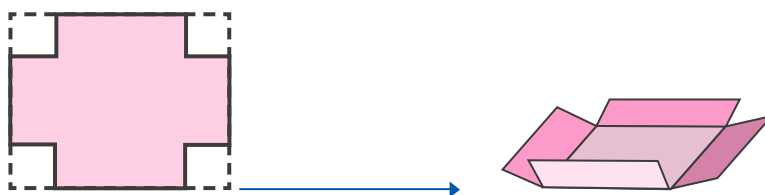
10. მართკუთხედის სიგრძე 4 სმ-ით მეტია მის სიგანეზე. იპოვეთ სიგანე, თუ მართკუთხედის ფართობი 96 სმ²-ია.

მინიმუმია: $-96 = -8 \cdot 12$ ასევე $-96 = 8 \cdot (-12)$

11. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 2-ით მეტია, იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი 80 სმ²-ია.

სავარჯიშოები

12. მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 5-ით მეტია, იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, თუ ვიცით, რომ მართკუთხედის ფართობი 84 სმ^2 -ია.
13. სამკუთხედის გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 2-ით მეტია, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის ფართობი 12 სმ^2 -ია.
 **შედეგი:** სამკუთხედის ფართობი გვერდის და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევარს უდრის.
14. სამკუთხედის გვერდი მასზე დაშვებულ სიმაღლეზე 5-ით ნაკლებია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი და მასზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის ფართობი 18 სმ^2 -ია.
 **შედეგი:** სამკუთხედის ფართობი გვერდის და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევარს უდრის.
15.  **გამოწვევა:** მართკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ -ია, ფართობი 35 სმ^2 -ია. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.
16.  **გამოწვევა:** მართკუთხედის პერიმეტრი 32 სმ -ია, ფართობი 55 სმ^2 -ია. იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე.
17.  **გამოწვევა:** მართკუთხა ფორმის ბაღი შემოღობილია 60 მ სიგრძის ღობით. ბაღის ფართობია 216 მ^2 . იპოვეთ შემოღობილი ბაღის განზომილებები.
18. მართკუთხა ფორმის ეზო შემოღობილია 80 მ სიგრძის ღობით. ეზოს ფართობია 300 მ^2 . იპოვეთ შემოღობილი ეზოს განზომილებები.
19.  **გამოწვევა:** მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლისაგან, რომლის სიგრძე და სიგანე შესაბამისად 20 სმ და 16 სმ -ია, თავლია ყუთი დაამზადეს ისე, რომ ამ ფურცლის კუთხეებში ამოჭრილია ტოლი კვადრატები და დარჩენილი ნაპირები გადაკეცილია. ყუთის ფუძის ფართობია 140 სმ^2 . რა ზომისაა ამოჭრილი კვადრატების გვერდი? რა იქნება მიღებული ფიგურის მოცულობა?



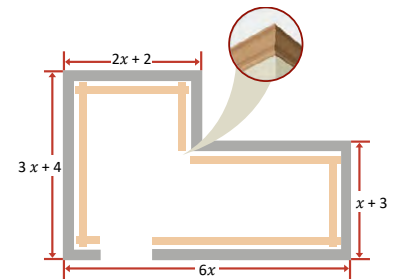
20. მართკუთხა ფორმის საცურაო აუზი, რომლის სიგრძე 10 მ და სიგანე 8 მ -ია, ერთნაირი სიგანის ბილიკითაა შემოვლებული. ბილიკის ფართობი საცურაო აუზის ფართობის $\frac{1}{2}$ -ია.
 - აჩვენეთ რომ თუ ბილიკის სიგანეა $x \text{ მ}$, მაშინ ბილიკის ფართობი გამოითვლება $4x^2 + 36x \text{ მ}^2$ გამოსახულებით;
 - შემდეგ აჩვენეთ, რომ $4x^2 + 36x - 40 = 0$;
 - იპოვეთ ბილიკის სიგანე.
21. ფერმერს სურს ბოსტანს, რომელსაც მართკუთხედის ფორმა აქვს, შემოავლოს ახალი ღობე. რა სიგრძის იქნება ღობე, თუ ცნობილია რომ ბოსტნის ერთი გვერდი 10 მ -ით მეტია მეორეზე და მისი ფართობია 600 მ^2 .

სავარჯიშოები

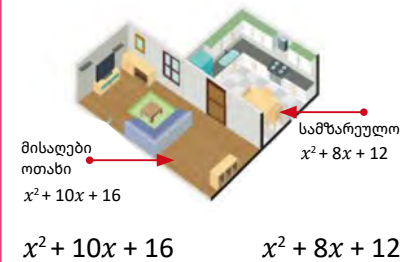
22. მუყაოს ფურცელს, რომელსაც კვადრატის ფორმა ჰქონდა, ჩამოაჭრეს 2 სმ სიგანის ზოლი. იპოვეთ ფურცლის თავდაპირველი ზომა, თუ დარჩენილი ნაწილის ფართობი 80 სმ²-ის ტოლია.
23. მართკუთხედის ფორმის ფიცრის ფართობი ტოლია 10 500 სმ². ფიცარი გაჭრეს ორ ნაწილად, რომელთაგან ერთს კვადრატის ფორმა აქვს, მეორეს – მართკუთხედის. იპოვეთ მიღებული კვადრატის გვერდი, თუ ჩამოჭრილი მართკუთხედის სიგრძეა 80 სმ.

24.

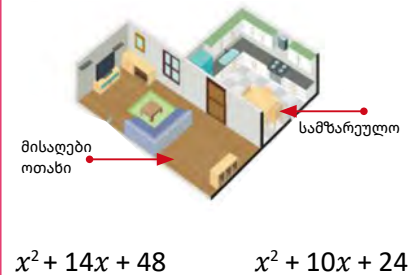
ა) ნახაზზე მოცემული ფიგურის პერიმეტრი 120 სმ-ია, იპოვეთ გვერდების სიგრძეები და ფიგურის ფართობი.



ბ) ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 72 მ²-ის ტოლია. იპოვეთ ოთახების გვერდების სიგრძეები, ასევე დაადგინეთ თითოეული ოთახის ფართობი.



გ) ნახაზზე მოცემული ბინის ფართობი 200 მ²-ის ტოლია. იპოვეთ ოთახების გვერდების სიგრძეები, ასევე დაადგინეთ თითოეული ოთახის ფართობი.



25. წინარე მასალის გამოყენება რა რიცხვი უნდა ჩავსვათ *-ის ნაცვლად, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი?

ა) $x^2 + 14x + * = (x + 7)^2$

ბ) $x^2 - 8x + * = (x - 4)^2$

გ) $x^2 + 2x + * = (x + *)^2$

დ) $x^2 + 14x + * = (x + *)^2$

ე) $x^2 - 4x + * = (x - *)^2$

ვ) $x^2 - 5x + * = (x - *)^2$

26. წინარე მასალის გამოყენება გაიხსენეთ რას ეწოდება ტოლფასი განტოლებები? მოიყვანეთ ტოლფასი განტოლებების ნიმუშები.

