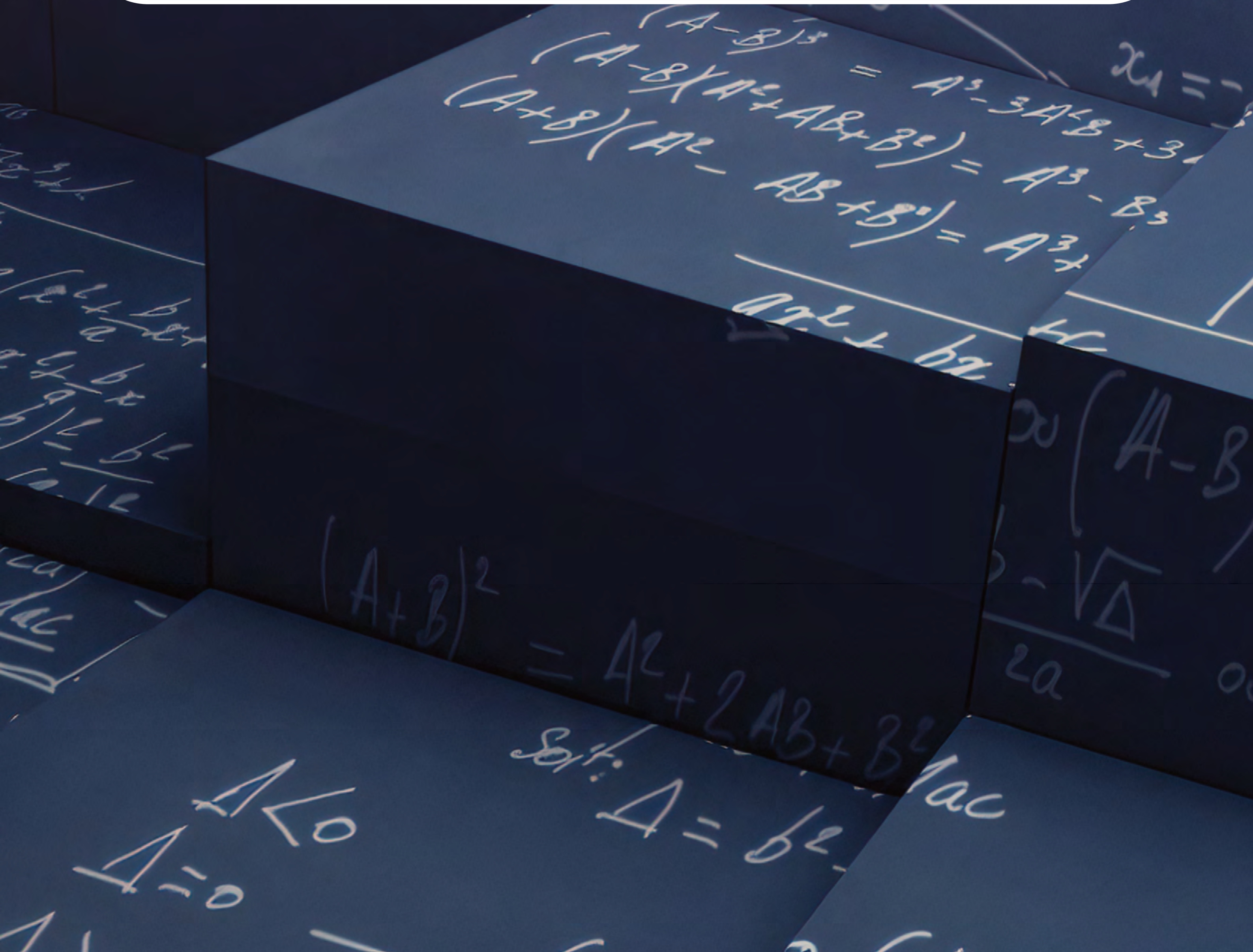
პროფესიული უნარების სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ლოგიკა და გეომეტრია



სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

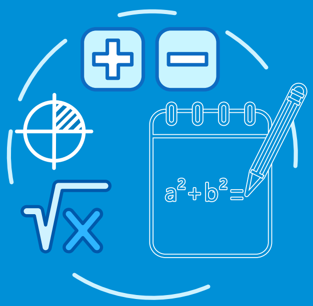
Swiss Agency for Development and Cooperation SDC

პროფესიული უნარების სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

V. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

როგორც ვიცით, დედამიწა ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო.

NASA-ს მონაცემებით, დედამიწის ეკვატორის გარშემოწერილობა 40 070 კილო მეტრია. თუკი გაითვალისწინებთ, რომ დღე-ღამის ხანგრძლივობა 24 საათია და ეკვატორის სიგრძეს ამ რიცხვზე გაყოფთ, მაშინ მიიღებთ, რომ ეკვატორთან მოძრაობის სიჩქარე 1670 კმ/სთ-ია.

თუმცა, სხვა განედებზე ასე სწრაფად ვერ იმოძრავებთ. მაგალითად, 45 გრადუსიან განედზე მოძრაობის სიჩქარე 1180 კმ/სთ-ია.

ჩვენ ირგვლივ ყოველდღიურ ცხოვრებაში უამრავ ობიექტს ვხედავთ, რომელსაც გეომეტრიული ფიგურის ფორმა აქვს, ხშირად გვიწევს ამ ობიექტების მოცულობის ან ზედაპირის ფართობის გამოთვლა.

www.1tv.ge

კომპლექსური დავალება

თქვენი დავალება

1. დაადგინეთ, რა არის დედამიწის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.
2. ინტერნეტის მეშვეობით მოიძიეთ ინფორმაცია თქვენთვის საინტერესო პლანეტაზე და დაადგინეთ მისი ზომები, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა, შეადარეთ დედამიწის ზომებს.
3. ასევე, მოიძიეთ ინფორმაცია პირამიდების შესახებ და დაადგინეთ პირამიდების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.
4. გამოიკვლიეთ, როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან სხვადასხვა სივრცული სხეულის მოცულობები და რატომ არის მნიშვნელოვანი აღნიშნული კავშირების კვლევა.

ნაშრომი წარმოადგინეთ პრეზენტაციის მეშვეობით

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ გვეხმარება გეომეტრიული მოდელები რეალური მოვლენების კვლევაში? როგორ ფიქრობთ, რას აღწერს გეომეტრიული მოდელი?
- რა კანონზომიერება დაინახეთ გეომეტრიული ფიგურების ზომების (მაგალითად, მოცულობების) დაკავშირებისას და რამდენად მნიშვნელოვანია აღნიშნული კავშირების კვლევა?
- რატომ არის მნიშვნელოვანი ფიგურის ზომების დადგენა და როგორ ხდება ფორმულის გამოყვანა? მოიყვანეთ მინიმუმ ერთი მაგალითი.

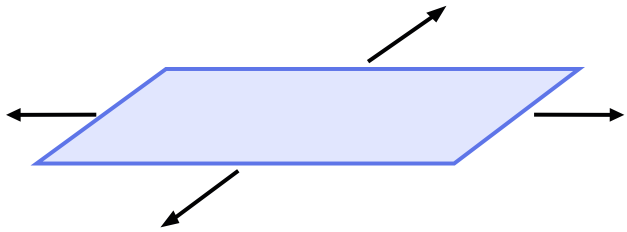
თავი 5. სტერეომეტრიის საწყისები; სივრცული ფიგურები და ზომები

5.1.მიმართებები სივრცეში

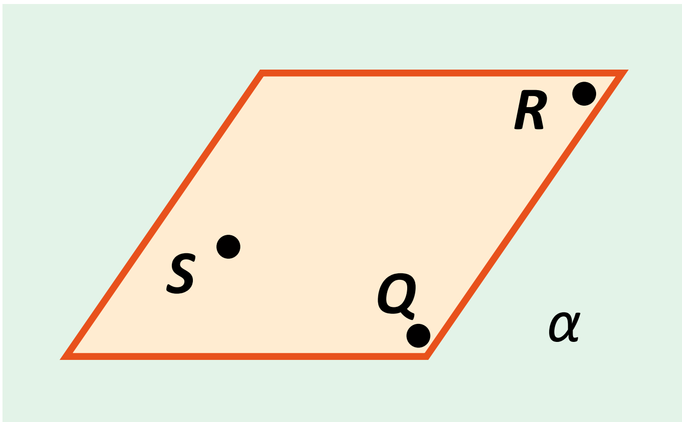
გეომეტრიის ნაწილს, რომელიც სივრცულ ფიგურებს შეისწავლის **სტერეომეტრია** ეწოდება. „სტერეო“ – ბერძნულად სივრცულს ნიშნავს. თავად გეომეტრია ნიშნავს მიწის გაზომვას, Geo – ნიშნავდა Earth-ს დედამიწა, Metron – Measurement-ს გაზომვას.

მოცემული პარაგრაფის მიზანია ძირითადი ცნებების დაუფლება.

სიბრტყის ზუსტი განმარტება არ არსებობს, იგი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ბრტყელი ზედაპირი, რომელსაც არ აქვს სისქე, აქვს ორი განზომილება და გრძელდება უსასრულოდ.

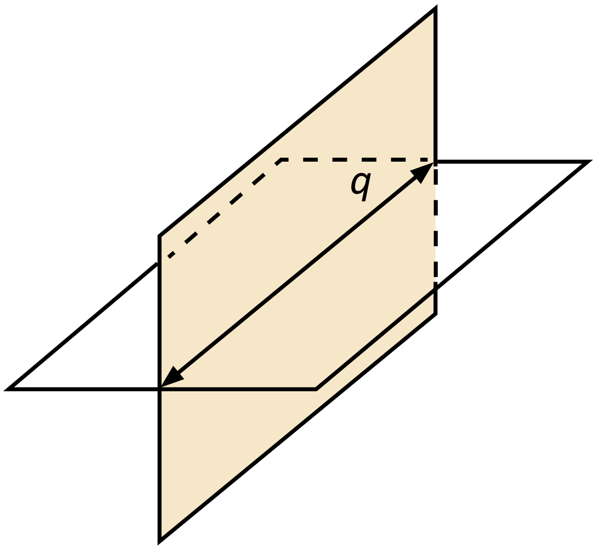


სიბრტყე აღინიშნება მასზე მონიშნული ნებისმიერი 3 წერტილით, რომლებიც არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, ან აღინიშნება ერთი პატარა ბერძნული ასო-ბგერით. ნახაზზე მოცემულია SQR სიბრტყე, ან α სიბრტყე.

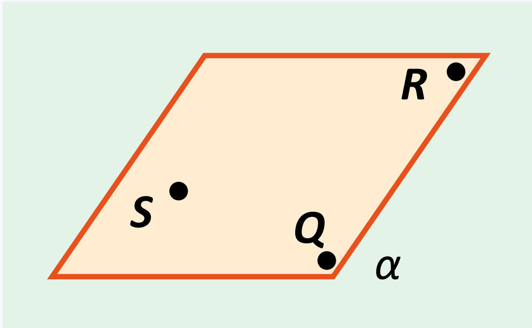


ჩვენ ვიცით, ორი წრფე ერთმანეთს წერტილში კვეთს, რომელიც ორივეს ეკუთვნის.

ორი სიბრტყე ერთმანეთს კვეთს წრფეზე, რომელიც ორივე სიბრტყეს ეკუთვნის.



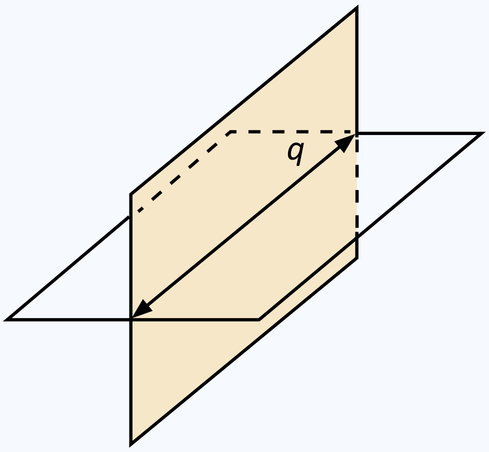
აქსიომა 1: ნებისმიერი სიბრტყისთვის არსებობს წერტილები, რომლებიც მდებარეობს მასზე და წერტილები რომელიც არ მდებარეობს ამ სიბრტყეზე.



აქსიომა 2: ნებისმიერ სამ, ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს სიბრტყე და მასთან მხოლოდ ერთი.

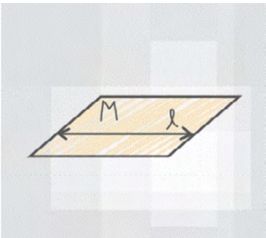
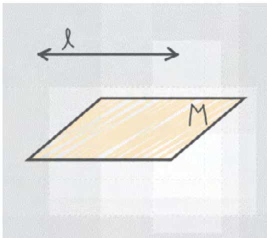
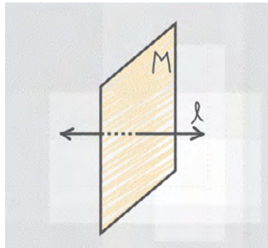
აქსიომა 3: თუ წრფის ორი წერტილი ეკუთვნის სიბრტყეს, მაშინ ეს წრფე ეკუთვნის ამ სიბრტყეს.

