პროფესიული უნარების სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ლოგიკა და გეომეტრია

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Swiss Agency for Development
and Cooperation SDC

პროფესიული უნარების სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

მათემატიკური წიგნიერება

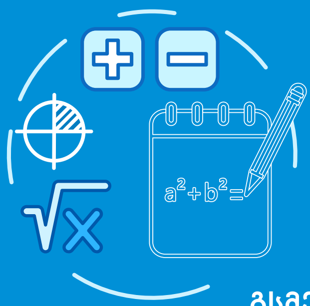
თავი III

— ფორმალური ლოგიკის საწყისები

თანამედროვე, სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალი ინჟინრები და მეცნიერები, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკას კარგად უნდა ფლობდნენ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რომლებიც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველიცაა, რომელიც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

III. დავალების წარდგენა



გსმენიათ, თუ არა

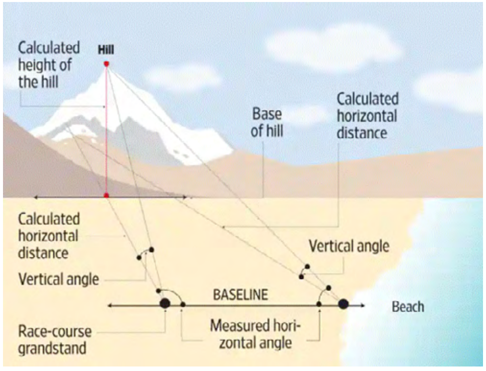
დიდ ტრიგონომეტრიულ კვლევაზე, რომელიც მიმდინარეობდა 1802 წლიდან 1871 წლამდე?

კვლევის მიზანი იყო ინდოეთში სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვა. სამეცნიერო ექსპედიციას ხელმძღვანელობდა ჯორჯ ევერესტი, გუნდმა სხვადასხვა მწვერვალის გაზომვის შედეგად დაადგინა, რომელი იყო უმაღლესი მწვერვალი, რომელსაც მოგვიანებით ექსპედიციის ხელმძღვანელის პატივსაცემად **ევერესტი** ეწოდა.

კომპლექსური დავალება

რეკომენდაცია: აღნიშნული კომპლექსური დავალება ეხება მთლიან ქვეთემას.

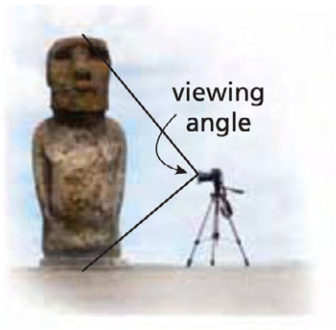
ბრტყელი ფიგურები და ტრიგონომეტრია



ნახაზი 1

ქვემოთ ნახაზ 1-ზე მოცემულია თუ რა მათემატიკური მოდელი შექმნეს მეცნიერებმა სიმაღლის დასადგენად. იქიდან გამომდინარე, რომ ადგილი მიუვალი იყო და არ იყო ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, მეცნიერებს დასჭირდათ სხვადასხვა მანძილის და კუთხის გაზომვა და ერთმანეთთან დაკავშირება.

ხელსაწყოს, რომლითაც კუთხეს ზომავდნენ, ერქვა თეოდოლიტი, რომლის თანამედროვე და გაუმჯობესებულ მოდელებს დღემდე იყენებენ სივრცეში სხვადასხვა კუთხის დასადგენად.