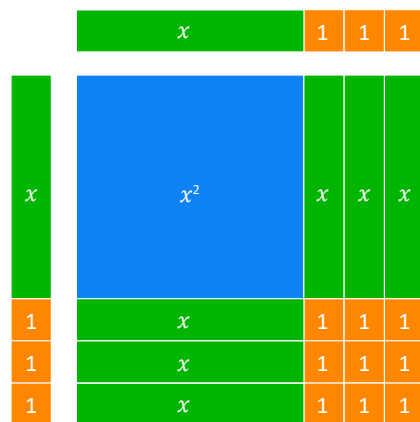
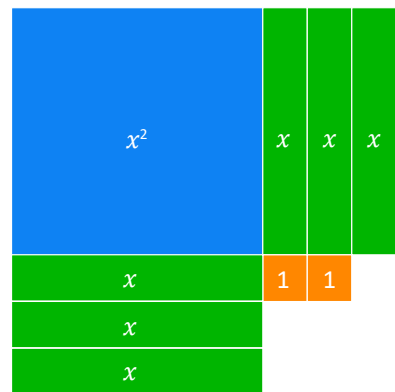
4.3. კვადრატული განტოლების ამოხსნა სრულ კვადრატად შევსებით

ჩვენ უკვე ვისწავლეთ, როგორ ხდება გარდაქმნებით ალგებრულ გამოსახულებაში სრული კვადრატის გამოყოფა.

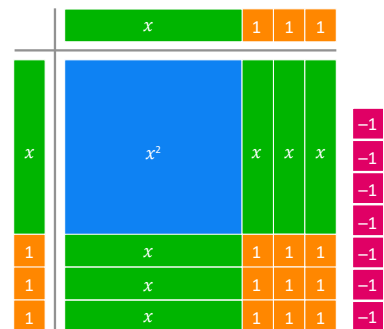
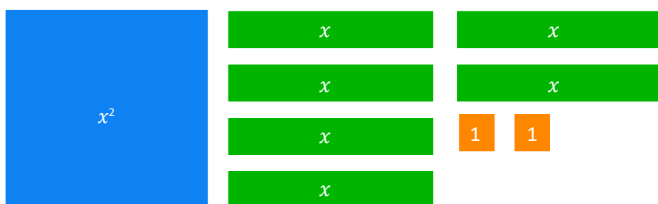


ნიმუში 1 – კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფა, ვიზუალური წარმოდგენა

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x + 2 &= \\
 \text{ვიცით, რომ} \\
 (a + b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
 x^2 + 2 \cdot 3x + 2 &= \\
 x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 2 &= \\
 (x + 3)^2 - 7
 \end{aligned}$$



$$x^2 + 6x + 2 = (x + 3)^2 - 7$$





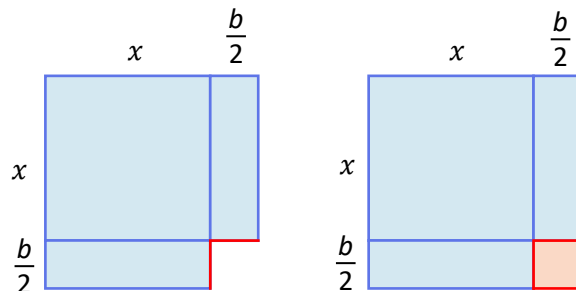
მათემატიკის მოყვარულთათვის

განვიხილოთ ზოგადი ფორმა

ნახაზზე მოცემულია ფიგურა:

ა) დავადგინოთ მოცემული ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x = x^2 + bx$$



თუ ნახაზზე მოცემულ ფიგურას შევავსებთ კვადრატამდე, მაშინ მისი ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

საწყის გამოსახულებაზე $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ წევრის დამატებით შესაძლებელი გახდა სამწევრის სრულ კვადრატამდე შევსება და შესაბამისი გამოსახულების ჩაწერა; გამოსახულებას ვუმატებთ და ვაკლებთ ერთი და იმავე $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ წევრს, რადგან საწყისი გამოსახულება და საბოლოო იყოს ერთმანეთის ტოლი. აღნიშნულ პროცესს ეწოდება ალგებრული გამოსახულების გარდაქმნა.



საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება აღნიშნული გარდაქმნის გამოყენება კვადრატული განტოლების ამოხსნაში?

ჩვენ განვიხილეთ კვადრატული განტოლების ამოხსნა სხვადასხვა გზით, მათ შორის ნულის თვისებით. ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ჩვენთვის ცნობილი ალგორითმით კვადრატული სამწევრის ნამრავლად წარმოდგენა. სწავლების პროცესში შეგხვდებათ განტოლებები, რომლის წარმოდგენა ნამრავლად რთული იქნება; მაგალითად: $x^2 + 5x - 1 = 0$; $x^2 + 6x - 3 = 0$; $2x^2 + 6x - 9 = 0$; მსგავსი განტოლებების ამოხსნისთვის შემუშავებულია სხვა ალგორითმები, რომელსაც გავეცნობით ქვემოთ.

განვიხილოთ კვადრატული განტოლების ამოხსნის ახალი მეთოდი: **კვადრატული განტოლების ამოხსნა სრულ კვადრატამდე შევსებით.**

გაგრძელება



ნაბიჯი 1:

ვიცით, როგორ ამოვხსნათ განტოლება:

$$(x+3)^2 - 12 = 0$$

$$(x+3)^2 = 12$$

$$(x+3) = \pm\sqrt{12}$$

$$(x+3) = \sqrt{12} \quad \text{ან} \quad (x+3) = -\sqrt{12}$$

$$x = -3 + \sqrt{12} \quad \text{ან} \quad x = -3 - \sqrt{12}$$

$$x_1 = -3 + 2\sqrt{3}; \quad x_2 = -3 - 2\sqrt{3}$$

შეგახსენებთ, რომ:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

მოცემულ განტოლებას აქვს ორი ირაციონალური ფესვი.

ნაბიჯი 2:

განვიხილოთ იგივე $(x+3)^2 = 12$ განტოლება: მოცემულ განტოლებაში გავხსნათ ფრჩხილი და ჩავწეროთ განტოლება სტანდარტული ფორმით:

$$(x+3)^2 = 12$$

$$x^2 + 6x + 9 = 12$$

$$x^2 + 6x + 9 - 12 = 0$$

$$x^2 + 6x - 3 = 0$$

ზეპირად გავიჭირდება ვნახოთ ორი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი -3 -ია, ხოლო ჯამი 6 .

მაგრამ თუ წავალთ **შებრუნებული გზით** და სტანდარტული ფორმიდან გამოვყოფთ სრულ კვადრატს, მაშინ მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამოხსნა უკვე შეგვიძლია.



საკვანძო კითხვა: როგორ გამოვყოთ კვადრატული განტოლების სტანდარტული ფორმიდან სრული კვადრატი?

ნაბიჯ-ნაბიჯ გარდაქმნებით სტანდარტული ფორმიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი.

მოცემულია განტოლება:

$$x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x^2 + 6x = 3 \quad \text{დავუმატოთ ტოლობის ორივე მხარეს } 3^2 = 9$$

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 3 + 3^2$$

$$(x+3)^2 = 12$$



ნიმუში 2 – განვიხილოთ შედარებით რთული ნიმუშები

ა) $x^2 + 5x - 1 = 0$

$$x^2 + 5x = 1$$

$$2 \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 2.5$$

რა რიცხვი უნდა მივუმატოთ $x^2 + 5x$ -ს, რომ მივიღოთ სრული კვადრატი?