აქსიომა 4: თუ ორ სიბრტყეს გააჩნია საერთო წერტილი, ე.ი. მაშინ მათ გააჩნიათ საერთო წრფე, რომელზეც მდებარეობს ამ სიბრტყეთა ყველა საერთო წერტილი.



წრფე და სიბრტყე

წრფე შეიძლება მდებარეობდეს სიბრტყეზე, ეკუთვნოდეს სიბრტყეს, იყოს სიბრტყის პარალელური, ან კვეთდეს ერთ წერტილში.

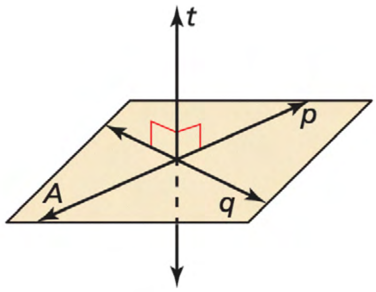
წრფე ეკუთვნის სიბრტყეს	წრფე სიბრტყის პარალელურია	წრფე კვეთს სიბრტყეს
		

წრფეს ეწოდება სიბრტყის პარალელური, თუ მას ამ სიბრტყესთან საერთო წერტილი არ გააჩნია.

- როდის შეგვიძლია ვთქვათ, რომ წრფე არის რომელიმე სიბრტყის პარალელური?

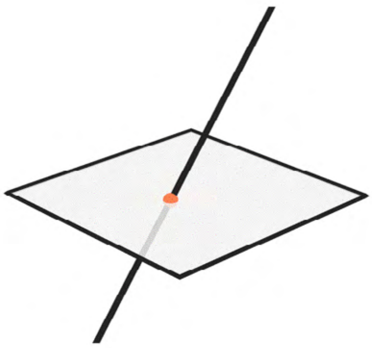
წრფე სიბრტყის მართობულია ნიშნავს, რომ იგი გადაკვეთის წერტილში გავლებული სიბრტყის ნებისმიერი წრფის მართობულია.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ წრფე სიბრტყის მართობულია თუ არა, საკმარისია ვიცოდეთ, რომ წრფე მართობულია გადაკვეთის წერტილზე გავლებული ნებისმიერი ორი წრფის, რომელიც სიბტყეს ეკუთვნის.



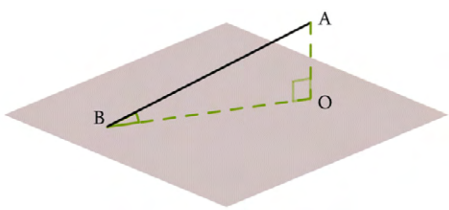
მითითება: მოცემულ ნაწილში არ განვიხილავთ დამტკიცებებს.

წრფე შეიძლება კვეთდეს სიბრტყეს, არ კვეთდეს სიბრტყეს, კვეთდეს და იყოს მართობული.



თუ წრფე კვეთს სიბრტყეს, თუმცა არ არის სიბრტყის მართობული, ასეთ მკვეთ წრფეს ეწოდება სიბრტყისადმი დახრილი წრფე.

განვსაზღვროთ კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის. ამისათვის ჯერ განვსაზღვროთ წრფის გეგმილი სიბრტყეზე.

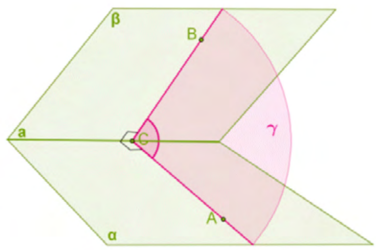


A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავავლოთ წრფე, რომლიც სიბრტყეს კვეთს B წერტილში; A წერტილიდან α სიბრტისადმი გავავლოთ მართობი, რომელიც სიბრტყეს კვეთს O

წერტილში; შევაერთოთ O და B წერტილები ერთმანეთთან, მივიღებთ OB მონაკვეთს, რომელსაც ეწოდება A წერტილზე გავლებული **დახრილი წრფის გეგმილი ამ სიბრტყეზე.**

კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის ეწოდება კუთხეს დახრილსა და ამ სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის (ნახაზზე ∠ABO).

კუთხე ორ სიბრტყეს შორის:

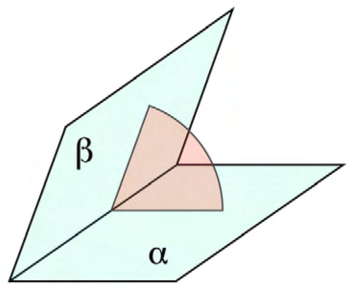


∠ACB არის ორ სიბრტყეს შორის აგებული ხაზოვანი კუთხე.

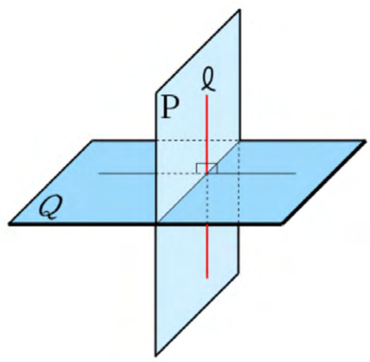
ორი სიბრტყე არის პარალელური, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს.

თუ ორი სიბრტყე არ არის პარალელური, მაშინ ისინი იკვეთებიან საერთო წრფეზე.

განვსაზღვროთ კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. განვიხილოთ საერთო წრფის რაიმე წერტილი (ვთქვათ C წერტილი) და გავავლოთ ამ საერთო წრფის მართობული წრფეები (AC და BC) თითოეულ მოცემულ სიბრტყეში, მივიღებთ ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეს.



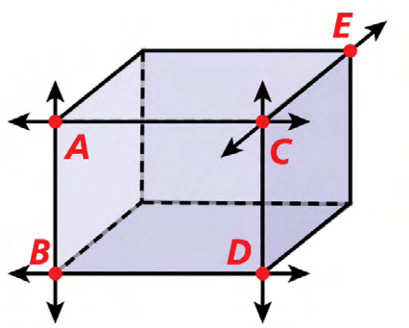
ამ წრფეებს შორის კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. **∠ACB-ს უწოდებენ ორ სიბრტყეს შორის აგებულ კუთხეს (ხაზოვან კუთხეს).** ცხადია ასეთი ხაზოვანი კუთხეები შეიძლება ავაგოთ საერთო წრფის ნებისმიერ წერტილზე.



თუ ორ სიბრტყეს შორის ორწახნაგა კუთხე უდრის 90°-ს, მაშინ ეს ორი სიბრტყე არის ერთმანეთის მართობული სიბრტყეები.

ნახაზზე P და Q სიბრტყეები მართობული სიბრტყეებია. P სიბრტყეში გავლებული საერთო წრფის მართობული l წრფე არის Q სიბრტყის მართობული წრფე.

სივრცეში პარალელური, მართობული და აცდენილი წრფეები



თუ ორი წრფე ერთ რომელიმე სიბრტყეში ძევს და ერთმანეთს არ კვეთს, მაშინ მათ პარალელური წრფეები ეწოდებათ.

ორ წრფეზე, რომელზეც სიბრტყე არ გაივლება, აცდენილი წრფეები ეწოდება.

ნახაზზე EC და BD წრფეები აცდენილი წრფეებია, ხოლო AC და BD წრფეები პარალელური წრფეებია.

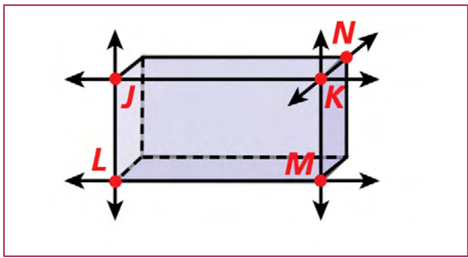
AB მართობულია BD წრფის.

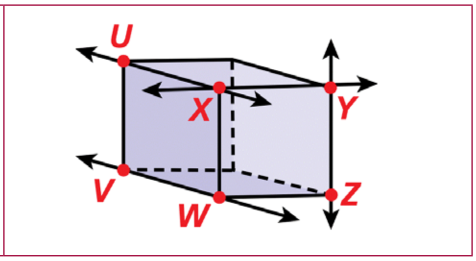
სავარჯიშოები

1. ქვემოთ დიაგრამაზე დაასახელეთ პარალელური წრფეები, მართობული წრფეები და აცდენილი წრფეები (მინიმუმ 2-2 წყვილი);

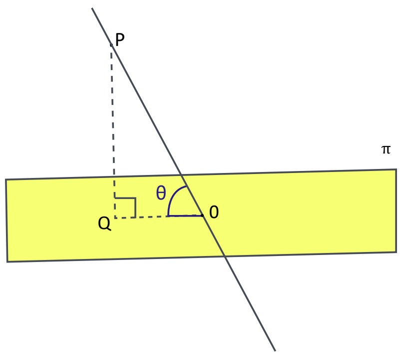
ასევე, დაასახელეთ ორი სიბრტყე, რომლებიც კვეთს და რომელიც არ კვეთს.

ა) ბ)

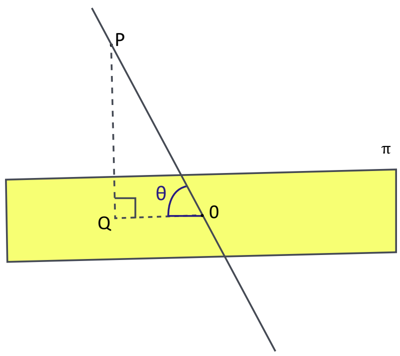




2. სიბრტყის გარეთ აღებული P წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი არის 12 სმ. ამ წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული PO დახრილის სიგრძეა 13 სმ. იპოვეთ PO მონაკვეთის გეგმილი სიბრტყეზე.



3. PO დახრილი სიბრტყესთან ადგენს 30^0-იან კუთხეს. მანძილი P წერტილიდან სიბრტყემდე არის 15 სმ. იპოვეთ PO დახრილის სიგრძე.



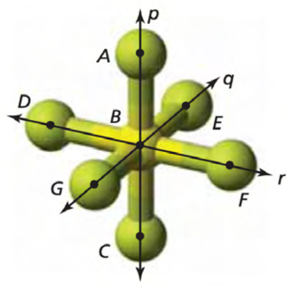
4. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 15 სმ და 20 სმ. მეორე დახრილის გეგმილის სიგრძე სიბრტყეზე არის 16 სმ. იპოვეთ პირველი დახრილის გეგმილის სიგრძე ამ სიბრტყეზე.

5. **გამოწვევა:** ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არის 30^0. ერთ სიბრტყეში აღებული A წერტილიდან მანძილი სიბრტყეების საერთო წრფემდე არის 24 სმ. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე.

სავარჯიშოები

6. **გამოწვევა:** ორი სიბრტყე ჰკვეთს ერთმანეთს. ერთ სიბრტყეში აღებული ორი წერტილიდან მანძილები საერთო გადაკვეთის წრფემდე არის 18 სმ და 14 სმ. მანძილი პირველი წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე არის 9 სმ. იპოვეთ მანძილი მეორე წერტილიდან მეორე სიბრტყემდე.

7. მარჯვნივ დიაგრამაზე მოცემულია მოლეკულის მოდელი; დააკვირდით მოდელს და იმსჯელეთ.



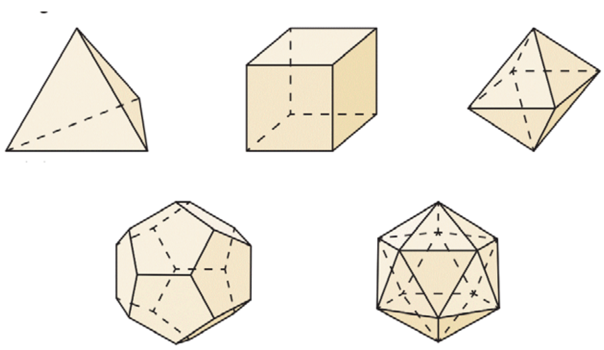
საკვანძო კითხვა:

- *რატომ არის მნიშვნელოვანი სივრცის შესწავლა? სივრცეში გადამკვეთი და პარალელური წრფეების, ან სიბრტყეების შესწავლა?*

5.2. სივრცული ფიგურები. პრიზმა, პირამიდა, ბრუნვითი ფიგურები

თავდაპირველად განვსაზღვროთ რას ეწოდება **მრავალწახნაგა;**

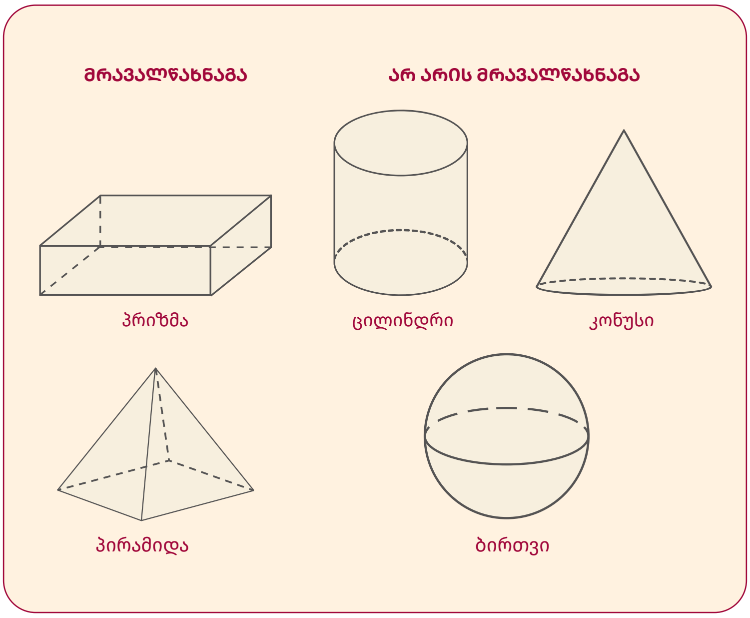
მრავალწახნაგა ეწოდება ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვარულია სასრული რაოდენობის სიბრტყეებით; არის სივრცული ფიგურა, რომლის ყველა წახნაგი (ზედაპირი) წარმოადგენს მრავალკუთხედს. მრავალწახნაგებისთვის ითვლიან ზედაპირის ფართობს, ანუ მისი ყველა წახნაგის ფართობთა ჯამს და მოცულობას, ე.წ. ფიგურის ტევადობას. სივრცული ფიგურებიდან ჩვენ განვიხილავთ ყველასათვის ცნობილ ფიგურებს და შევისწავლით მათ „ელემენტარულ“ თვისებებს.