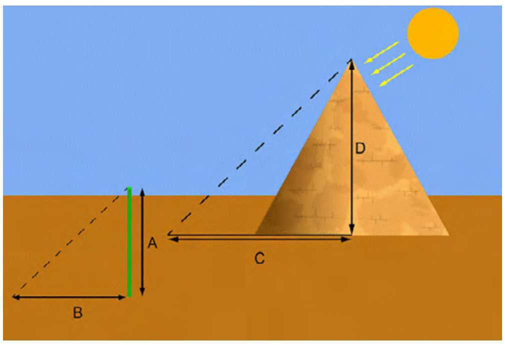


გაგრძელება

III. დავალების წარდგენა

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ დაადგინეს ძველად ეგვიპტეში პირამიდის სიმაღლე. მათ მოიფიქრეს ძალიან მოსახერხებელი გეგმა, 1 ერთეულის მქონდე სიგრძის ჯოხით და მზის სხივების დახმარებით შეძლეს მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომელიც პირამიდის სიმაღლის დადგენაში დაეხმარათ.

შენიშვნა: იმ დროს ჯოხის სიგრძე იზომებოდა მათი ერთეულით.



თანამედროვე გაზომვითი ხელსაწყოებით გაზომვის შემდეგ დადგინდა, რომ ეგვიპტელებს საკმაოდ მაღალი სიზუსტით ჰქონდათ დადგენილი პირამიდის სიმაღლე.

შეგახსენებთ, რომ მათ გაზომვებში ასევე დასჭირდათ სამკუთხედების მსგავსების თვისებების ცოდნა.

კომპლექსური დავალება

ბრტყელი ფიგურები და ტრიგონომეტრია

პირამიდა იდგა მეტნაკლებად სწორ ზედაპირზე და ევერესტთან შედარებით უფრო მოსახერხებელი იყო მისი სიმაღლის დადგენა სამკუთხედების მსგავსებით.

ევერესტი მიუვალი მწვერვალია, იქ ძალიან ძნელი იქნებოდა ენახათ ჰორიზონტალური ზედაპირი და იგივე მეთოდის გამოყენებით გაეზომათ მთის სიმაღლე. ამიტომ მეცნიერებმა მიმართეს სხვა ცოდნას, მათ გამოიყენეს ცოდნა ტრიგონომეტრიიდან.

თქვენი დავალება

1. დაადგინოთ, როგორ შეიძლება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით ობიექტის სიმაღლის დადგენა.
2. როგორ შეიძლება კუთხის ზომის დადგენა თეოდოლიტის მეშვეობით, ასევე გამოიკვლიოთ კუთხის საზომი სხვადასხვა ხელსაწყო და მეთოდი.
3. გამოთვალოთ რომელიმე ობიექტის სიმაღლე, როგორც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით, ასევე მსგავსებით და შეადაროთ სიზუსტე.
4. შეადგინოთ გეგმა, რომელიც აღწერს, როგორ გაზომეს მეცნიერება ევერესტის სიმაღლე და აწარმოოთ შესაბამისი გამოთვლები.

დავალება წარმოადინეთ რეფერატის სახით, რომელშიც წარმოდგენილი იქნება როგორც ნახაზები, ასევე, ანგარიშის ფურცელი.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

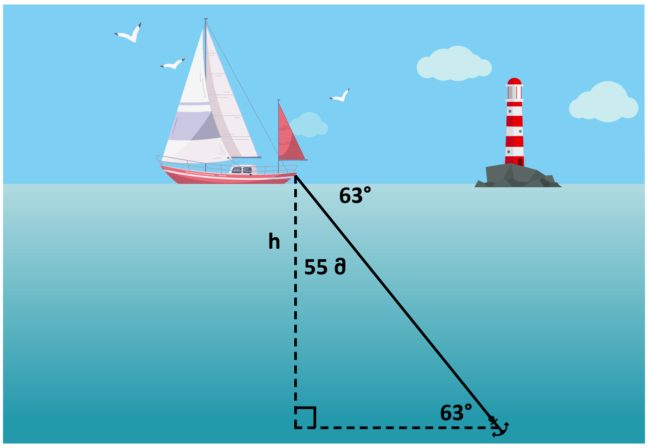
- რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის, ახსენით როგორ დაადგინეთ კავშირები.
- როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?
- თქვენი აზრით, რატომ იყო მეცნიერებისთვის საინტერესო უმაღლესი მწვერვალის დადგენა? თქვენ თუ გაქვთ ინტერესი რაიმე გამოიკვლიოთ?