$$x^2 + 2 \cdot 2.5x + 2.5^2 = 1 + 2.5^2$$

$$(x+2.5)^2 = 7.25$$

ა) $2x^2 + 6x - 9 = 0$

მოცემულ შემთხვევაში

$$a = 2, \quad b = 6, \quad c = -9$$

გავიტანოთ 2 ფრჩხილს გარეთ, მივიღებთ

$$2(x^2 + 3x - 4.5) = 0$$

რადგან $2 \neq 0$, მაშინ

$$x^2 + 3x - 4.5 = 0$$





$$x + 2.5 = \pm\sqrt{7.25}$$

$$x + 2.5 = \sqrt{7.25} \quad \text{ან} \quad x + 2.5 = -\sqrt{7.25}$$

$$x = -2.5 + \sqrt{7.25} \quad \text{ან} \quad x = -2.5 - \sqrt{7.25}$$

განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი (ფესვი)

$$x_1 = -2.5 + \sqrt{7.25}$$

$$x_2 = -2.5 - \sqrt{7.25}$$

მივიღეთ საწყისი განტოლების ტოლფასი განტოლება, რომელსაც ამოვხსნით სრულ კვადრატამდე შევსების მეთოდით:

$$x^2 + 3x = 4.5$$

$$x^2 + 2 \cdot 1.5x + 1.5^2 = 4.5 + 1.5^2$$

$$(x + 1.5)^2 = 6.75$$

$$x + 1.5 = \pm\sqrt{6.75}$$

$$x + 1.5 = \sqrt{6.75} \quad \text{ან} \quad x + 1.5 = -\sqrt{6.75}$$

$$x = -1.5 + \sqrt{6.75} \quad \text{ან} \quad x = -1.5 - \sqrt{6.75}$$

განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი

$$x_1 = -1.5 + 1.5\sqrt{3}$$

$$x_2 = -1.5 - 1.5\sqrt{3}$$

 **შენიშვნა:** $\sqrt{6.75} = \sqrt{2.25 \cdot 3} = 1.5\sqrt{3}$

STEAM-კავშირი ინტეგრირებულ მოდულთან



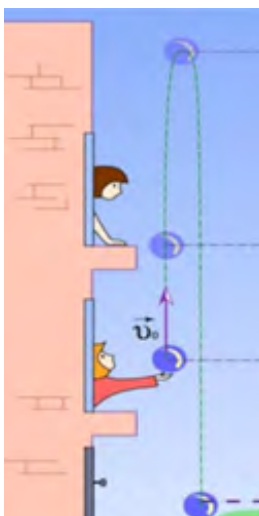
ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ არ გავითვალისწინებთ ჰაერის წინააღმდეგობას, ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის სიმაღლე დამოკიდებულია დროზე (t -ზე) და გამოითვლება ფორმულით:

$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$, სადაც h_0 - სხეულის მდებარეობის საწყისი სიმაღლეა, v_0 - საწყისი სიჩქარე, ხოლო g - თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, რომელიც $g \approx 9.8 \frac{მ}{წმ^2}$, ჩვენ შემთხვევაში დავამრგვალოთ ერთეულამდე სიზუსტით და ჩავთვალოთ, რომ $g \approx 10 \frac{მ}{წმ^2}$



ნიმუში 3

სხეული 2 მ სიმაღლიდან აისროლეს ვერტიკალურად ზემოთ $50 \frac{მ}{წმ}$ საწყისი სიჩქარით. რამდენ წამში აღმოჩნდება ის 82 მ სიმაღლეზე?



ამოცანის პირობის თანახმად $h_0 = 2 \text{ მ}$ $v_0 = 50 \frac{მ}{წმ}$

$h = 82 \text{ მ}$. თავისუფალი ვარდნის აჩქარება $g \approx 10 \frac{მ}{წმ^2}$; ჩავსვათ მონაცემები ფორმულაში: $82 = 2 + 50t - 5t^2$

$5t^2 - 50t + 80 = 0$ (განტოლების ორივე მხარე გავყოთ 5-ზე)

$t^2 - 10t + 16 = 0$ (გამოვყოთ სრული კვადრატი)

$t^2 - 2 \cdot 5t + 25 = -16 + 25$

$(t - 5)^2 = 9$

$t - 5 = 3$

$t = 8(\text{წმ})$

$t - 5 = -3$

$t = 2(\text{წმ})$

დაფიქრდი და უპასუხე კითხვებს:

- როგორ არის შესაძლებელი, რომ სხეული ერთი და იმავე სიმაღლეზე იყოს როგორც 2 წმ-ის ისე 8 წმ-ის შემდეგ?
- შეგიძლია განსაზღვრო სხეული მაქსიმალურ სიმაღლეს რამდენ წამში მიაღწევს?
- რა მაქსიმალურ სიმაღლეს მიაღწევს სხეული?



სავარჯიშოები

1. ამოხსენით კვადრატული განტოლებები:

ა) $(2x - 3)^2 = 16$; დ) $(3x + 5)^2 = 0$; ზ) $(2x - 4)^2 = 12$;

ბ) $(1 - 2x)^2 = 2\frac{1}{4}$; ე) $(5x - 2)^2 = 40$; თ) $x(x - 4) = 0$;

გ) $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 = 6\frac{1}{4}$; ვ) $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$; ი) $\left(x - \frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

2. ამოხსენით განტოლება, აგრეთვე დაამრგვალეთ პასუხი მეასედამდე:

ა) $x^2 + x - 3 = 0$; თ) $x^2 + 11x + 5 = 0$; ჰ) $x^2 + 3x = 5$;

ბ) $x^2 + 10x - 5 = 0$; ი) $x^2 + 4x + 1 = 0$; ქ) $x^2 + 9x + 3 = 0$;

გ) $x^2 + 2x - 4 = 0$; კ) $x^2 - 12x + 1 = 0$; ლ) $x^2 + 5x = -2$;

დ) $2x^2 + x - 12 = 0$; ლ) $x^2 + 7x = 3$; ს) $x^2 + 9x + 3 = 0$;

ე) $x^2 - 5x + 1 = 0$; მ) $x^2 - 11x = -5$; ტ) $2x^2 - 8x + 1 = 0$;

ვ) $x^2 + 3x + 2 = 0$; ნ) $x^2 + 3x - 5 = 0$; უ) $x^2 - 4x - 2 = 0$;

ზ) $x^2 - 5x + 4 = 0$; ი) $x^2 + 5x + 4 = 0$; ფ) $x^2 + 2x + 1 = 0$.



დავალებები

3.

დავუშვათ ბურთის ვისკრით 15 მ/წმ სიჩქარით 120 მეტრის სიმაღლის კორპუსის სახურავიდან ნახაზზე მოცემული მიმართულებით. t დროის შემდეგ ბურთი დაშორებული იქნება მიწიდან h სიმაღლით, დროის სიმაღლეზე დამოკიდებულება მოცემულია შემდეგი ფორმულით:

$$h = 128 + 16t - 5t^2$$

ა) რამდენი წამის შემდეგ იქნება ბურთი მიწიდან 30 მეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე იქნება ბურთი მიწიდან 2 მეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე დაეცემა ბურთი დედამიწაზე?





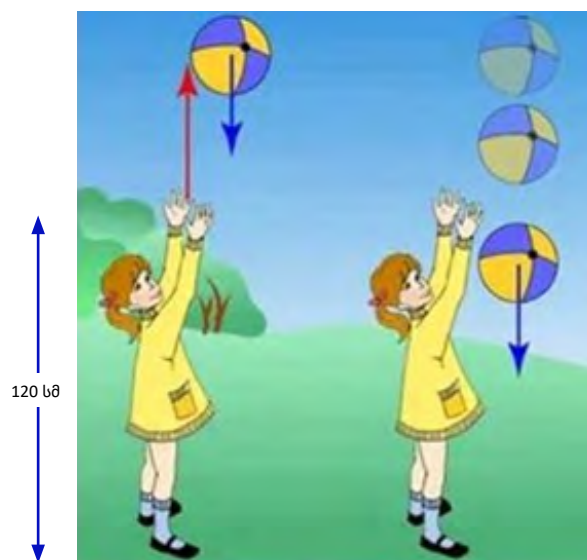
სავარჯიშოები

4.