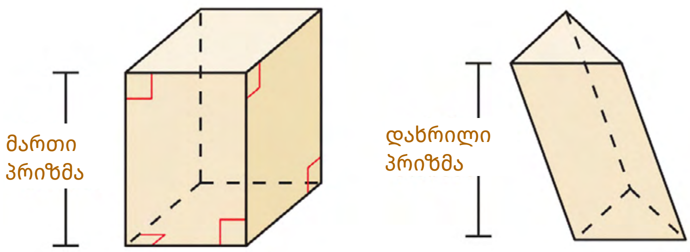
გავიხსენოთ ჩვენთვის ნაცნობი სივრცული ფიგურების დასახელებები:

პრიზმა, მართკუთხა პარალელეპიპედი, კუბი, პირამიდა – მრავალწახნაგებია;

ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი – ბრუნვითი სხეულებია; არ არიან მრავალწახნაგები



პრიზმა ეწოდება მრავალწახნაგას, რომელიც შექმნილია ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული ყველა იმ ურთიერთპარალელური წრფეების მონაკვეთებისაგან, რომლებიც ერთ-ერთ სიბრტყეში მყოფ მრავალკუთხედს კვეთს.



განმარტებიდან გამომდინარე, პრიზმა არის მრავალწახნაგა, რომლის ორი წახნაგი წარმოადგენს ტოლ მრავალკუთხედებს, მოთავსებულებს პარალელურ სიბრტყეებში,

ხოლო დანარჩენი წახნაგები (ე.წ. გვერდითი წახნაგები), წარმოადგენენ ამ მრავალკუთხედების გვერდებზე აგებულ პარალელოგრამებს.

როდესაც წრფეები ორი პარალელური სიბრტყის მიმართ მართობულია მივიღებთ მართ პრიზმას, რომლის გვერდითი წახნაგებიც მართკუთხედებია.

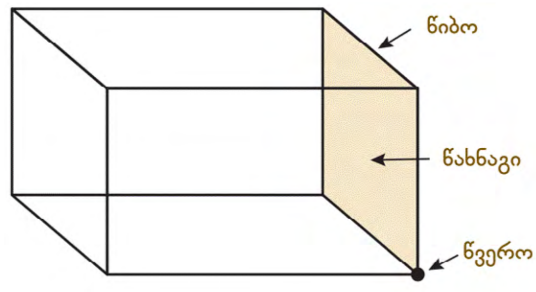
ცხადია, რომ ასეთი პრიზმებიც შეიძლება იყოს მრავალნაირი, ჩვენ პროგრამაში განვიხილავთ მართ პრიზმებს.

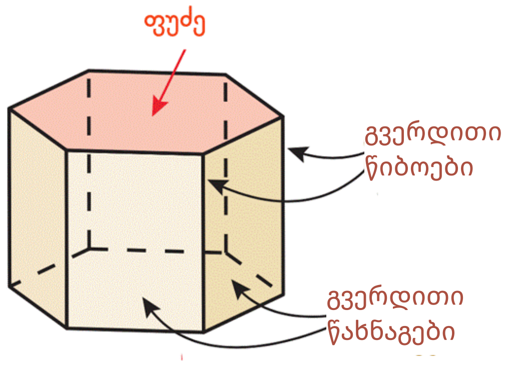
მინიშნება: ორ პარალელურ სიბრტყეში მყოფ მრავალკუთხედებს ეწოდება ფუძე;

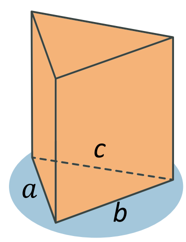
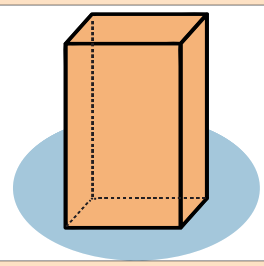
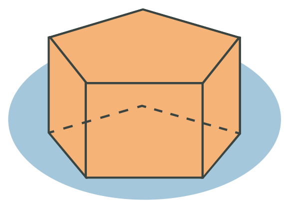
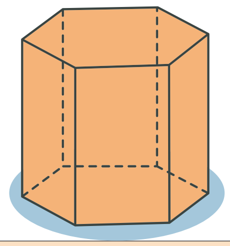
მართი პრიზმის შემთხვევაში, გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია.

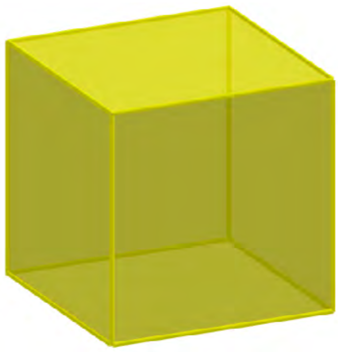
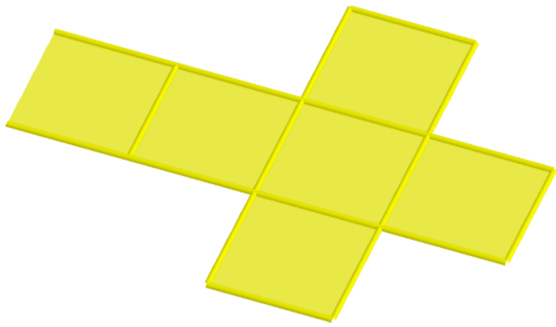
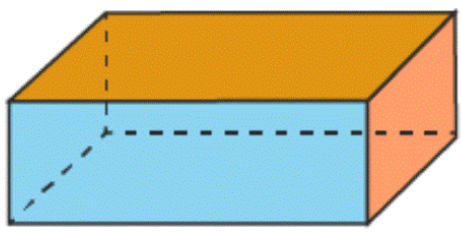
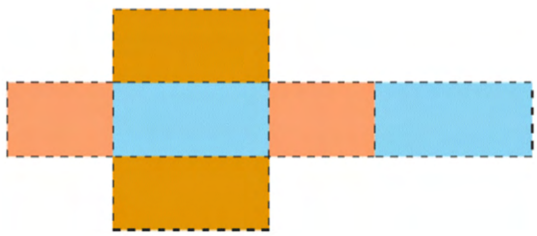
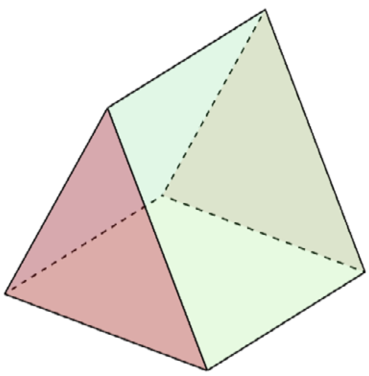
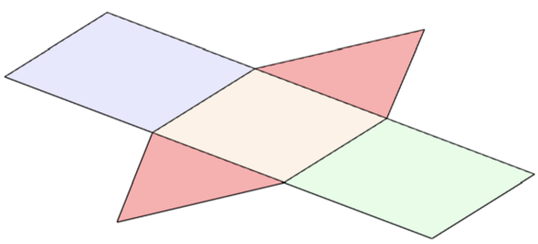
მართი პრიზმა ეწოდება ისეთ პრიზმას, რომლის გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები. იმის მიხედვით, თუ როგორი მრავალკუთხედია მოთავსებული პრიზმის ფუძეში, პრიზმას ეწოდება შესაბამისი სახელი. თუ მართი პრიზმის ფუძეში არის სამკუთხედი, მაშინ მას ეწოდება მართი სამკუთხა პრიზმა. თუ ფუძეშია ოთხკუთხედი, მაშინ მართი ოთხკუთხა პრიზმა და ა.შ.

პრიზმას, რომლის ფუძე პარალელოგრამია **პარალელეპიპედი** ეწოდება. პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია.

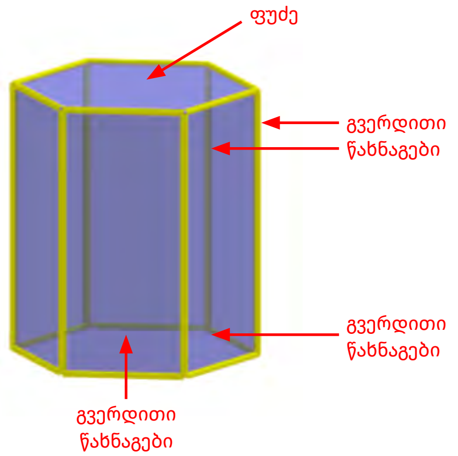




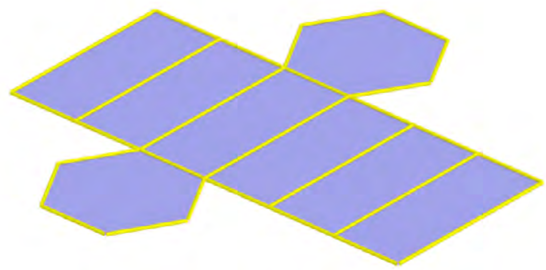
სამკუთხა პრიზმა	ოთხკუთხა პრიზმა
	
ხუთკუთხა პრიზმა	**ექვსკუთხა პრიზმა**
	

ფიგურა	შლილი
კუბი ეწოდება ისეთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის სამივე განზომილება ერთმანეთის ტოლია, ანუ კუბის ყველა წახნაგში არის ერთმანეთის ტოლი კვადრატები. 	კუბის შლილი  Geogebra -კუბი იხილეთ კუბის 11 სხვადასხვა შლილი
მართკუთხა პარალელეპიპედი **მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება** ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის მართკუთხედი, ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები. 	**მართი პარალელეპიპედი ეწოდება** ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის პარალელოგრამი, ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები. 
სამკუთხა პრიზმა 	 Geogebra სამკუთხა პრიზმა შლილი

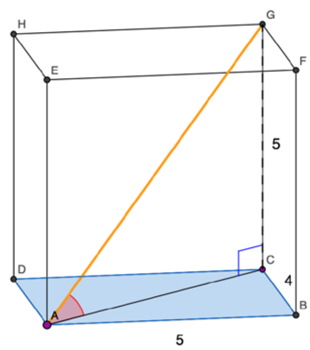
ექვსკუთხა პრიზმა



წესიერი პრიზმა ეწოდება ისეთ პრიზმას, რომლის ფუძეში არის წესიერი მრავალკუთხედი (ან ტოლგვერდა სამკუთხედი, ან კვადრატი, ან წესიერი ხუთკუთხედი, ექვსკუთხედი და სხვა), ხოლო გვერდითი წახნაგები არის მართკუთხედები.



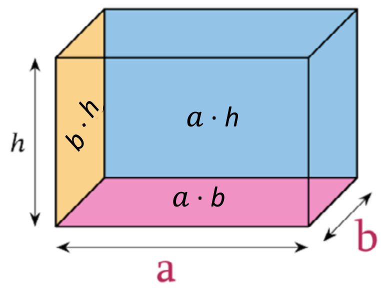
[Geogebra — ექვსკუთხა პრიზმა]

პარალელეპიპედის დიაგონალი	
AG პარალელეპილედის დიაგონალია, ის ერთ სიბრტყეში არამდებარე ორ წვეროს აერთებს. თუ შევაერთებთ, მაგალითად, A და F წერტილებს, მივიღებთ, რომ AF არის გვერდითი წახნაგის AEFB მართკუთხედის დიაგონალი. AG მონაკვეთი ფუძის მიმართ დახრილია. კუთხე AG მონაკვეთსა და ფუძის მიმართ არის ∠GAC	

პრიზმის ზედაპირის ფართობი

გავარკვიოთ, რას ითვლის პრიზმის ზედაპირის ფართობი. ცხადია, ეს არის პრიზმის ყველა წახნაგზე არსებული ფიგურების ფართობთა ჯამი. თუ განვიხილავთ წახნაგებში არსებულ ფიგურებს ერთად, მაშინ მივიღებთ ე. წ. პრიზმის შლილს.