კომპლექსური დავალება

რეკომენდაცია: აღნიშნული კომპლექსური დავალება ეხება ქვეთემის ნაწილს, მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრია

საკვანძო კითხვა:

უძველესი დროიდან ადამიანები იკვლევდნენ სხვა-დასხვა ფიგურას და მათ ელემენტებს შორის დამო-კიდებულებებს, რადგან მიხვდნენ, რომ აღნიშნული ცოდნა დაეხმარებოდათ სხვადასხვა პრობლემის გადაჭრაში.



თქვენი დავალება

1. შეისწავლეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები;
2. მოიძიეთ საინტერესო მაგალითები, სად შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში;
3. გამოიკვლიეთ, როგორ ადგენდნენ ტბის ან მდინარის სიღრმეს ტექნოლოგიების განვითარებამდე ადა-მიანები? შექმენით მათემატიკური მოდელი
4. დაფიქრდით, კიდევ რაში შეიძლება აღნიშნული ცოდნის გამოყენება?
5. გამოიკვლიეთ, თანამედროვეობაში რა საშუალებე-ბით ადგენენ ზღვის ან ოკეანის სიღრმეს.

   (დაადგინეთ, რისი ცოდნაა საჭირო).

გაგრძელება

III. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება

შენი დავალება

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები ერთმანეთზე?
- რა ტიპის დამოკიდებულება არსებობს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის?
- რომელი მათემატიკური მოდელის გამოყენება შეიძლება მიუვალი ადგილის გაზომვების დროს? მაგალითად, სიღრმის ან სიმაღლის დასადგენად? როგორ შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით აღნიშნული პრობლემის გადაჭრა? მოიყვანეთ კონკრეტული მაგალითი.
- როგორ ფიქრობთ, სად შეიძლება ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენება ყოველდღიურ ცხოვრებაში?
- თუ იცით, რა საშუალებებით ხდება თანამედროვეობაში სიღრმის დადგენა?

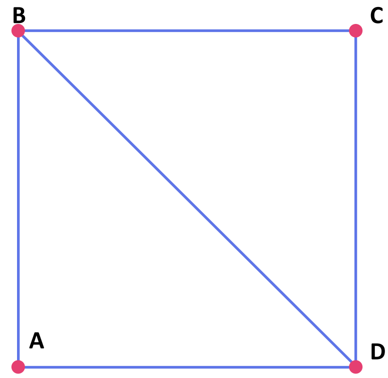
თავი 3. გეომეტრია და ტრიგონომეტრია

3.1. მართკუთხა სამკუთხედი და პითაგორას თეორემა

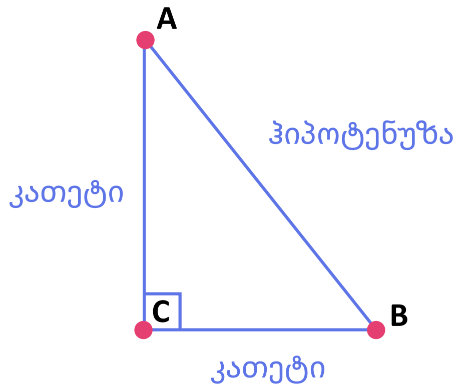
საკვანძო კითხვა:

- *როგორ შეიძლება კვადრატის ან მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძის დადგენა?*

მოცემულია *ABCD* კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a, *BD* დიაგონალია, როგორ დავადგინოთ დიაგონალის სიგრძე?



მართკუთხა სამკუთხედში ურთიერთმართობულ გვერდებს ეწოდებათ კათეტები, ხოლო მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს – ჰიპოტენუზა.