მარინა თამაშობდა ბურთით. აისროლა ბურთი ზემოთ 10 მ/წმ სიჩქარით, ვერ დაიჭირა და დაუვარდა მიწაზე. ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის სიმაღლის გამოსათვლელი ფორმულით $h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ დაწერე t წამის შემდეგ მარინას ბურთის სიმაღლის გამოსათვლელი ფორმულა და იპოვე:

ა) რამდენი წამის მერე იქნება ბურთი მიწიდან 150 სანტიმეტრის სიმაღლეზე?

ბ) რამდენი წამის მერე დაეცემა ბურთი დედამიწაზე?

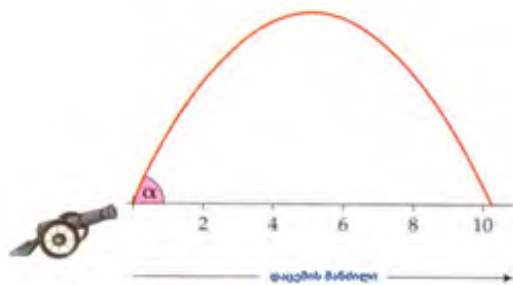


5.

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ როდესაც კუთხით გავისვრით, სხეულის გასროლის ადგილიდან დაშორება გამოითვლება ფორმულით:

$$D = \frac{v^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

სადაც D (distance) – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v არის სხეულის საწყისი სიჩქარე, α – გასროლის კუთხე, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება.



ა) იპოვეთ სად დაეცემა სხეული, თუ გასროლის სიჩქარე იყო 20 მ/წმ, ხოლო გასროლის კუთხე 15° (შეგახსენებთ $\sin 2 \cdot 15 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)

ბ) თუ ვიცით, რომ სხეული გასროლის შემდეგ დაეცა 24 მეტრის მოშორებით, დაადგინეთ რა სიჩქარით იყო გასროლილი? თუ გასროლის კუთხე იყო 15° (შეგახსენებთ $\sin 2 \cdot 15 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$).



სავარჯიშოები

6.

მატარებელმა, რომლის სიჩქარე იყო 20 მ/წმ, დაიწყო მოძრაობა თანაბარი 8 მ/წმ² აჩქარებით. დაწერეთ თანაბრაჩქარებული მოძრაობის დროს გავლილი მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა. იპოვეთ თანაბრაჩქარებული მოძრაობის დაწყებიდან რამდენ წამში გაივლის მატარებელი 3000 მ-ს.

(გამოიყენეთ ფიზიკის კურსიდან ცნობილი ფორმულა $S = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, სადაც v_0 საწყისი სიჩქარეა, a აჩქარება).



7.

გამოწვევა: გაამარტივეთ გამოსახულებები

I შეკვეცე წილადი:

ა) $\frac{a^2 - 36}{a^2 - 12a + 36}$; ბ) $\frac{x^2 + x - 6}{3x^2 - 6x}$; ე) $\frac{m^2 + 8m + 16}{3mn^2 + 12n}$;

ბ) $\frac{n^2 + 6n - 27}{n^2 - 81}$; დ) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 2x - 8}$; ვ) $\frac{y^2 - 8y + 15}{y^2 + 2x - 35}$.

II შეასრულე გამრავლება (გაყოფა):

ა) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3x} \cdot \frac{2x - 6}{5x^2 - 5xy}$; ბ) $\frac{m^2 + 10m + 25}{2m - 8} \cdot \frac{m^2 - 16}{5m + 10}$; ე) $\frac{9x^2 - 25y^2}{x^2 - 12x + 36} \cdot \frac{x^2 - 4x - 12}{15x^2 - 25xy}$;

ბ) $\frac{2a^3 - a^2b}{27b^2} : \frac{2a - b}{9b^3}$; დ) $\frac{2ab^3}{6 - 6a} : \frac{a^3b^3}{a^2 - 2a + 1}$; ვ) $\frac{4m^2 - 25}{m^2 + 3m - 28} : \frac{2m + 5}{4m^2 - 16m}$.

III შეასრულეთ მოქმედება:

ა) $\frac{4m}{m - n} + \frac{4n}{n - m}$; ბ) $\frac{4x + 3}{6x} + \frac{x - 2}{6x}$; ე) $3x \frac{4 - 9x^2}{3x}$; ზ) $\frac{a^2}{x^2 - ax} - \frac{x}{x - a}$;

ბ) $\frac{7a}{a^2 - 9} - \frac{6a - 3}{a^2 - 9}$; დ) $\frac{p - 2q}{pq^2} - \frac{2q - p}{p^2q}$; ვ) $\frac{2y^2 - 1}{y} - y + 5$; თ) $\frac{2}{m^2 + mn} + \frac{2}{mn + n^2}$.

8.

გამოწვევა: გაამარტივეთ:

ა) $\frac{2x + y}{2x^2 - xy} - \frac{16x}{4x^2 - y^2} - \frac{2x - y}{2x^2 + xy}$;

ბ) $\frac{x^2 - 9x - 22}{5x^3 - 20x} \cdot \frac{-x^2 + 4x - 4}{3x^2 - 33x}$;

ბ) $(9a^2 - 4b^2) : \frac{9a^2 + 12ab + 4b^2}{2}$;

დ) $\left(\frac{5a^2 - 15ab}{a^2 - 9b^2} - \frac{3ab + 9b^2}{a^2 + 6ab + 9b^2} \right) : \left(\frac{5}{b} - \frac{3}{a} \right)$.

4.4. კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტის მეშვეობით

ეს საინტერესოა!

ფრანცის ვიეტა იყო მე-16 საუკუნის ფრანგი პოლიტიკოსი, რომელმაც წარმატებული პოლიტიკური კარიერის შემდეგ მათემატიკოსად გააგრძელა მოღვაწეობა და გახდა ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი ფრანგი მათემატიკოსი. ვიეტამ სხვა რიგის განზოგადებები შემოიტანა ალგებრაში, ის იყო პირველი, რომელმაც წარმოადგინა კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა: $ax^2 + bx + c = 0$, სადაც a, b, c ნამდვილი რიცხვებია $a \neq 0$, ხოლო x ცვლადი.

ვიეტამდე კვადრატული განტოლებები იწერებოდა მხოლოდ რიცხვებით, მაგალითად:

$2x^2 - 5x + 1 = 0$ ან $-x^2 + 8x + 4 = 0$ და იხსნებოდა უმეტესად სრულ კვადრატამდე შევსებით.

$ax^2 + bx + c = 0$ – ჩანაწერით, გამომდინარე იქიდან თუ რა იქნება a, b, c , სადაც $a \neq 0$, იგულისხმება ყველა შესაძლო კვადრატული განტოლება. ამიტომ აღნიშნულ ჩანაწერს კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა ეწოდება.



მას შემდეგ, რაც ვიეტამ წარმოადგინა კვადრატული განტოლების ზოგადი ფორმა, $ax^2 + bx + c = 0$, შესაძლებელი გახდა კვადრატული განტოლების ამოხსნის ალგორითმის შემუშავება.

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ შეიძლება სრული კვადრატის შევსების მეთოდით განტოლების ამოხსნა. ასევე, როგორ დავადგინოთ აღნიშნული მეთოდის გამოყენებით ნებისმიერი კვადრატული განტოლების ფესვების საპოვნელი ალგორითმი.

იმისათვის, რომ პროცესი იყოს მეტად აღქმადი, ნაცნობ მაგალითზე განვიხილოთ პროცედურები ნაბიჯ-ნაბიჯ, პარალელურად კი ზოგად ცვლადებში.