პრიზმის ზედაპირის ფართობი ეწოდება ფუძის ფართობის და გვერდითი ზედაპირის ფართობთა ჯამს.



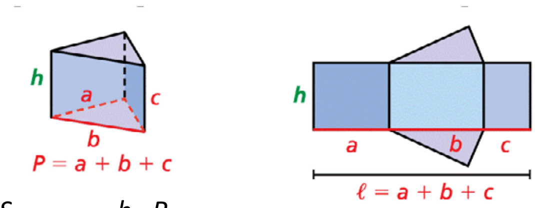
$S_{გვერდითი} = h \cdot P_{ფუძე} = 2h(a + b)$

$S_{სრული} = h \cdot P_{ფუძე} + 2S_{ფუძის\ ფართობი}$

$S_{სრული} = 2h(a + b) + 2ab$

$S_{სრული} = 2ah + 2hb + 2ab$

მართი პრიზმის გვერდითა წიბოს **ეწოდება პრიზმის სიმაღლე**. რადგან მართი პრიზმის ერთი გვერდითი წახნაგი არის მართკუთხედი, ამიტომ მისი ფართობი იქნება პრიზმის სიმაღლისა და ფუძის შესაბამისი გვერდის ნამრავლი. თუ ყველა გვერდითი წახნაგის ფართობს შევკრებთ, მაშინ **მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი** იქნება:



$S_{გვერდითი} = h \cdot P_{ფუძე}$

$S_{სრული} = h \cdot P_{ფუძე} + 2S_{ფუძის\ ფართობი}$

გამომდინარე იქიდან, რომ ფუძეებში არის სამკუთხედი, $S_{ფუძის\ ფართობი}$ = ფუძეში მყოფი სამკუთხედის ფართობს.

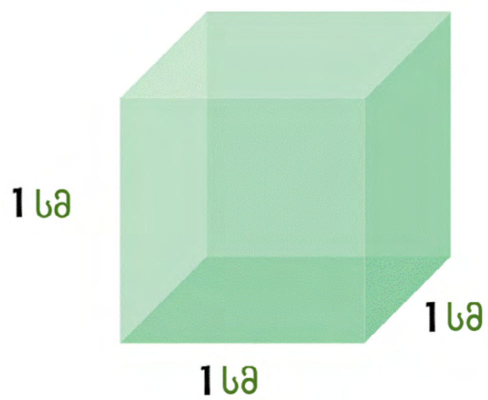
პრიზმის მოცულობა

მოცულობის ერთეული

კუბი ეწოდება ისეთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის სამივე განზომილება ერთმანეთის ტოლია, ანუ კუბის ყველა წახნაგში არის ერთმანეთის ტოლი კვადრატები.

მოცულობის ერთეულია კუბი, რომლის წიბო ერთი ერთეულის ტოლია.

დავუშვათ კუბის წიბოს სიგრძეა 1 სმ, მაშინ მისი მოცულობა იქნება **V = 1 სმ · 1 სმ · 1 სმ = 1 სმ³**



ვთქვათ, კუბის წიბოს სიგრძეა a, მაშინ კუბის ზედაპირის ფართობისა და მოცულობის ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$S_{კუბის\ ზედაპ.} = 6 \cdot a^2$

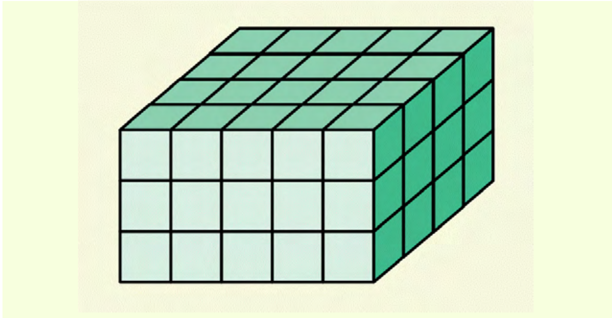
$V_{კუბი} = a \cdot a \cdot a = a^3$

განვიხილოთ ნახაზზე მოცემული მართკუთხა პრიზმა, რომელიც შედგება კუბებისგან. დავუშვათ კუბის წიბოს სიგრძე 1 სმ-ია;

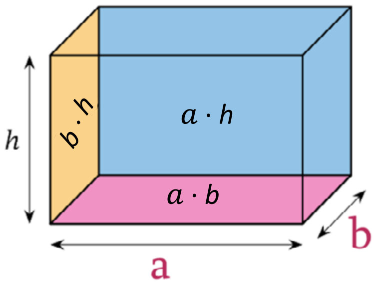
თუ დავითვლით კუბების რაოდენობას მივიღებთ, რომ სულ არის

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ კუბი

მოცემული პრიზმის მოცულობაა 120 სმ^3



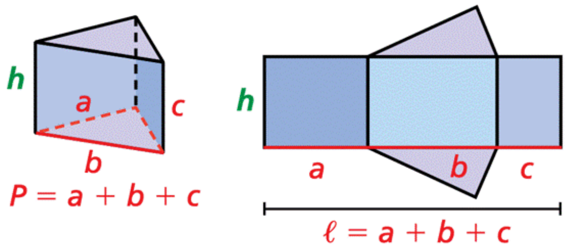
მართი პრიზმის მოცულობა ტოლია ფუძის ფართობისა და პრიზმის სიმაღლის ნამრავლის



$V = S_{ფუძ} \cdot h$

როდესაც ფუძეში არის მართკუთხედი, მივიღებთ ფორმულას

$V = S_{ფუძ} \cdot h = a \cdot b \cdot h$

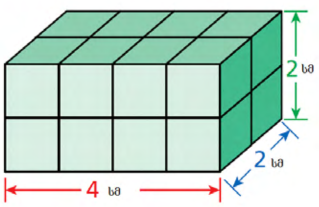


$V = S_{ფუძ} \cdot h$

მინიშნება: როდესაც ითვლით სამკუთხედის ფართობს, სამკუთხედის სიმაღლე და პრიზმის სიმაღლე არ გააიგივოთ.

ნიმუში 1

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის მიხედვით, იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.



4 სმ · 2 სმ · 2 სმ = 16 სმ^3

სიგრძე · სიგანე · სიმაღლე = მოცულობა

ფუძის ფართობი · სიმაღლე = მოცულობა

ე.ი. $V_{პარალელ.}$ = 16 სმ^3

ნიმუში 2

მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდების სიგრძეებია 7 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობია 382 სმ^2.

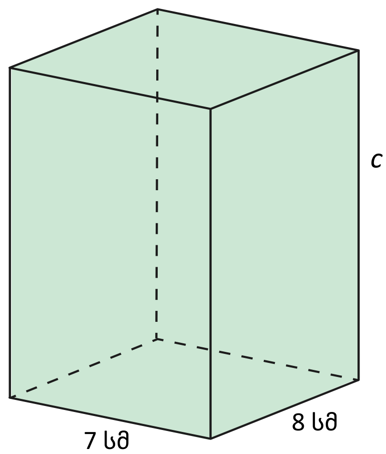
დავუშვათ მართკუთხა პარალელეპიპედის სიმაღლის სიგრძეა c სმ, მაშინ ზედაპირის ფართობის ფორმულიდან მივიღებთ:

$$382 = 2 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \cdot c + 2 \cdot 8 \cdot c$$
$$382 = 112 + 30 \cdot c$$
$$30 \cdot c = 270; \quad c = 9$$

მაშასადამე, ვიცით პარალელეპიპედის სამივე განზომილება, მაშინ მოცულობა იქნება:

$$V_{\text{პარალელ.}} = a \cdot b \cdot c = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

პასუხი: მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 504 სმ^3.



ნიმუში 3

გადამზიდ კონტეინერს აქვს მართი სამკუთხა პრიზმის ფორმა, რომლის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი. ნახატზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ ამ დახურული კონტეინერის სრული ზედაპირის ფართობი და მისი მოცულობა.

ჯერ ვიპოვოთ პრიზმის ფუძის ფართობი. რადგან სამკუთხედის გვერდია 4 სმ, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლეა 3 სმ, ამიტომ:

$S_{\text{ფუძე}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$

ხოლო მოცულობა იქნება:

$V_{\text{პარალელ.}} = 6 \cdot 15 = 90$ სმ^3.

გვერდითი ზედაპირის ფართობის მოსაძებნად უნდა ვიპოვოთ ფუძის პერიმეტრი. რადგან ფუძეში არის ტოლფერდა სამკუთხედი, ამიტომ სამკუთხედის ფერდი იქნება:

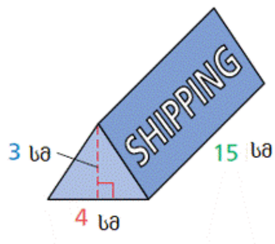
ფერდი $= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

ფუძის პერიმეტრია: $P_{\text{ფუძე}} = 4 + 2\sqrt{13}$

$S_{\text{სრული}} = H \cdot P + 2 \cdot S_{\text{ფუძე}} = 15 \cdot (4 + 2\sqrt{13}) + 2 \cdot 6 = 72 + 30\sqrt{13}$

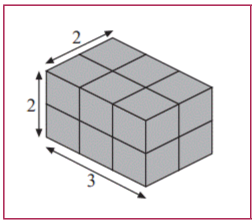
პასუხი: $V_{\text{პარალელ.}} = 90$ სმ^3 და

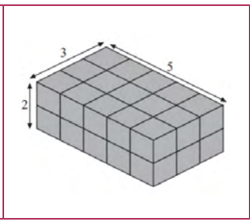
$S_{(\text{სრული})} = 72 + 30\sqrt{13}$სმ^2.

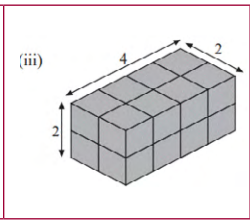


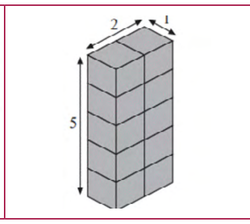
სავარჯიშოები

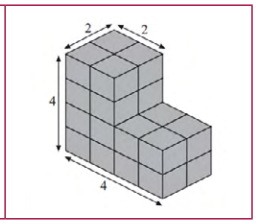
1. ბავშვებმა კუბებისგან ააწყვეს ახალი სხეული. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:

ა)


ბ)


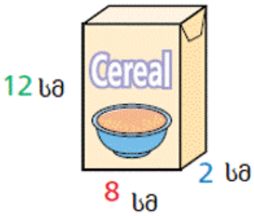
გ)


დ)


ე)


2. ყველასთვის ცნობილია სათამაშო კუბიკი, ე.წ. რუბიკის კუბიკი. მას აქვს კუბის ფორმა. დავუშვათ, კუბის წიბოა 8 სმ. იპოვეთ კუბიკის თითოეული წახნაგის ფართობი, სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

3. ბურღულეულის ყუთს აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა, რომლის ზომებია 12 სმ, 8 სმ და 2 სმ. იპოვეთ რა მაქსიმალური მოცულობის ბურღულეული შეიძლება მოთავსდეს ამ ყუთში.