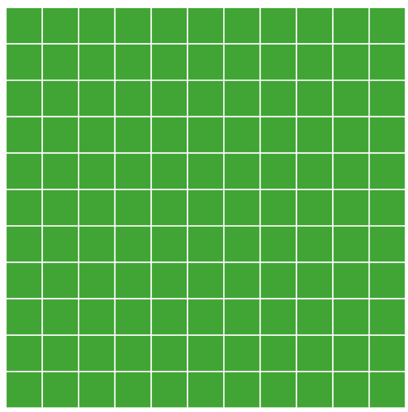


ჩვენი მიზანია, ვაჩვენოთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის არსებობს კავშირი, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

▶ **აღნიშნულის დასამტკიცებლად გავიხსენოთ, რას უდრის ზოგიერთი ფიგურის ფართობი:**

წინარე მასალის გამეორება

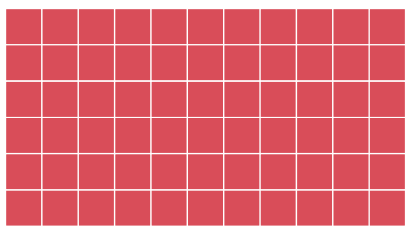
მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა a, მისი ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = a^2$;



$S = a^2$

ასევე, მოცემულია მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია

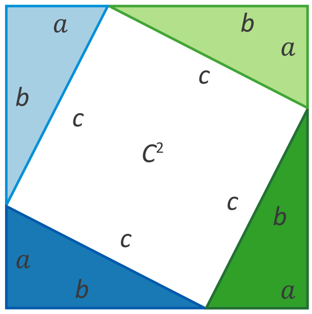
a და b. მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = a \cdot b$;



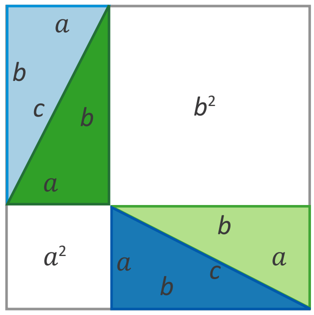
$S = a \cdot b$

3.1.1 პითაგორას თეორემა

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის წვეროებში განთავსებულია 4 ცალი მართკუთხა სამკუთხედი, რომელთა გვერდების სიგრძეებია a,b და c (ისე, როგორც ნახაზზეა მოცემული);



ნახაზი 1



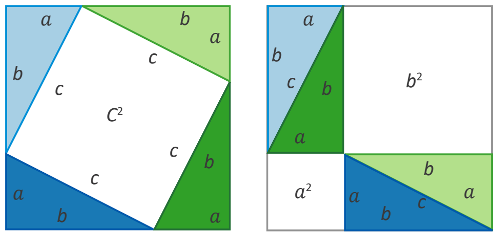
ნახაზი 2

კვადრატის თითოეული გვერდის სიგრძეა $a + b$; ხოლო ფართობი გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით $S = (a + b)^2$; შუა ნაწილში დარჩენილი ცარიელი კვადრატის ფართობია $s = c^2$.

პითაგორას თეორემა მსჯელობის ხაზი:

ნახ.1-ზე მოცემული მართკუთხა სამკუთხედები პარალელურად გადავიტანოთ ისე, როგორც ნახ. 2-ზეა ნაჩვენები.

🔗 *იხილეთ სიმულაცია*



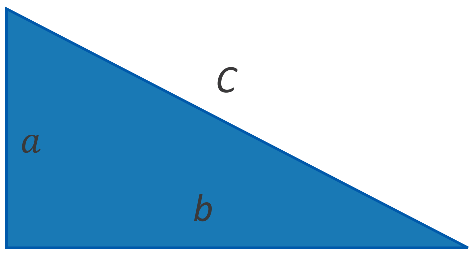
$$C^2 = a^2 + b^2$$

მივიღებთ ორ მართკუთხედს და ორ კვადრატს; ნახ. 3-დან ნათლად ჩანს, რომ სამკუთხედების პარალელური გადატანის შემდეგ თავდაპირველი დიდი თეთრი კვადრატი გაიყო ორ კვადრატად, რომელთა ფართობებია a^2 და b^2. ე.ი. მივიღეთ, რომ