 **მინიშნება:** აღნიშნული აქტივობა არ არის სავალდებულოდ სასწავლო.



მათემატიკის მოყვარულთათვის:

	კონკრეტული კვადრატული განტოლება	კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტით
	$2x^2 + 12x - 6 = 0$ $2(x^2 + 6x - 3) = 0$ $x^2 + 6x - 3 = 0$ $x^2 + 6x = 3$ $x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = 3 + 3^2$ $(x + 3)^2 = 12$ $x + 3 = \pm\sqrt{12}$ $x = -3 \pm 2\sqrt{3}$	$ax^2 + bx + c = 0$ სადაც, $a \neq 0$ $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$ $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

შეჯამება, კვადრატული განტოლების ამოხსნა დისკრიმინანტის მეშვეობით:

როდესაც მოცემულია ნებისმიერი კვადრატული განტოლება,

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ სადაც, } a \neq 0$$

ვიპოვოთ $D = b^2 - 4ac$ **აღნიშნულ გამოსახულებას ეწოდება დისკრიმინანტი.**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

როგორც დავინახეთ, კოეფიციენტების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, დისკრიმინანტით აღვილდება ფესვების პოვნა.

განვიხილოთ ალგორითმი, რომლის მეშვეობითაც შეგვიძლია ვიმუშაოთ კვადრატულ განტოლებებთან:

ნაბიჯი 1:

მოცემულია $ax^2 + bx + c = 0$ სადაც, $a \neq 0$

ნაბიჯი 2:

ვიპოვოთ დისკრიმინანტი, $D = b^2 - 4ac$

ნაბიჯი 3:

გამომდინარე იქიდან თუ რა ნიშანი აქვს დისკრიმინანტს, განტოლებას აქვს ან ერთი ფესვი, ან ორი, ან არ აქვს ფესვი.

$$D = b^2 - 4ac, \text{ თუ}$$

- $\left\{ \begin{array}{l} D > 0, \text{ მაშინ განტოლებას აქვს ორი ფესვი} \\ D = 0, \text{ მაშინ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი} \\ D < 0, \text{ მაშინ განტოლებას არ აქვს ფესვი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში} \end{array} \right.$

გაგრძელება





ნაბიჯი 4:

დისკრიმინანტის გამოთვლის შემდეგ, განტოლების ამონახსნები (ფესვები) გამოითვლება ფორმულით:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

მინიმუმ: როდესაც $D = 0$, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$



ნიმუში 1 – ვიპოვოთ კვადრატული განტოლებების ფესვები დისკრიმინანტის მეთოდით

ა) $5x^2 - 2x + 8 = 0$

$a = 5, b = -2, c = 8$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 4 - 120 = -116$

რადგან $D < 0$ -ზე,

ე.ი. განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

ბ) $-2x^2 + 3x + 2 = 0$

$a = -2, b = 3, c = 2$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 + 5}{-4} = \frac{1}{2}$



ნიმუში 2 – იპოვეთ რაციონალური განტოლების ამონახსნები

აღვებრუნოთ გამოსახულებას, როდესაც ცვლადი არის მნიშვნელში, რაციონალური განტოლება ეწოდება.

მოცემულია განტოლება: $\frac{2x-4}{x-2} = \frac{1}{x}$

პროპორციის ძირითადი თვისების თანახმად ვიცით, რომ პროპორციაში ჯვარედინი წევრების ნამრავლი ტოლია.

$x(2x-4) = x-2$; სადაც $x \neq 0$; $x \neq 2$;

$2x^2 - 4x = x - 2$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$x_1 = 2$ და $x_2 = 0.5$

$x = 6$

მივიღეთ ორი ფესვი, $x_1 = 2$ და $x_2 = 0.5$. რადგან $x \neq 2$, ამიტომ $x_1 = 2$ ვერ იქნება განტოლების ფესვი, შესაბამისად, განტოლების ამონახსნი (ფესვი) არის არის $x = 0.5$



დაიმახსოვრეთ, როდესაც მოცემულია $-x^2 + bx + c = 0$, იგულისხმება, რომ $a = -1$ -ს

ვიეტას თეორემა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ვიეტამ კვადრატული განტოლება ჩაწერა ზოგადი ფორმით.

განვიხილოთ, $x^2 + bx + c = 0$ ტიპის განტოლებები და გავეცანით, როგორ არის შესაძლებელი კვადრატული განტოლების ამოხსნა ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდით.

ნამრავლად წარმოდგენის მეთოდი ნათლად ასახავს, რა შეიძლება იყოს განტოლების ფესვები:

განვიხილოთ ორი ვარიანტი

კონკრეტული შემთხვევა	ზოგადი შემთხვევა, ვიეტას თეორემა						
ა) განვიხილოთ განტოლება $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ვიპოვოთ, ორი რიცხვი რომელთა ნამრავლი წარმოადგენს 6, ხოლო ჯამი -5. <table border="1"> <thead> <tr> <th>ნამრავლი</th><th>ჯამი</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$2 \cdot 3 = 6$</td><td>$2 + 3 = 5 \neq -5$</td></tr> <tr> <td>$(-2) \cdot (-3) = 6$</td><td>$(-2) + (-3) = -5$</td></tr> </tbody> </table> შევარჩიოთ წყვილები (-2) და (-3) $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(x - 2)(x - 3) = 0$ $(x - 2) = 0 \text{ ან } (x - 3) = 0$ $x = 2 \text{ ან } x = 3$ $x_1 = 2 \quad x_2 = 3$ თუ დავაკვირდებით, განტოლების ფესვები, შერჩეული წყვილის მოპირდაპირე რიცხვებია. !! ყურადღება მიაქციეთ: ფესვების ნამრავლი თავისუფალი წევრის, 6-ის ტოლია, ხოლო ფესვების ჯამი $2 + 3 = 5$ მეორე კოეფიციენტის მოპირდაპირე რიცხვია.	ნამრავლი	ჯამი	$2 \cdot 3 = 6$	$2 + 3 = 5 \neq -5$	$(-2) \cdot (-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$	ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები, თუ $D > 0$, გამოითვლება ფორმულით: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$ გამოვიკვლიოთ რას მივიღებთ, თუ - მივუმატებთ ერთმანეთს ფესვებს: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ - გავამრავლებთ ერთმანეთზე ფესვებს: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} =$ $= \frac{(b + \sqrt{D}) \cdot (-b + \sqrt{D})}{4a^2} =$ $= \frac{D - b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 + 4ac - b^2}{4a^2} =$ $= -\frac{-4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$ ვიეტას თეორემით ცხადი გახდა, რომ ფესვები დაკავშირებულია კოეფიციენტებთან.
ნამრავლი	ჯამი						
$2 \cdot 3 = 6$	$2 + 3 = 5 \neq -5$						
$(-2) \cdot (-3) = 6$	$(-2) + (-3) = -5$						

ვიეტას თეორემა:

კვადრატულ განტოლებაში $ax^2 + bx + c = 0$, სადაც $a \neq 0$ განტოლების ფესვები x_1 და x_2 აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

მიაქციეთ ყურადღება შემდეგ გარდაქმნას:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$



ნიშნობა 3 – შეადგინეთ კვადრატული განტოლება რომლის ფესვები იქნება -3 და 5

უნდა ვიპოვოთ განტოლება, რომლის ფესვები იქნება:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = 5$$

ჩვენ ვიცით, რომ

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

ვიეტას თეორემის თანახმად:

$$\begin{cases} -3 + 5 = -\frac{b}{a} \\ (-3) \cdot 5 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = 2 \\ \frac{c}{a} = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = -2 \\ \frac{c}{a} = -15 \end{cases}$$

მივიღეთ, რომ $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - 2x - 15) = 0$

ამოცანაში არ არის დამატებითი პირობა, რომ გავიგოთ რა შეიძლება იყოს a

თუ ჩავთვლით, რომ $a = 1$ -ს, მივიღებთ განტოლებას $x^2 - 2x - 15 = 0$

თუ ჩავთვლით, რომ $a = 2$ -ს, მივიღებთ განტოლებას $2x^2 - 4x - 30 = 0$

თუ ჩავთვლით, რომ $a = -3$ -ს, მივიღებთ განტოლებას $-3x^2 + 6x + 45 = 0$ და ა.შ.