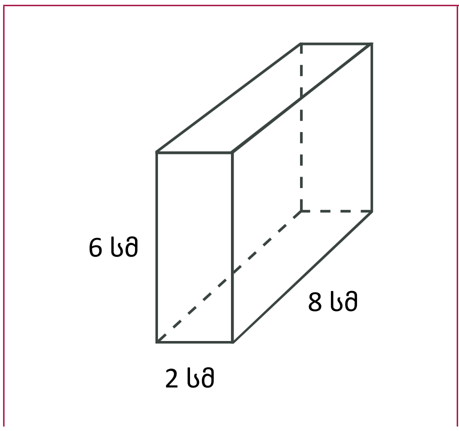


4. სასაჩუქრე ყუთს აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა. ნახატზე მითითებული ზომების მიხედვით იპოვეთ ამ ყუთის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

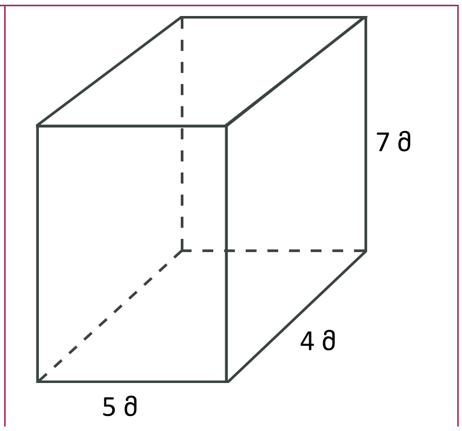
5. ნახაზებზე მოცემული მონაცემების მიხედვით, იპოვეთ მოცემული სხეულის მოცულობა და გვერდითი ზედაპირის ფართობი:

სავარჯიშოები

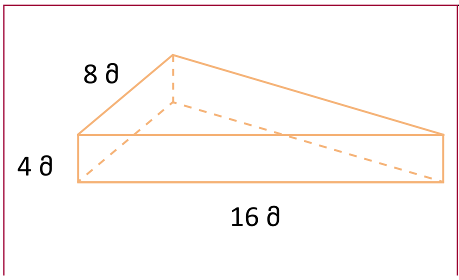
ა)



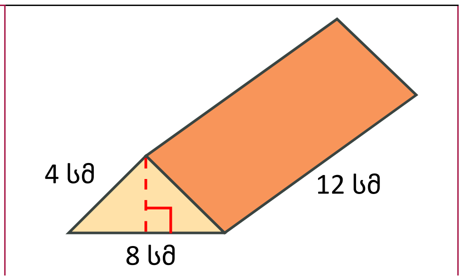
ბ)



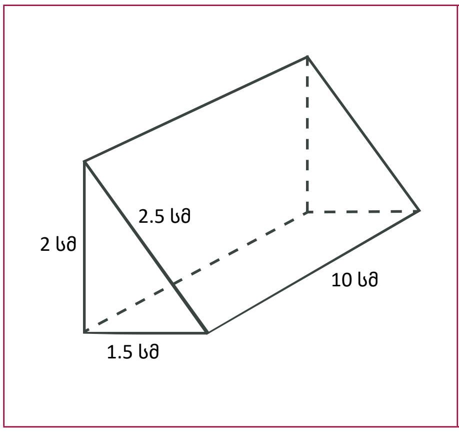
გ)



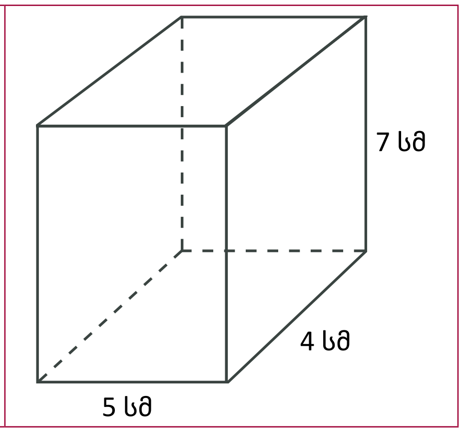
დ)



ე)



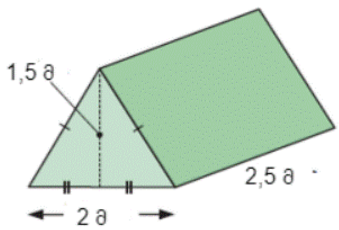
ვ)



6. ბავშვებს ლაშქრობაზე წასაღებად სჭირდებათ სამი კარავი (თითოეულის ზომა მითითებულია ნახაზზე).

ა) იპოვეთ თითოეული კარვის მოცულობა:

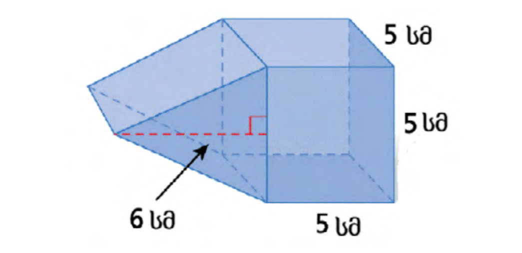
ბ) რამდენი კვადრატული მეტრი ქსოვილი დასჭირდებათ ასეთი კარვების შესაკერად?

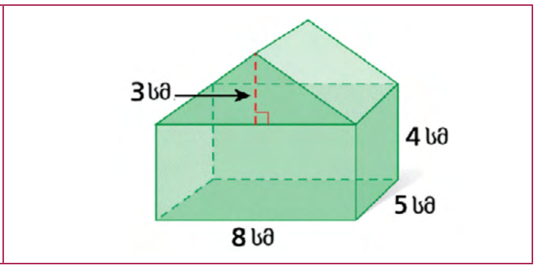


სავარჯიშოები

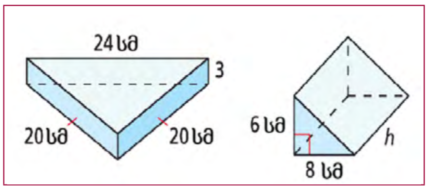
7. იპოვეთ მოცემული ფიგურების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა) ბ)



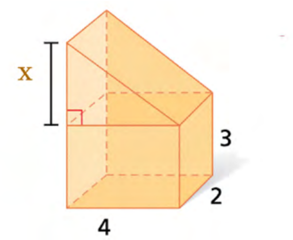


8. ნახაზზე მოცემულია ორი ტოლდიდი ($V_1 = V_2$) სამკუთხა პრიზმა. იპოვეთ მეორე პრიზმის სიმაღლე.

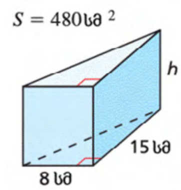


9. ნახაზზე მოცემული ფიგურის ზედაპირის ფართობი 36 სმ^2, იპოვეთ ნახაზზე აღნიშნული სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე და ფიგურის მოცულობა

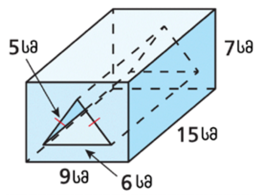
იპოვეთ ნახაზზე აღნიშნული სამკუთხა პრიზმის უცნობის გვერდის (წიბოს) სიგრძე და ფიგურის მოცულობა



10. ნახაზზე მოცემულია სამკუთხა პრიზმა, რომლის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე, თუ ზედაპირის ფართობი ტოლი არის 480 სმ^2.



11. მართკუთხა პარალელეპიპედიდან ამოჭრეს სამკუთხა პრიზმა, რომლის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედია. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.



12. ლაშქრობაში წასულმა მეგობრებმა გაშალეს კარავი, რომლის ზომები მითითებულია ნახატზე. იპოვეთ კარვის მოცულობა და კარვის დამზადებისთვის საჭირო მასალის ფართობი.

სავარჯიშოები

13. ელენემ გადაწყვიტა საკუთარ ეზოში საცურაო აუზის აშენება, რომელსაც ნახატზე ნაჩვენები მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა აქვს. აუზის სიმაღლეა 2 მ, ხოლო ფსკერის ზომებია – 10 მ და 6 მ. მოსაპირკეთებლად ელენემ უნდა შეიძინოს სპეციალური ფილები. იპოვეთ, რა ფართობის ფილა უნდა შეიძინოს ელენემ და განსაზღვრეთ გაკეთებული აუზის ტევადობა.

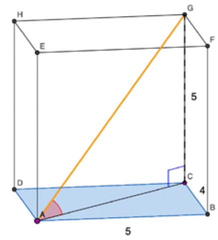
14. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი 240 სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი თუ სიმაღლე 10 სმ-ია; იპოვეთ მოცემული პრიზმის მოცულობა.

15. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი 2.4 სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე თუ ფუძის გვერდის სიგრძე 0.4 სმ-ია.

16. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი $360\sqrt{3}$ სმ^2-ია, იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი თუ სიმაღლე 10 სმ-ია.

17. წესიერ სამკუთხა და ოთხკუთხა პრიზმებს ტოლი სიმაღლეები აქვთ, ფუძეში მყოფი ფიგურის გვერდის სიგრძეც ტოლია; რომლის ზედაპირის ფართობი იქნება მეტი და რამდენით? რომლის მოცულობა იქნება მეტი და რამდენით?

18. გამოწვევა: მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი AG პარალელეპილედის დიაგონალია, ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ AG-ს სიგრძე; იპოვეთ ΔACG-ს ფართობი.



19. გამოწვევა: მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ:

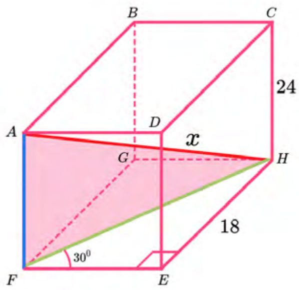
ა) x;

ბ) AH;

გ) ΔAFH-ის ფართობი;

დ) მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი;

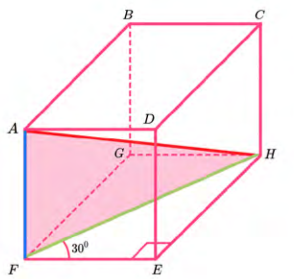
ე) მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა.



25. გამოწვევა: **მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი** შეადგინეთ მე-20 ამოცანის მსგავსი ამოცანა, ამოხსენით მეგობრებთან ერთად.

განიხილეთ სხვადასხვა ვარიანტი.

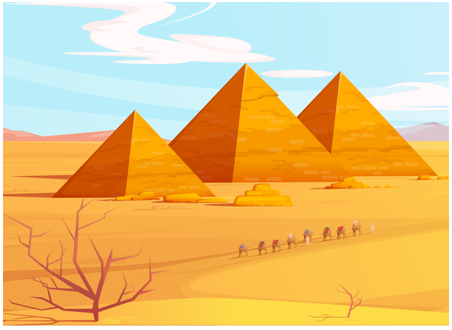
სასურველია ის ინფომაცია შეიტანოთ, რომელიც საკმარისი იქნება ამოცანის ამოხსნისათვის.



5.3. პირამიდა, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

ჩვენ ყველას გვახსოვს ეგვიპტის პირამიდები, რომელთაც გეომეტრიული ფიგურის ფორმა აქვს.

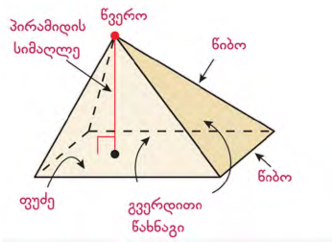
პირამიდა. პირამიდა ეწოდება ისეთ მრავალწახნაგას, რომელსაც ფუძეში აქვს რაღაც ბრტყელი მრავალკუთხედი (სამკუთხედი, ოთხკუთხედი და ა.შ.), ხოლო ყველა დანარჩენი წახნაგი წარმოადგენს ამ მრავალკუთხედის გვერდებზე აგებულ საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებს.

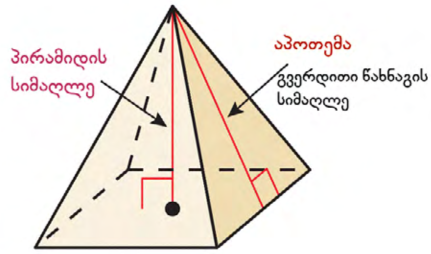


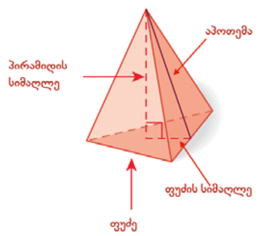
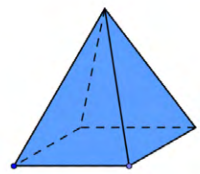
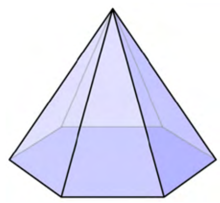
ამ სამკუთხედებს უწოდებენ პირამიდის გვერდითა წახნაგებს, ხოლო საერთო წვეროს ეწოდება **პირამიდის წვერო.** პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყისადმი დაშვებულ მართობს ეწოდება **პირამიდის სიმაღლე.** იმის მიხედვით, თუ როგორი მრავალკუთხედია მოთავსებული პირამიდის ფუძეში, პირამიდას ეწოდება შესაბამისი სახელი. თუ პირამიდის ფუძეში არის სამკუთხედი, მაშინ მას ეწოდება სამკუთხა პირამიდა. თუ ფუძეშია ოთხკუთხედი, მაშინ ოთხკუთხა პირამიდა და ა.შ.

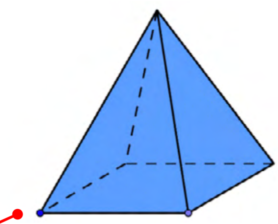
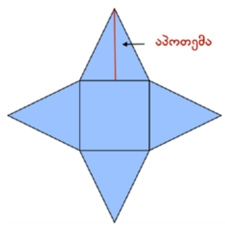
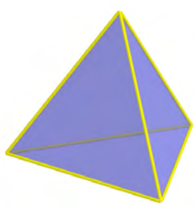
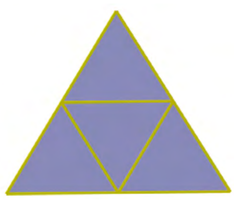
წესიერი პირამიდა, წესიერ პირამიდაში ფუძეში არის წესიერი მრავალკუთხედი, მოცემულ შემთხვევაში, კვადრატი.

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა





სამკუთხა პირამიდა	ოთხკუთხა პირამიდა	ექვსკუთხა პირამიდა
		

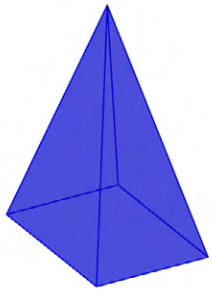
ფიგურა	შლილი
	 პირამიდის შლილი
სამკუთხა პირამიდა 	 სამკუთხა პირამიდის შლილი

პირამიდის ფართობი

პირამიდის **გვერდითი ზედაპირის ფართობის** მოსაძებნად საჭიროა ცალ-ცალკე გამოვთვალოთ ყველა გვერდითა წახნაგის ფართობები და შემდეგ ვიპოვოთ მათი ჯამი.