$c^2 = a^2 + b^2$

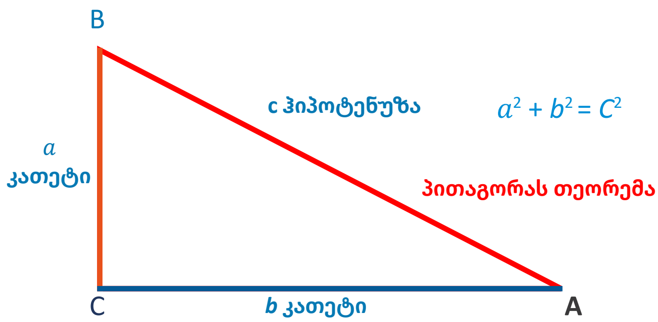
პითაგორას თეორემა

განვიხილოთ ნახაზ 1-ზე მოცემული ნებისმიერი მართკუთხა სამკუთხედი;



ამ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების სიგრძეებია a და b, ხოლო ჰიპოტენუზის სიგრძეა – c; დავაკავშიროთ ჩვენ მიერ ჩაწერილი ფორმულა აღნიშნულ სამკუთხედთან და მივიღებთ, რომ

მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების კვადრატების ჯამი, ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია, აღნიშნულს პითაგორას თეორემა ეწოდება. $c^2 = a^2 + b^2$;



პითაგორას თეორემა გვაჩვენებს კანონზომიერებას ნებისმიერ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის.

მინიშნება: A, B, C წვეროების მოპირდაპირე გვერდებს აღვნიშნავთ შესაბამისი პატარა ლათინური ასოებით.

ნიმუში 1

მართკუთხა სამკუთხედში ერთ-ერთი კათეტის სიგრძეა 5 სმ, ჰიპოტენუზის 13 სმ, იპოვეთ მეორე კათეტის სიგრძე

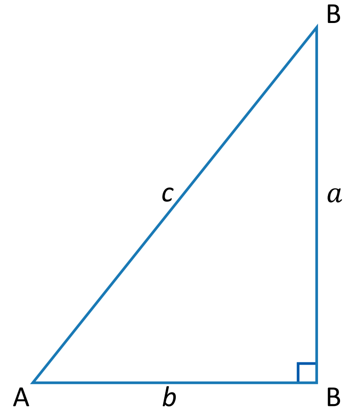
მოცემულია:

c = 13 სმ, b = 5 სმ იპოვეთ a

ვიცით, რომ $a^2 + b^2 = c^2$

$$a^2 + 5^2 = 13^2$$
$$a^2 + 25 = 169$$
$$a^2 = 169 - 25$$
$$a^2 = 144$$
$$a = \pm 12$$

გამომდინარე იქიდან, რომ სამკუთხედის გვერდი ვერ იქნება უარყოფითი რიცხვი, მეორე კათეტის სიგრძეა 12 სმ.



განვიხილოთ პითაგორას თეორემასთან დაკავშირებული საინტერესო ფაქტები.
ჩვენ ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი გვერდის წინ დიდი კუთხეა, ხოლო მცირე გვერდის წინ მცირე კუთხე.

ნიმუში 2 – პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა

რიცხვების სამეულს, რომელიც $c^2 = a^2 + b^2$ ტოლობას აკმაყოფილებს, პითაგორას რიცხვებს უწოდებენ.

აღნიშნული თეორემიდან გამომდინარე დაადგინეთ მართკუთხაა თუ არა სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია ა) 3, 5, 4 ბ) 4, 5, 6

ა) **მსჯელობა:** დავუშვათ სამკუთხედის გვერდებია a = 3, b = 4 და c = 5

ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი კუთხის წინ დიდი გვერდია; თუ აღნიშნული სამეული წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს, მაშინ ჰიპოტენუზა უნდა შეესაბამებოდეს დიდ გვერდს, ანუ

c = 5, ხოლო მცირე გვერდები კათეტებს, ე.ი. a = 3 და b = 4.