ნებისმიერი მიღებული განტოლების ფესვები იქნება $x_1 = -3; \quad x_2 = 5$

a -ს ცვლილებით, მივიღებთ ტოლფას განტოლებებს (განტოლებებს, რომლებსაც ერთი და იგივე ამონახსნი აქვთ).

პ.ს. როდესაც მასწავლებლები ვადგენთ განტოლებებს, ვიყენებთ აღნიშნულ ალგორითმს.

STEAM-კავშირი ინტეგრირებული მოდულთან

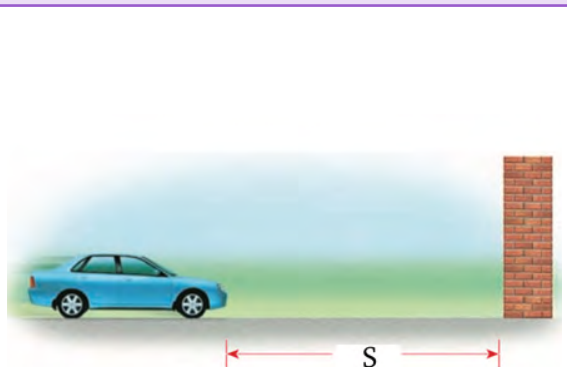


ნიშნობა 4

v სიჩქარით მოძრავი მსუბუქი მანქანისთვის გზის გარკვეულ ტიპზე სამუხრუჭო S მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $S = \frac{v^2}{20} + v$ მანქანას სამუხრუჭო მანძილად აქვს 240 მეტრი, რა სიჩქარით უნდა მოძრაობდეს მანქანა, რომ მან დამუხრუჭება მოასწროს?

ამოცანის ამოხსნის შემდეგ უპასუხეთ შემდეგ კითხვას:

- დაადგინეთ რა იქნება სამუხრუჭე მანძილი, თუ მანქანა მოძრაობს 10 მ/წმ ს სიჩქარით?



გაგრძელება





მსჯელობა:

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ გავლილი გზა დამოკიდებულია სიჩქარესა და დროზე; მოცემულ შემთხვევაში, გარკვეული წონის მსუბუქი მანქანის სამუხრუჭე მანძილი დამოკიდებულია მის სიჩქარეზე.

$$\text{თუ } S = 240 \text{ მ-ს, მაშინ } S = \frac{v^2}{20} + v;$$

$$\frac{v^2}{20} + v = 240,$$

$$v^2 + 20v - 4800 = 0$$

$$(v - 60)(v + 80) = 0$$

$$v_1 = 60 \text{ მ/წმ ან } v_2 = -80 \text{ მ/წმ}$$

 **მინიშნება:** სიჩქარე ვექტორული სიდიდეა და ის შეიძლება იყოს უარყოფითი, იმის გათვალისწინებით, თუ საით არის მიმართული; უფრო დეტალურად აღნიშნული საკითხის გასააზრებლად მიმართეთ ფიზიკის მასწავლებელს, რომელიც დეტალურად აგიხსნით რომელი პასუხი შეიძლება მივიჩნიოთ სწორად.

დამატებითი ამოცანის ამოხსნა:

ა) ვიპოვოთ სამუხრუჭე მანძილი, თუ ვიცით სიჩქარე $v = 10 \text{ მ/წმ}$

$$\text{მაშინ } S = \frac{10^2}{20} + 10, \quad S = \frac{100}{20} + 10 = 15 \text{ (მ)}$$



სავარჯიშოები

1. ამოხსენით განტოლებები:

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } 2x^2 - 5x + 2 = 0; & \text{დ) } 2x^2 + 17x - 9 = 0; & \text{ზ) } 5x^2 - 13x - 6 = 0; \\ \text{ბ) } 3x^2 + 5x + 2 = 0; & \text{ე) } 3x^2 + 2x = 8; & \text{თ) } -2x^2 + 7x - 5 = 0; \\ \text{გ) } x^2 + 4 = -5x; & \text{ვ) } 2x^2 + 5 = 11x; & \text{ი) } -x^2 + 8x + 9 = 0. \end{array}$$

2. იპოვეთ ცვლადი ალგებრული გამოსახულების დახმარებით:

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{x}{3} = \frac{2}{x}; & \text{დ) } \frac{4}{x} = \frac{x}{2}; & \text{ზ) } \frac{x}{5} = \frac{2}{x}; \\ \text{ბ) } \frac{x-1}{4} = \frac{3}{x}; & \text{ე) } \frac{x-1}{x} = \frac{x+11}{5}; & \text{თ) } \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x}; \\ \text{გ) } \frac{2x}{3x+1} = \frac{1}{x+2}; & \text{ვ) } \frac{2x+1}{x} = 3x; & \text{ი) } \frac{x+2}{x-1} = \frac{x}{2}. \end{array}$$

საუკეთესო მეთოდის ამოჩვენება განტოლების ამოხსნის დროს



■ **ჯგუფური სამუშაო:** ამოხსენით განტოლებები, ამოხსნის დროს შეარჩიეთ ამოხსნისთვის საუკეთესო მეთოდი. შეგიძლიათ ერთი და იგივე განტოლება ამოხსნათ სხვადასხვა მეთოდით, შემდეგ კი იმსჯელეთ რომელი მეთოდი იყო მეტად ხელსაყრელი ან მოსახერხებელი და რატომ.

3. ამოხსენით განტოლებები:

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } 2x^2 - 5x + 2 = 0; & \text{დ) } 2x^2 + 17x - 9 = 0; & \text{ზ) } 5x^2 - 13x - 6 = 0; \\ \text{ბ) } 3x^2 + 5x + 2 = 0; & \text{ე) } 3x^2 + 2x = 8; & \text{თ) } -2x^2 + 7x - 5 = 0; \\ \text{გ) } x^2 + 4 = -5x; & \text{ვ) } 2x^2 + 5 = 11x; & \text{ი) } -x^2 + 8x + 9 = 0. \end{array}$$

4. ამოხსენით განტოლებები:

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } x^2 + x - 12 = 0; & \text{თ) } x^2 - 49 = 0; & \text{პ) } x^2 - 14x + 40 = 0; \\ \text{ბ) } x^2 - 2x - 15 = 0; & \text{ი) } 9x^2 - 64 = 0; & \text{ჟ) } 2x^2 + 7x + 3 = 0; \\ \text{გ) } x^2 + 4x - 12 = 0; & \text{კ) } x^2 - 8x + 16 = 0; & \text{რ) } 2x^2 + 5x - 12 = 0; \\ \text{დ) } x^2 + 6x = 0; & \text{ლ) } x^2 + 10x + 25 = 0; & \text{ს) } 3x^2 - 7x + 4 = 0; \\ \text{ე) } 3x^2 - 4x = 0; & \text{მ) } x^2 - 3x - 18 = 0; & \text{ტ) } 4x^2 + x - 3 = 0; \\ \text{ვ) } 4x^2 - 9x = 0; & \text{ნ) } x^2 - 11x + 28 = 0; & \text{უ) } 2x^2 + 5x - 3 = 0; \\ \text{ზ) } x^2 - 9 = 0; & \text{ო) } x^2 + x - 30 = 0; & \text{ფ) } 2x^2 - 19x + 35 = 0. \end{array}$$

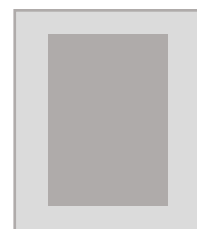
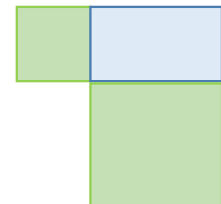
5. ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი არის 260. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ ერთი მათგანი 7-ით მეტია მეორეზე.