პირამიდის **სრული ზედაპირის ფართობი** ტოლია გვერდითი ზედაპირის ფართობს დამატებული ფუძეში მდებარე ფიგურის ფართობი.

წესიერ სამკუთხა პირამიდაში სიმაღლე გადის ფუძის სიმაღლეების (მედიანების, ბისექტრისების) გადაკვეთის წერტილში. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდაში სიმაღლე გადის ფუძეში მდებარე კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში.

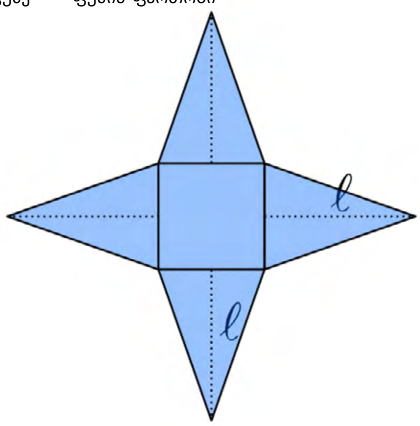


$S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდითი}} + S_{\text{ფუძე}}$

წესიერი პირამიდის ზედაპირის ფართობი

$S_{\text{გვერდითი}} = \frac{1}{2} l \cdot P_{\text{ფუძე}}$

$S_{\text{სრული}} = \frac{1}{2} l \cdot P_{\text{ფუძე}} + S_{\text{ფუძის ფართობი}}$

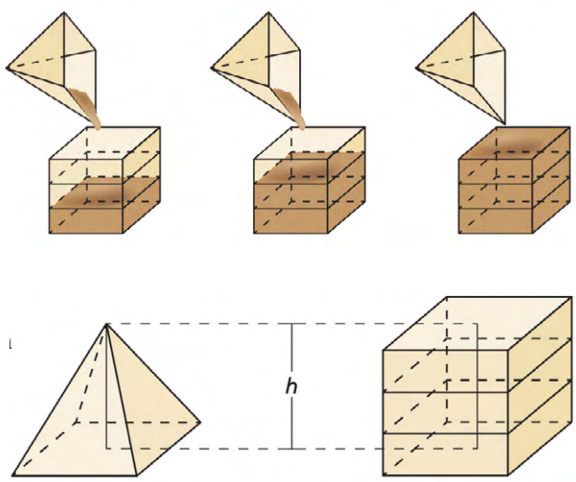


პირამიდის მოცულობა

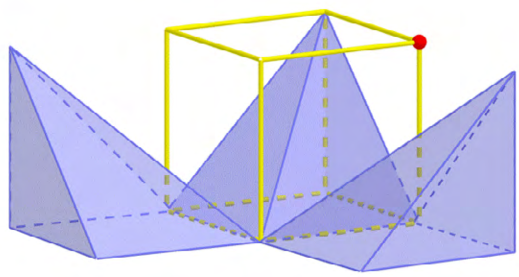
თუ განვიხილავთ მართ პრიზმას და პირამიდას, რომელთაც ფუძეში ერთი და იმავე ფორმის და ზომის მრავალკუთხედი აქვთ, და მათი სიმაღლეები ტოლია, მაშინ პირამიდის მოცულობა, პრიზმის მოცულობის მესამედია.

$V_{\text{პირამიდა}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{ფუძე}} \cdot h$

ვიზუალიზაცია 1



ვიზუალიზაცია 2



მოცულობა – სიმულაცია

ნიმუში 1

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა 12 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი იქნება:

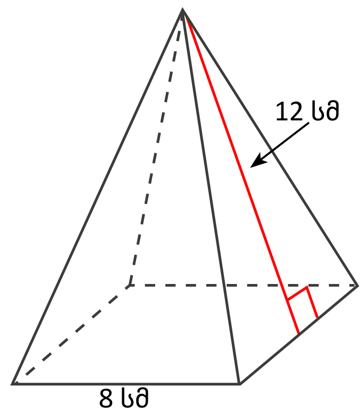
$S_{გვერდითი} = \frac{1}{2} \cdot აპოთემა \cdot P_{ფუძე} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 32 = 192$

ფუძის ფართობი იქნება: $S_{ფუძე} = 8 \cdot 8 = 64$

პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობია:

$S_{სრული} = S_{გვერდითი} + S_{ფუძე} = 192 + 64 = 256$

პასუხი: პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობია 256 სმ^2.



ნიმუში 2

ოთხკუთხა პირამიდის ფუძე არის მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 12 სმ და 18 სმ, ხოლო პირამიდის სიმაღლეა 14 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

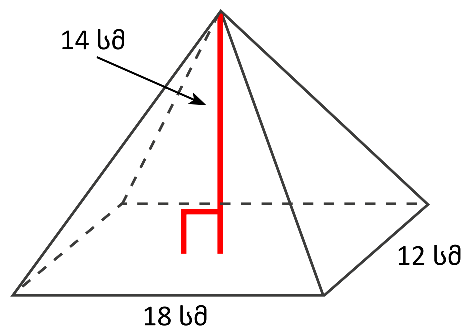
პირამიდის ფუძის ფართობი იქნება:

$$S_{ფუძე} = 12 \cdot 18 = 216$$

პირამიდის მოცულობაა:

$$V_{პირამიდა} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{ფუძე} = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot 216 = 1008$$

პასუხი: პირამიდის მოცულობაა 1008 სმ^3.



ნიმუში 3 — მათემატიკის მოყვარულთათვის

წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო აპოთემის სიგრძეა 10 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ამოცანის პირობით AB = BC = AC = 8, ე.ი. BK = 4 და პითაგორას თეორემით მივიღებთ:

$KC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

O არის სამკუთხედში მედიანების გადაკვეთის წერტილი, ამიტომ:

$$KO = \frac{1}{3} \cdot KC = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}$$

სამკუთხედ MKO-დან მივიღებთ:

$$MO = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$$

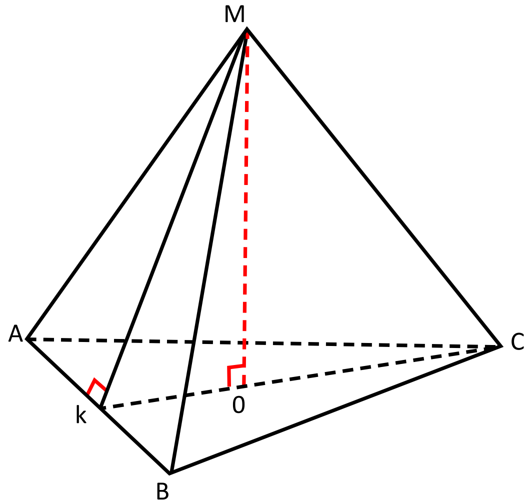
პირამიდის ფუძის ფართობი იქნება:

$$S_{ფუძე} = \frac{1}{2} \cdot KC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = 16\sqrt{3}$$

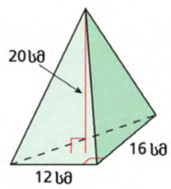
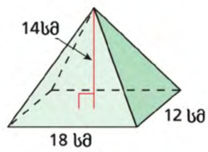
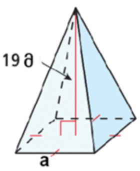
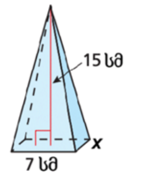
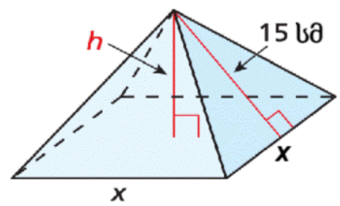
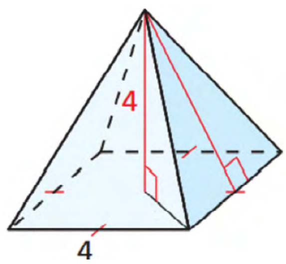
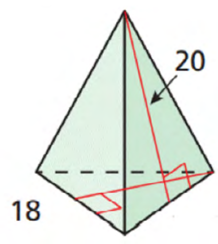
პირამიდის მოცულობაა:

$$V_{პირამიდა} = \frac{1}{3} \cdot MO \cdot S_{ფუძე} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot 16\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$$

პასუხი: პირამიდის მოცულობაა $\frac{32\sqrt{71}}{\sqrt{3}}$ სმ³.

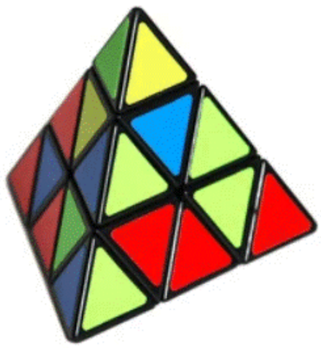


სავარჯიშოები

1. იპოვეთ მოცემული პირამიდების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.	ა)  ბ) 
2. ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ პირამიდის ფუძის გვერდი და ზედაპირის ფართობი.	 
3. გამოწვევა: ნახაზზე მოცემულია წესიერი ოთხკუთხა პირამიდა. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე და მისი მოცულობა.	
4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ყველა წიბო 4-ის ტოლია. იპოვეთ ამ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.	
5. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 18 სმ, ხოლო აპოთემაა – 20 სმ. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.	

სავარჯიშოები

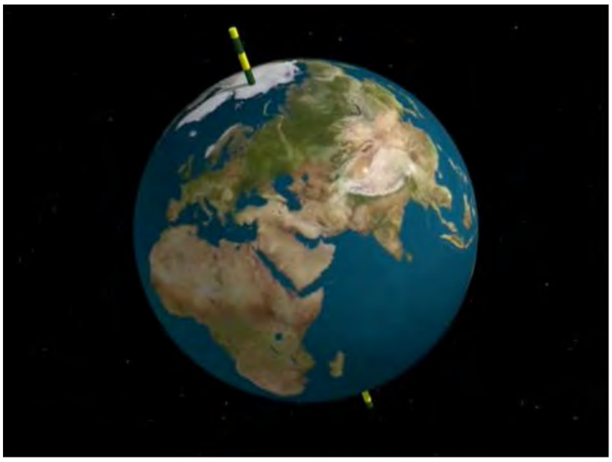
6. ლუვრის მუზეუმის ეზოში დგას შუშისგან გაკეთებული წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფორმის ნაგებობა. ამ პირამიდის სიმაღლეა 22 მ, ხოლო ფუძის გვერდის სიგრძეა 36 მ. იპოვეთ რა ფართობის მინა არის გამოყენებული ამ პირამიდის აგებისთვის. ასევე იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.



7. მოზარდებისთვის საყვარელ თავსატეხ სათამაშოს აქვს წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფორმა, რომლის ყველა წიბო ტოლია და უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ ამ პირამიდის ზედაპირის მოცულობა.

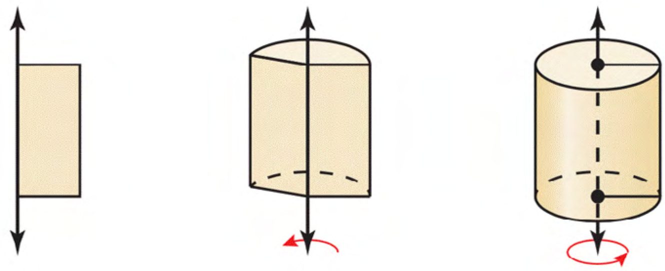
5.4. ბრუნვითი ფიგურები, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

ყველამ ვიცით, რომ დედამიწა რომელზეც ვცხოვრობთ ბრუნავს ღერძის გარშემო.



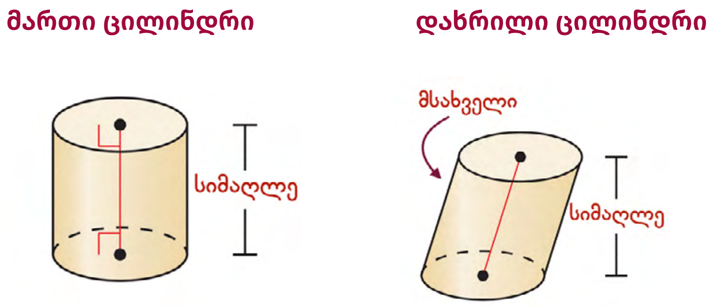
? **საკვანძო კითხვა:** რას ნიშნავს და რას ეწოდება ბრუნვითი სხეულები?

მოცემულ გაკვეთილში განვიხილოთ სივრცული ფიგურები, რომლებიც მიიღებიან ზოგიერთი ბრტყელი ფიგურის ბრუნვით საკუთარი გვერდის გარშემო.



მართი ცილინდრი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხეული, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი გვერდის, როგორც ღერძის გარშემო

ზოგადად, ცილინდრის ზედაპირი შედგება ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებულ ყველა იმ ურთიერთპარალელური მონაკვეთებისგან, რომლებიც ერთ-ერთ სიბრტყეში მდებარე წრეს კვეთს. მონაკვეთს, რომელიც ერთ ბოლოს აერთებს მეორესთან, **ცილინდრის მსახველი** ეწოდება.