პითაგორას თეორემის თანახმად:

$c^2 = a^2 + b^2$

შევამოწმოთ პირობა:

$5^2 = 3^2 + 4^2$

25 = 9 + 16

აღნიშნული გვერდები წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს.

ბ) **მსჯელობა:** დავუშვათ სამკუთხედის გვერდებია a = 4 ,b = 5 და c = 6

ვიცით, რომ სამკუთხედში დიდი კუთხის წინ დიდი გვერდია; თუ აღნიშნული სამეული წარმოადგენს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს, მაშინ ჰიპოტენუზა უნდა შეესაბამებოდეს დიდ გვერდს, ანუ

c = 6, ხოლო მცირე გვერდები კათეტებს, ე.ი. a = 4 და b = 5.

პითაგორას თეორემის თანახმად:

$c^2 = a^2 + b^2$

შევამოწმოთ პირობა:

$6^2 = 4^2 + 5^2$

$36 \neq 16 + 25$

აღნიშნული გვერდები არ წარმოადგენენ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს.

3.1.2 პითაგორას თეორემის გამოყენება

პითაგორას თეორემით შესაძლებელია სიბრტყეზე ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილის პოვნა, თუ ვიცით აღნიშნული წერტილების კოორდინატები.
დავუშვათ სიბრტყეზე მოცემულია ორი A(x_1, y_1) და B(x_2, y_2) წერტილი და გვინდა ვიპოვოთ მანძილი მათ შორის, ანუ გამოვთვალოთ *AB* მონაკვეთის სიგრძე.

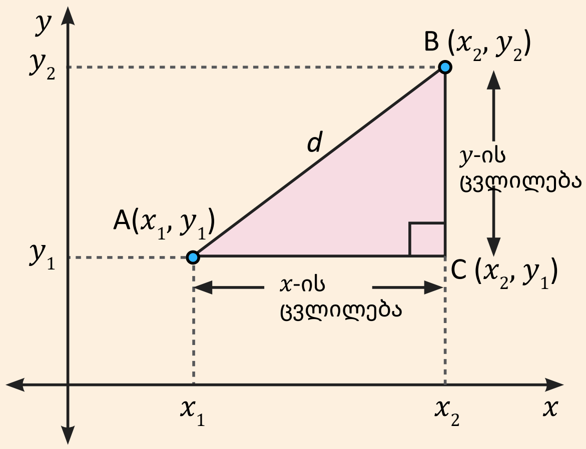
განვიხილოთ Δ*ABC*;

$AC = x_2 - x_1$, ხოლო $BC = y_2 - y_1$
პითაგორას თეორემის თანახმად ვიცით, რომ
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ ამ ფორმულაში *AC* და *BC*-ს მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

მინიშნება: *ზოგადად, გამომდინარე იქიდან, რომ სიგრძე დადებითია აღვნიშნავთ შემდეგნაირად* |*AB*|



ნიმუში 3

სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი A(–3 ,4) და B(1,9); იპოვეთ მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის:

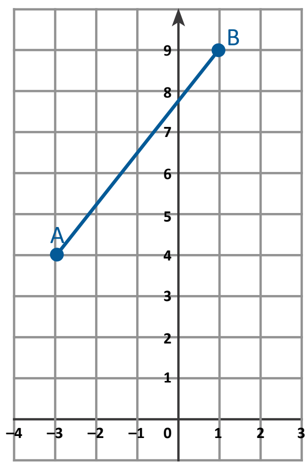
მოცემულია A(–3, 4) და B(1, 9)