6. იპოვეთ იმ მართკუთხედის პერიმეტრი, რომლის სიგრძე 3-ით მეტია სიგანეზე და ფართობია 154 სმ^2 .



სავარჯიშოები

7. მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთის ფართობი, რომლის ერთი გვერდი 20 მეტრით მეტია მეორეზე, ტოლია $1\,500\text{ მ}^2$ -ის. რა სიგრძის ღობე დასჭირდება მას შემოსავლებად.
8. მართკუთხედის პერიმეტრი არის 54 სმ, ფართობი კი – 180 სმ^2 . იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.
9. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 165-ით მეტია ამავე რიცხვების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
10. თეატრში რიგში ადგილების რაოდენობა 12-ით მეტია რიგების რაოდენობაზე. იპოვეთ რიგების რაოდენობა, თუ სულ თეატრში 640 ადგილია.
11. ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამის კვადრატი 312-ით მეტია მათსავე კვადრატების ჯამზე. იპოვეთ ეს რიცხვები.
12. იპოვეთ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვი, თუ მათი კვადრატების ჯამი არის 869.
13. ჭადრაკის ტურნირში სულ გათამაშდა 45 პარტია. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში, თუ ცნობილია რომ ყველა მონაწილე შეხვდა თითოეულ მოთამაშეს ერთხელ.
14. მართკუთხედის ფორმის მუყაოს ფურცლიდან, რომლის სიგრძე 1.5-ჯერ მეტია სიგანეზე, შეიძლება დამზადდეს $6\,080\text{ სმ}^3$ მოცულობის ღია კოლოფი. ამისათვის კუთხეებიდან უნდა ამოიჭრას 8 სმ სიგრძის კვადრატები. იპოვეთ მუყაოს ფურცლის ზომები.
15. მართკუთხედის პერიმეტრია 28 სმ, მის ორ მეზობელ გვერდზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამი კი უდრის 116 სმ^2 -ს. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.
16. ფოტოსურათი ზომით 9×16 სმ დააწებეს მუყაოს ფურცელზე ისე, რომ გამოვიდა ერთნაირი სიგანის ჩარჩო. იპოვეთ ჩარჩოს სიგანე, თუ ფოტოსურათის და ჩარჩოს ფართობი ერთად არის 330 სმ^2 .
17. ყუთის ძირს მართკუთხედის ფორმა აქვს, რომლის სიგანე 2-ჯერ ნაკლებია სიგრძეზე. ყუთის სიმაღლეა 0.5 მ. იპოვეთ ყუთის მოცულობა, თუ მისი ძირის ფართობი 1.08 მ^2 -ით ნაკლებია გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამზე.



4.5. რაციონალური და ირაციონალური განტოლებები



*მათემატიკის მოყვარულთათვის

ჩვენ ვიცით სხვადასხვა ტიპის განტოლებები:

1. წრფივი განტოლება $ax + b = c$, სადაც x -ცვლადია;
2. კვადრატული განტოლება: $ax^2 + bx + c = 0$;
3. წილადის შემცველი განტოლება, რაციონალური განტოლება;
4. ირაციონალური განტოლება;
5. მოგვიანებით გავცნობით, მაჩვენებლიან, ლოგარითმული და ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს.

ხშირად მათემატიკაში რეალური პროცესის მოდელირებას ვახდენთ განტოლებების მეშვეობით, ამიტომ აუცილებელია სხვადასხვა ტიპის განტოლებების ამოხსნის ალგორითმის ცოდნა.



ნიმუში 1 – რაციონალური განტოლება

განტოლება, რომელიც ცვლადს შეიცავს მნიშვნელში, რაციონალური, იგივე წილადური განტოლება ეწოდება.

ა) განვიხილოთ განტოლება $\frac{2}{x} + \frac{14}{x+5} = 3$

გავაერთმნიშვნელიანოთ

$$\frac{2(x+5) + 14x}{x(x+5)} = 3$$

$$\frac{2x + 10 + 14x}{x(x+5)} = 3$$

$$\frac{16x + 10}{x(x+5)} = 3$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $x(x+5)$ -ზე და აღვნიშნოთ, რომ $x \neq 0$; $x \neq -5$

$$16x + 10 = 3x(x+5)$$

ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$16x + 10 = 3x^2 + 15x$$

$$3x^2 + 15x = 16x + 10$$

$$3x^2 + 15x - 16x - 10 = 0$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = -10$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{6} = \frac{1 - 11}{6} = \frac{-10}{6} = -1\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{6} = \frac{1 + 11}{6} = 2$$

ჩვენ ვიცით, რომ $x \neq 0$; $x \neq -5$ მიღებული ფესვები აკმაყოფილებს პირობას, შესაბამისად, განტოლების ფესვებია $-1\frac{2}{3}$ და 2



ნიმუში 2 – ირაციონალური განტოლება

განტოლება, რომელიც ცვლადს შეიცავს ფესვის ნიშნის ქვეშ, ირაციონალური განტოლება ეწოდება

$$b) \sqrt{x+3} = x+1$$

ავიყვანოთ განტოლების ორივე მხარე კვადრატში, გავითვალისწინოთ, რომ იმისათვის, რათა ფესვქვეშ გამოსახულებამ იარსებოს, ის უნდა იყოს მეტი ან ტოლი 0-ზე

$$x+3 \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2$$

$$x+3 = x^2+2x+1$$

$$x+3-x^2-2x-1=0$$

$$-x^2-x+2=0$$

$$-(x^2+x-2)=0$$

$$-1 \neq 0 \text{ შესაბამისად } x^2+x-2=0$$

$$a=1, \quad b=1, \quad c=-2$$

$$D=b^2-4ac=1^2-4 \cdot 1 \cdot (-2)=1+8=9$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

შემოწმება:

$$x_1 = -1$$

$$\sqrt{-1+3} \neq -1+1$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ, არითმეტიკულ კვადრატულს ფესვს

$$x_2 = 2$$

$$\sqrt{2+3} = 2+1$$

$$2 = 2$$

ე.ი. განტოლების ფესვია $x = 2$



ნიშნობა 3

მოტორიანმა ნავმა 25 კმ გაიარა მდინარის დინების მიმართულებით და 12 კმ დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით და მთელ გზას მოანდომა 3 საათი. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე, თუ დინების სიჩქარეა 3 კმ/სთ.