ცილინდრის რადიუსი ეწოდება მის ფუძეში მყოფი წრის რადიუსს.

ცილინდრის ფუძეებს შორის მანძილს ეწოდება **ცილინდრის სიმაღლე.**

კონუსი

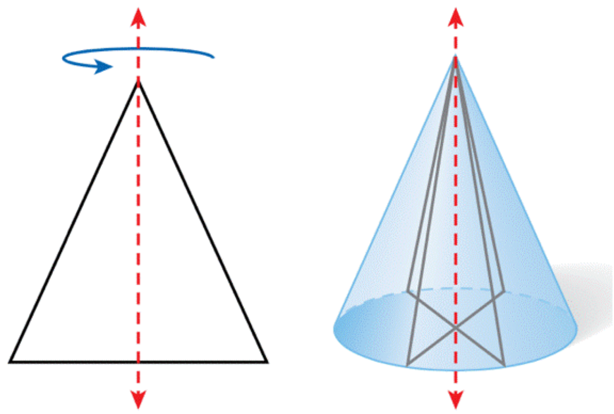
განვიხილოთ ტოლფერდა სამკუთხედი, გავავლოთ სიმაღლე ფუძის მიმართ და მოვაბრუნოთ სამკუთხედი სიმაღლის მიმართ, მივიღებთ **მართ კონუსს.**

სხეულს, შექმნილს ყველა იმ მონაკვეთისაგან, რომელიც მოცემულ წერტილს, კონუსის წვეროს აერთებს, რომელიმე წრის კონუსის ფუძის წერტილებთან, **წრიული კონუსი** ეწოდება; მოცემული წერტილი არ მდებარეობს იმავე სიბრტყეში, რომელშიც არის წრე.

მონაკვეთებს, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილებთან აერთებს, ეწოდება მსახველები.

კონუსს ეწოდება მართი, თუ კონუსის წვეროსა და ფუძის ცენტრის შემაერთებელი წრფე ფუძის სიბრტყის მართობულია.

კონუსი



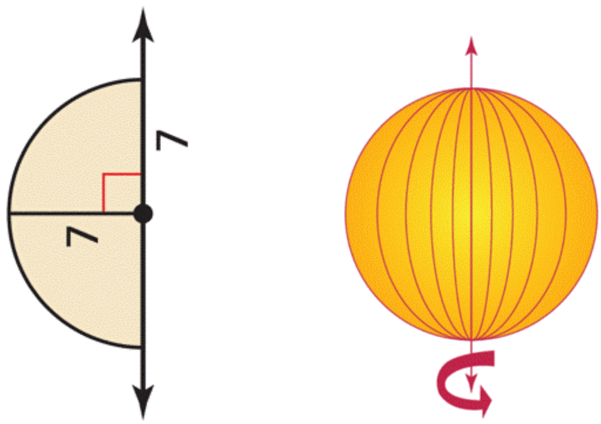
ბირთვი

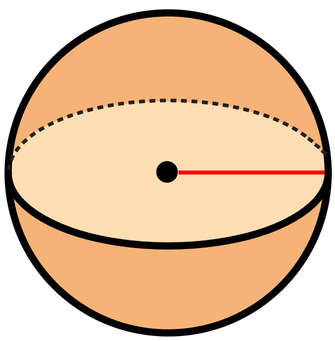
ბირთვი მიიღება ნახევარწრის მობრუნებით დიამეტრის მიმართ, რომელიც მისი ღერძია.

ბირთვი ეწოდება ყველა იმ წერტილისაგან შედგენილ ფიგურას, რომლის დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება;

მოცემულ წერტილს ეწოდება ბირთვის ცენტრი, ხოლო მანძილს – რადიუსი.

ბირთვი





ბირთვის საზღვარს ეწოდება ბირთვის ზედაპირი, ანუ **სფერო.**

მინიშნება: სასკოლო მასალაში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მართ ცილინდრს და მართ კონუსს.

ცილინდრის შლილი, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

ცილინდრი

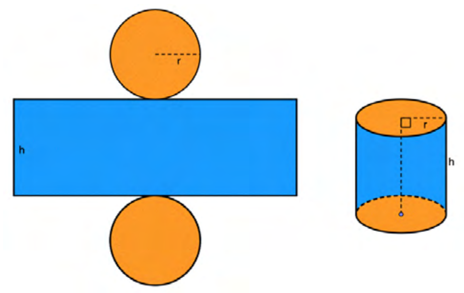
ზედაპირის ფართობი

$$S_{\text{გვერდითი}} = 2\pi r \cdot h$$

$$S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდითი}} + 2S_{\text{ფუძე}}$$

$$S_{\text{სრული}} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$V_{\text{ცილინდრი}} = S_{\text{ფუძე}} \cdot h = \pi r^2 h$$

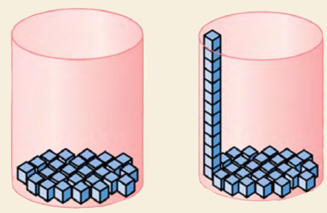


მართკუთხედის სიგრძე ემთხვევა წრეწირის სიგრძეს და $= 2\pi r$; მართკუთხედის მეორე გვერდი კი ცილინდრის სიმაღლეს ემთხვევა.

Geogebra – იხილეთ შლილი

ჩვენ ვიცით, რომ მოცულობის საზომი ერთეულია კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1.

$$V_{\text{ცილინდრი}} = S_{\text{ფუძე}} \cdot h = \pi r^2 h$$



ნიმუში 1

ცილინდრის ფუძის რადიუსია 3 სმ, ხოლო სიმაღლეა 6 სმ. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი იქნება:

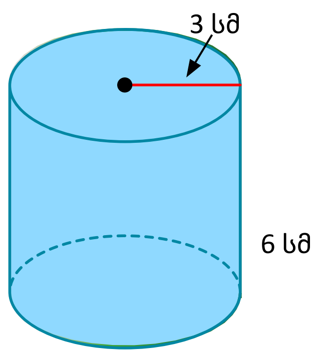
$S_{\text{სრული}} = 2\pi R \cdot H + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 + 2\pi \cdot 9 =$

$= 36\pi + 18\pi = 54\pi$

ცილინდრის მოცულობაა:

$V_{\text{ცილინდრი}} = \pi R^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$

პასუხი: ცილინდრის ზედაპირის ფართობია 54π სმ^2, მოცულობაა 54π სმ^3.



ნიმუში 2

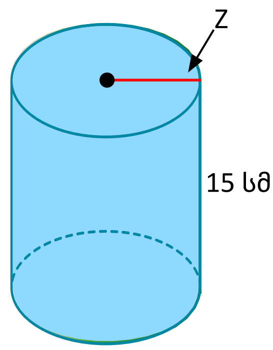
ცილინდრის მოცულობაა 240π სმ^3, ხოლო სიმაღლეა 15 სმ. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის რადიუსი.

კონუსის მოცულობაა:

$$V_{\text{ცილინდრი}} = \pi R^2 H = \pi \cdot z^2 \cdot 15 = 240\pi$$

გვექნება: $z^2 = 16$ და $z = 4$

პასუხი: ცილინდრის ფუძის რადიუსია 4 სმ.



კონუსის შლილი, ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

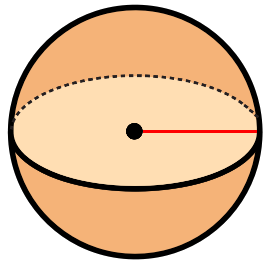
კონუსის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

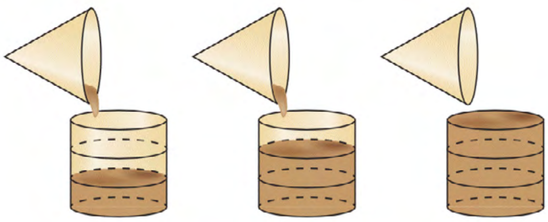
$S_{\text{გვერდითი}} = \pi r l$

$S_{\text{სრული}} = S_{\text{გვერდითი}} + S_{\text{ფუძე}} = \pi r l + \pi r^2$

თუ განვიხილავთ მართ ცილინდრს და კონუსს, რომელთაც ფუძეში ერთი და იმავე ზომის წრე აქვთ, და მათი სიმაღლეები ტოლია, მაშინ კონუსის მოცულობა, ცილინდრის მოცულობის მესამედია.

$V_{\text{კონუსი}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{ფუძე}} \cdot h = \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$





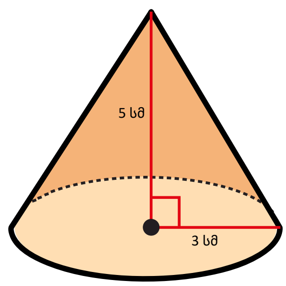
ნიმუში 3

კონუსის ფუძის რადიუსია 3 სმ, ხოლო კონუსის სიმაღლის სიგრძეა 5 სმ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

ცილინდრის მოცულობაა:

$$V_{\text{კონუსი}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi$$

პასუხი: კონუსის მოცულობაა 15π სმ^3.



ნიმუში 4

კონუსის ფუძის რადიუსია 10 სმ, ხოლო მსახველის სიგრძეა 26 სმ. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი იქნება:

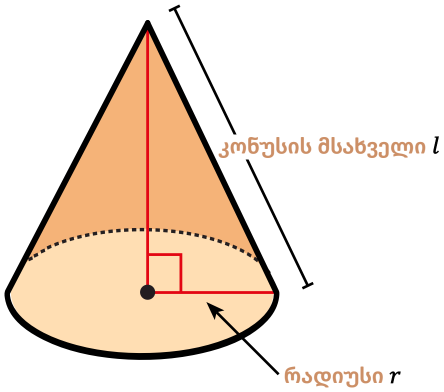
$S_{სრული} = \pi r l + \pi r^2 = \pi \cdot 10 \cdot 26 + \pi \cdot 100 = 260\pi + 100\,\pi = 360\pi$

კონუსის მოცულობის გამოსათვლელად გვჭირდება კონუსის სიმაღლე, რომელიც იქნება:

$H = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$

$V_{კონუსი} = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 24 = 800\pi$

პასუხი: კონუსის ზედაპირის ფართობია 360π სმ³.



ბირთვის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა

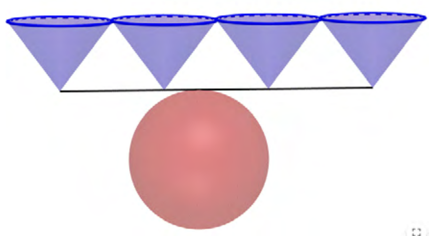
ბირთვის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$S_{ზედაპირი} = 4\pi r^2$

ჩვენ შეგვიძლია დავაკავშიროთ ბირთვის და კონუსის მოცულობები:

$V_{ბირთვი} = \frac{4}{3}\,\pi r^3$

საკვლევი აქტივობა: გამოიკვლიეთ რისი ტოლი უნდა იყოს ბირთვის რადიუსი და კონუსის ფუძეში მყოფი წრის რადიუსი? ასევე, სიმაღლე?



ნიმუში 5

ბირთვის ზედაპირის ფართობია 30π მ². იპოვეთ ბირთვის რადიუსი და მოცულობა.

ბირთვის ზედაპირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულიდან მივიღებთ:

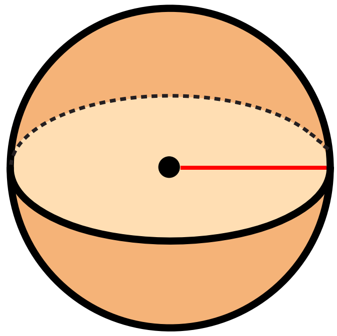
$$S_{\text{ზედაპირი}} = 4\pi r^2 = 30\pi$$

$$r^2 = \frac{30}{4},\ r = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

ბირთვის მოცულობა იქნება:

$$V_{\text{ბირთვი}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{30\sqrt{30}}{8} = 5\sqrt{30}\,\pi$$

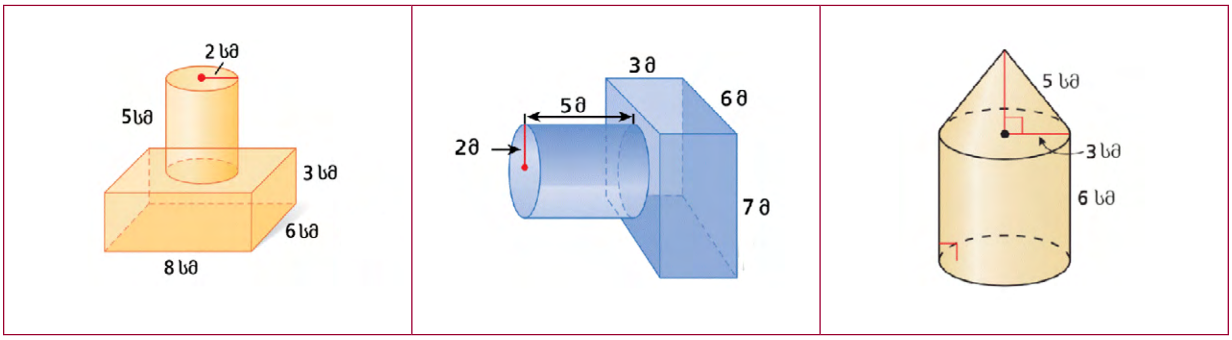
პასუხი: ბირთვის რადიუსია $\frac{\sqrt{30}}{2}$ მ, ხოლო მოცულობაა $5\sqrt{30}\,\pi$ მ³.