$|AC| = x_2 - x_1 = (1-(-3)) = 4$,

ხოლო

$|BC| = y_2 - y_1 = (9 - 4) = 5$

$|AB| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

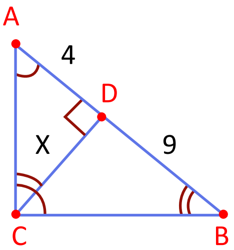


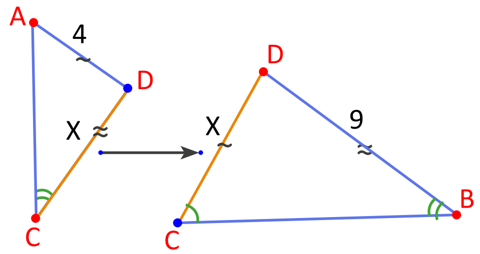
ნიმუში 4

მათემატიკის მოყვარულთათვის* მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ჰიპოტენუზას ჰყოფს ორ ნაწილად, რომელთა სიგრძეებია 4 სმ და 9 სმ; იპოვეთ სიმაღლე და მართკუთხა სამკუთხედის გვერდები.

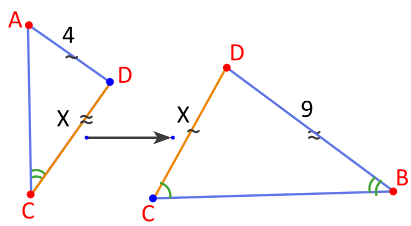
კვლევა

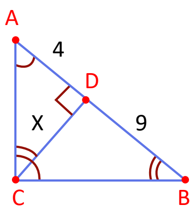
ამოცანის ამოხსნამდე გამოვიკვლიოთ რა ხდება, როდესაც მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე ვუშვებთ სიმაღლეს. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე სამკუთხედს ყოფს ორ მართკუთხა სამკუთხედად.

<table>
<tr><td>მოცემულია ΔACB, $AB \perp CD$</td><td></td></tr>
<tr><td>

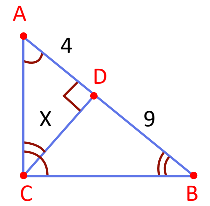
ნახაზი 1</td><td>

ნახაზი 2
იმისათვის, რომ მსგავსება მეტად აღქმადი იყოს ცალ-ცალკე დავხაზოთ მიღებული ორი მართკუთხა სამკუთხედი.</td></tr>
</table>

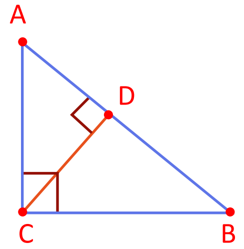
<table>
<tr><th>წინადადება</th><th>არგუმენტი</th></tr>
<tr><td>
1. $\Delta ACD \sim \Delta CBD$
რადგან ΔACB-დან $\angle A = 90^0 - \angle B$,
ხოლო ΔCBD-ში $\angle DCB = 90^0 - \angle B$.
2. $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$
$CD^2 = AD \cdot BD$
$x^2 = 4 \cdot 9$
$x = 6$
3. ΔACD
$AD^2 + CD^2 = AC^2$
$4^2 + 6^2 = AC^2$
$52 = AC^2$
$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
</td><td>
1. მსგავსების პირველი ნიშნით


2. რადგან მსგავს სამკუთხედებში გვერდები პროპორციულია
3. პითაგორას თეორემის თანახმად


</td></tr>
</table>

4. ΔCBD $CD^2 + DB^2 = CB^2$ $6^2 + 9^2 = BC^2$ $117 = BC^2$ $BC = \sqrt{117}$	**4.** პითაგორას თეორემის თანახმად 

დაიმახსოვრეთ,



$CD^2 = AD \cdot BD$ (1)

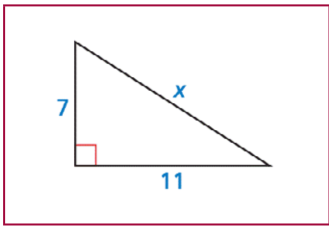
$AC^2 = AD \cdot AB$ (2)

$BC^2 = BD \cdot AB$ (3)

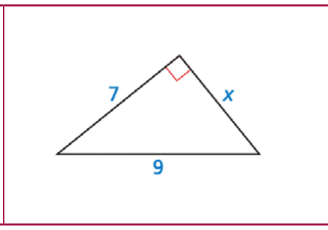
სავარჯიშოები

1. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდის სიგრძე.