ამოცანის პირობის თანახმად უცნობი სიდიდეა ნავის საკუთარი სიჩქარე, აღვნიშნოთ ის ცვლადით

$$v_{\text{საკ}} = x \text{ კმ/სთ}$$

	v	S	t
დინების მიმართულება	$x + 3$	25	$\frac{25}{x + 3}$
საწინააღმდეგო მიმართულება	$x - 3$	12	$\frac{12}{x - 3}$

შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{25}{x + 3} + \frac{12}{x - 3} = 3$$

გავაერთმნიშვნელიანოთ

$$\frac{25(x - 3) + 12(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = 3$$

$$\frac{37x - 39}{(x - 3)(x + 3)} = 3$$

ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ

$(x - 3)(x + 3)$ -ზე და აღვნიშნოთ, რომ $x \neq 3$; $x \neq -3$

$$37x - 39 = 3x^2 - 27$$

$$3x^2 - 27 = 37x - 39$$

$$3x^2 - 37x + 12 = 0$$

$$D = 37^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 1225 = 35^2$$

$$x_1 = \frac{37 + 35}{6} = 12 \quad x_2 = \frac{37 - 35}{6} = \frac{1}{3}$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ნავის საკუთარი სიჩქარე ვერ იქნება $\frac{1}{3}$, რადგან ის დინების სიჩქარეზე ნაკლებია.

მაშინ ამოცანის პასუხია $v_{\text{საკ}} = 12 \text{ კმ/სთ}$



სავარჯიშოები

1. ამოხსენით რაციონალური განტოლება:

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \frac{x^2}{x+4} = \frac{2x}{x+4}; & \text{ბ)} \frac{10}{2x-3} = x-1; & \text{გ)} \frac{3a+1}{a+2} - \frac{a-1}{a-2} = 1; \\ \text{დ)} \frac{x^2+6x}{x-3} = \frac{5}{4-x}; & \text{ე)} \frac{x}{2x+6} = \frac{x-1}{x+1}; & \text{ვ)} \frac{3}{y} + \frac{4}{y-1} = \frac{5-y}{y^2-y}; \\ \text{ზ)} \frac{8x-5}{x} = \frac{9x}{x+2}; & \text{თ)} \frac{2x-2}{x+2} + \frac{x+3}{x-3} = 5; & \text{ი)} \frac{3x-2}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{3x+4}{x^2-2x}. \end{array}$$

2. ამოხსენით რაციონალური განტოლება:

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \frac{x^2+4x}{3x+2} = \frac{x+1}{3}; & \text{ბ)} \frac{y^2-2y}{3y+3} = \frac{y-2}{3}; & \text{გ)} \frac{2y-1}{y-2} - \frac{2y+4}{y+2} = 3; \\ \text{დ)} \frac{y^2-13y+36}{y-9} = 2; & \text{ე)} \frac{x-6}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = 2; & \text{ვ)} \frac{3}{x} - \frac{2x+1}{x+2} = \frac{6}{x^2+2x}; \\ \text{ზ)} \frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}; & \text{თ)} \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x+1} = 2; & \text{ი)} \frac{y-7}{5-y} - \frac{1}{y} = \frac{5}{y^2-5y}; \\ \text{კ)} \frac{3a+2}{a+1} + \frac{a+1}{a-2} = 4; & \text{ლ)} \frac{3a+4}{a+1} - 2 = \frac{2a+3}{2a+1}; & \text{მ)} \frac{5x-3}{x-1} + 3 = \frac{x+8}{2x-3}. \end{array}$$

3. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება:

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \sqrt{6x-4} = 3; & \text{ბ)} \sqrt{5x-1} = \sqrt{x+7}; & \text{გ)} \sqrt{3x+13} = x+3; \\ \text{დ)} \sqrt{x^2-7x-9} = 3; & \text{ე)} \sqrt{x^2-3x-18} = \sqrt{x+6}; & \text{ვ)} \sqrt{3x^2-25x+74} = x-8; \\ \text{ზ)} \sqrt{11x-18} = x; & \text{თ)} \sqrt{x-3} = x-5; & \text{ი)} \sqrt{4-x^2-6x} = x+4. \end{array}$$

4. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება:

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \sqrt{5x+1} = x+1; & \text{ბ)} \sqrt{(2x+3)(x+1)} = x+3; & \text{გ)} \sqrt{x^2-4x+3} - 2 = x-3; \\ \text{დ)} \sqrt{x^2-6x+9} = x-2; & \text{ე)} \sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{2x+2}; & \text{ვ)} \sqrt{3x-5} + 2x = x+6; \\ \text{ზ)} \sqrt{16x^2-8x+1} = 9; & \text{თ)} \sqrt{2x^2-5x+1} = \sqrt{x+1}; & \text{ი)} \sqrt{4+2x} - 3x = -x+2. \end{array}$$

5. ერთი ქალაქიდან მეორეში, მათ შორის მანძილია 175 კმ, ერთდროულად ორი ავტომობილი გამოვიდა. ერთის სიჩქარე 20 კმ/სთ-ით მეტია მეორეზე, ამიტომ ის დანიშნულების ადგილზე 1 საათით ადრე ჩავიდა. იპოვეთ ავტომობილების სიჩქარე.

6. ერთმა ველოსიპედისტმა 20 კმ გავლას მოანდომა 20 წუთით ნაკლები დრო, ვიდრე მეორე ველოსიპედისტმა. იპოვეთ თითოეულის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ ერთ-ერთი მათგანი მოძრაობდა 2 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით მეორესთან შედარებით.

7. ტურისტმა ნავით 6 კმ გაცურა მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით და 15 კმ ტბაზე. მან ამ მოგზაურობას მოანდომა 4 საათი. იპოვეთ ნავის საკუთარი სიჩქარე, თუ მდინარის დინების სიჩქარეა 2 კმ/სთ.

8. შეგირდი სამუშაოს შესრულებას ანდომებს 5 საათით მეტს ოსტატთან შედარებით. რა დროს ანდომებს თითოეული მათგანი დავალების შესრულებას, თუ ორივე ერთად ამ დავალებას ასრულებს 6 საათში?

9. **გამოწვევა:** ორი ქალაქიდან, რომელთა შორის 360 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობდა ორი ავტომობილი. პირველი გამოვიდა ქალაქიდან 1 საათით გვიან მეორეზე, 4 კმ/სთ-ით მეტი სიჩქარით. იპოვეთ თითოეული ავტომობილის სიჩქარე, თუ ცნობილია რომ ისინი შუა გზაზე შეხვდნენ ერთმანეთს.



სავარჯიშოები



ცესტის ნიშნობა:

1. ამოხსენით მოცემული კვადრატული განტოლებები:

ა) $(x - 4)^2 - 9 = 0$;

ბ) $25x^2 - 20x = 0$;

გ) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

2. ამოხსენით განტოლება სრულ კვადრატამდე შევსებით: $x^2 + 8x + 3 = 0$;

3. ამოხსენით განტოლება: $x^2 + 2x - 8 = 0$;

4. როგორ დაიშლება $3x^2 - 9x + 6$ კვადრატული სამწევრი მამრავლებად, თუ მისი ფესვებია 2 და 1?

5. შეკვეცე წილადი: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$;

6. 2 400 მ² მიწის მართკუთხა ნაკვეთს შემოვლებული აქვს მესერი, რომლის სიგრძე 200 მ-ს უდრის. იპოვეთ ამ ნაკვეთის სიგრძე და სიგანე.

7. თბილისიდან სანდროს აგარაკამდე 360 კმ-ია. სანდრო ჩავიდა თბილისიდან აგარაკზე, იქ 12 სთ გაჩერდა და უკან დაბრუნდა. აგარაკიდან თბილისისკენ მგზავრობისას მან სიჩქარე 18 კმ/სთ-ით გაზარდა და მთელ ამ მოგზაურობაზე 21 სთ დახარჯა. იპოვეთ სიჩქარე, რომლითაც მოძრაობდა სანდრო თბილისიდან აგარაკამდე.

8. ამოხსენით ირაციონალური განტოლება: $\sqrt{7x - 10} = x$;

9. ამოხსენით რაციონალური განტოლება: $\frac{x}{2x + 6} - \frac{x - 1}{x + 1} = 0$.