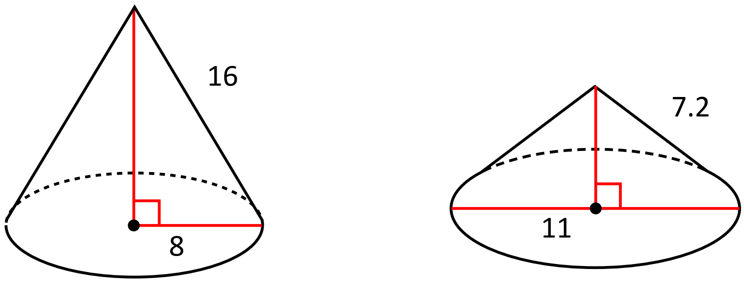
სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ნახაზზე მოცემული ფიგურების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:

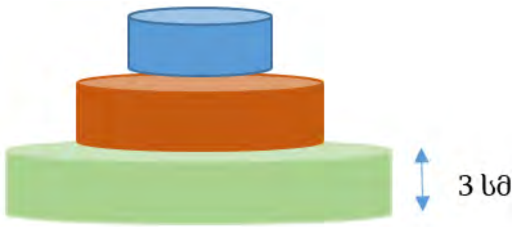
ა) ბ) გ)



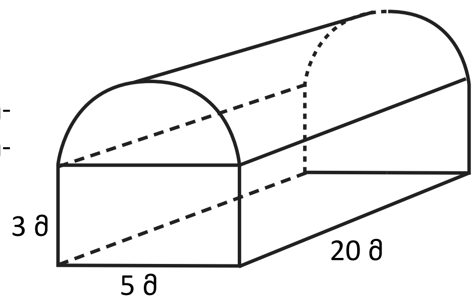
2. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ თითოეული კონუსის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:



3. საბავშვო სათამაშო, „პირამიდა" შედგება სხვადსხვა დიამეტრის და ერთი სიმაღლის მქონე ცილინდრებისაგან. იპოვეთ სათამაშოს მოცულობა თუ ყველაზე დიდი ცილინდრის დიამეტრია 18 სმ, ყოველი მომდევნოსი წინაზე 1,5-ჯერ პატარაა.

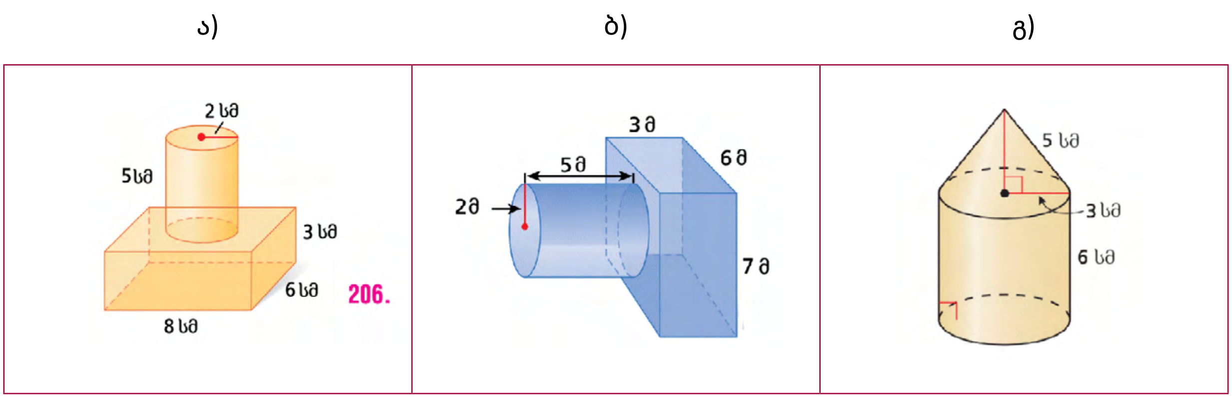


4. მოცემული სხეული შედგება პრიზმისა და მასზე მოთავსებული ნახევარცილინდრისაგან. გამოთვალეთ მისი მოცულობა და ზედაპირის ფართობი:



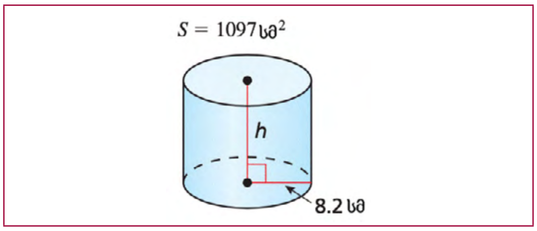
5. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ ფიგურების მოცულობა და ზედაპირის ფართობი

სავარჯიშოები

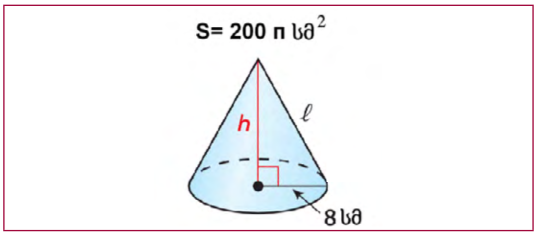


6. იპოვეთ მოცემული ბირთვის მოცულობა და სფეროს ფართობი

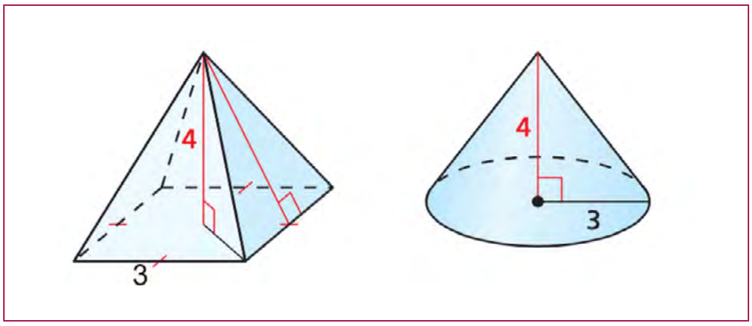
7. ცილინდრის ფუძის რადიუსია 8,2 სმ, ზედაპირის ფართობი კი – 1097 სმ^2-ია. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე.



8. **გამოწვევა:** კონუსის ფუძის რადიუსია 8 სმ, ზედაპირის ფართობი კი – 200π სმ^2-ია. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე და მსახველი.



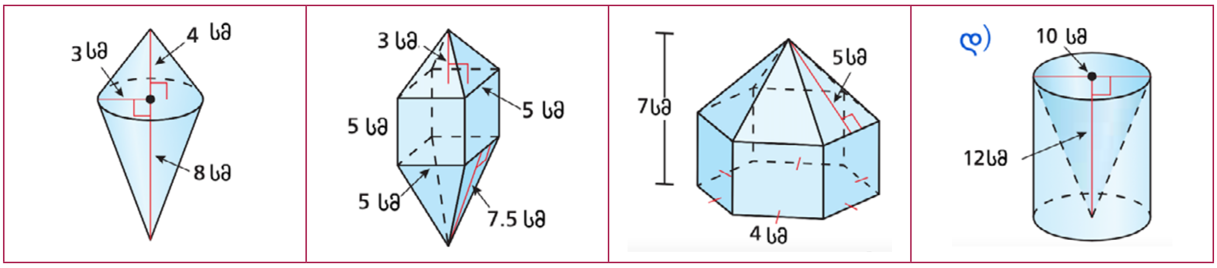
9. წესიერ ოთხკუთხა პირამიდას და კონუსს ტოლი სიმაღლეები აქვთ. იპოვეთ მათი მოცულობების და გვერდითი ზედაპირების შეფარდება $\frac{V_1}{V_2} = ?$ $\frac{S_1}{S_2} = ?$



სავარჯიშოები

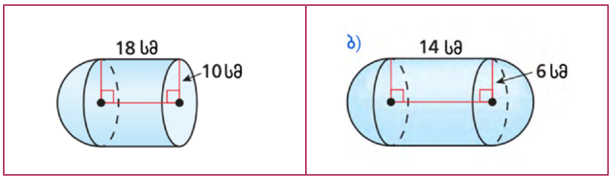
10. **გამოწვევა:** ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ თითოეული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა) ბ) გ) დ)



11. **გამოწვევა:**ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ ფიგურების ზედაპირის ფართობი და მოცულობა:

ა) ბ)



12. კინოთეატრში პოპკორნი იყიდება ცილინდრის ფორმის ყუთებით. ნახაზზე მითითებული ზომების მიხედვით განსაზღვრეთ ამ ყუთის ტევადობა.

13. საცურაო აუზს აქვს ცილინდრის ფორმა, რომლის სიმაღლეა 1.5 მ, ხოლო რადიუსია 3 მ. იპოვეთ რა მოცულობის წყალი დაგვჭირდება აუზის ასავსებად.

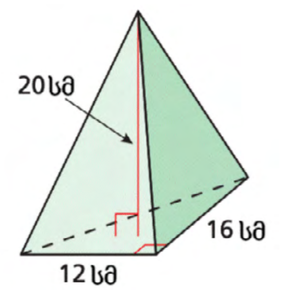
14. დაბადების დღეზე თამუნამ იყიდა სახალისო ქუდი, რომელიც ნახატზეა გამოსახული. ქუდს აქვს კონუსის ფორმა, რომლის სიმაღლეა 30 სმ, ხოლო რადიუსია 8 სმ. იპოვეთ რა ფართობის მასალა არის საჭირო ასეთი 5 ქუდის დასამზადებლად.

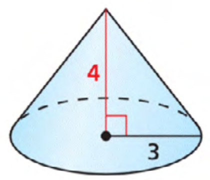
15. ტყავის ბურთის დამზადებისას რჩება ნარჩენები, რომელიც არის ბურთის ზედაპირის ფართობის 15%. რა ფართობის ტყავია საჭირო ერთი ბურთის დასამზადებლად, თუ ცნობილია რომ ბურთის რადიუსია 10 სმ.

16. კინოთეატრში პოპკორნი იყიდება კონუსის ფორმის ყუთებით. ცნობილია, რომ 1 სმ^3 პოპკორნის წონაა 8 გრ. სურათზე მითითებული ზომების მიხედვით დაადგინეთ სავსე ყუთში მოთავსებული პოპკორნის წონა.

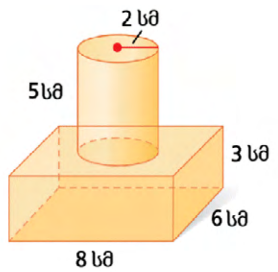
ტესტის ნიმუში:

1. იპოვეთ მოცემული ფიგურის ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

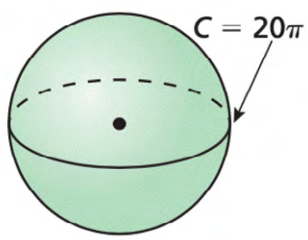




2. იპოვეთ მოცემული ფიგურის მოცულობა.



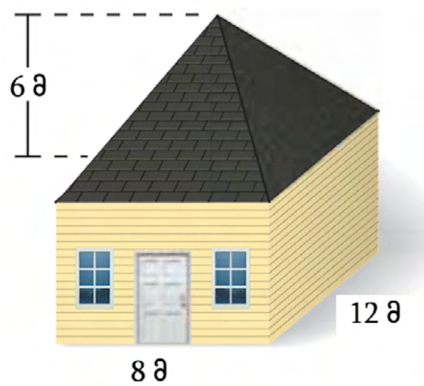
3. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა და სფეროს ფართობი.



4. ნახაზზე მოცემულია სახლის მოდელი:

საჭიროა სახლის მოპირკეთება, რისთვისაც სახლის მფლობელმა უნდა დაადგინოთ: სახლის ზედაპირის ფართობი.

ჩათვალეთ, რომ სახლის გარედან შესაღებად საჭირო საღებავის 1 ქილის ღირებულებაა 25.5 ლარი; 1 ქილა ღებავს 40 მ^2-ს; რამდენი ქილა საღებავი დასჭირდება სახლის მფლობელს? რა დაჯდება სახლის გარედან შეღებვა?



ლოგიკა და გეომეტრია

პირველი არხი, & საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინიტრო. (2020). პირველი არხი ტელესკოლა - YouTube. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv

პირველი არხი. (2018). როგორ და რა სიჩქარით მოძრაობს დედამიწა. 1TV. https://1tv.ge/news/ro-gor-da-ra-sichqarit-modzraobs-dedamiwa/

Desmos. (2023). Desmos.com. https://www.desmos.com/

GeoGebra. (2018). GeoGebra. https://www.geogebra.org

Mathigon. (2022). Mathigon – Textbook of the Future. Mathigon. https://mathigon.org/