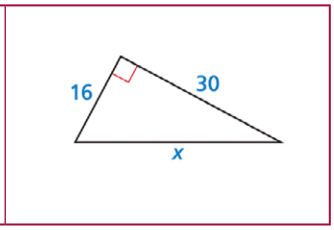
ა)



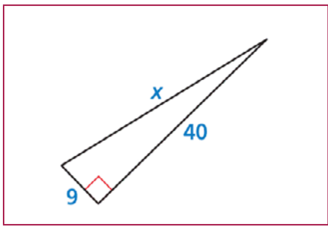
ბ)



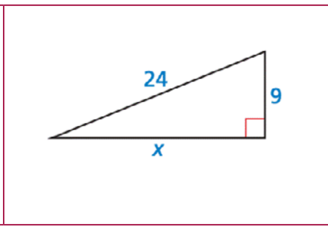
გ)



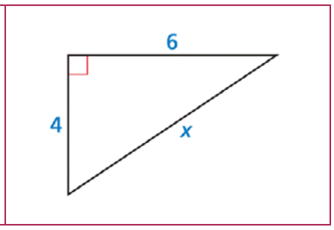
დ)



ე)



ვ)



■ ჯგუფური სამუშაო ■ კვლევითი აქტივობა

2. პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა:

■ თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა. უდიდესი გვერდია ჰიპოტენუზა.	შედეგი **I.** თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი,დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე ნაკლებია, მაშინ ეს სამკუთხედი მახვილკუთხაა. **II.** თუ სამკუთხედის უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე მეტია, მაშინ ეს სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

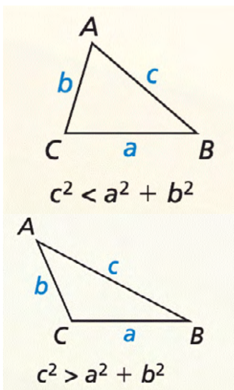
ლოგიკის სავარჯიშო

I. პითაგორას თეორემის შედეგი 1:

თუ სამკუთხედში უდიდეს გვერდს c-თი აღვნიშნავთ, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდს კი a და b სიმბოლოებით და სამკუთხედში სრულდება პირობა:

$c^2 < a^2 + b^2$, იგივე ($a^2 + b^2 > c^2$), მაშინ ΔABC სამკუთხედი მახვილკუთხაა

$c^2 > a^2 + b^2$, იგივე ($a^2 + b^2 < c^2$), მაშინ ΔABC სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა



სავარჯიშოები

MATH Lab

შეამოწმეთ აღნიშნული თეორემის სისწორე ტექნოლოგიების გამოყენებით.

რეკომენდაცია:

მეთოდი 1:

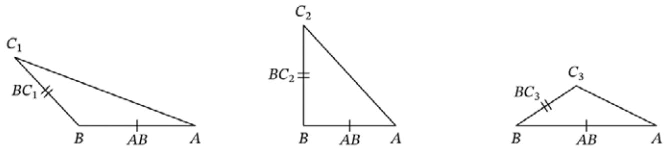
შედით საიტზე Geogebra – კვლევითი აქტივობა, ააგეთ სხვადასხვა ზომის სამკუთხედები, ამოიწერეთ გვერდების სიგრძეები და შეამოწმეთ მოცემული თეორემის სისწორე.

მეთოდი 2:

აიღეთ ორი მონაკვეთი, სიგრძეებით x სმ და y სმ

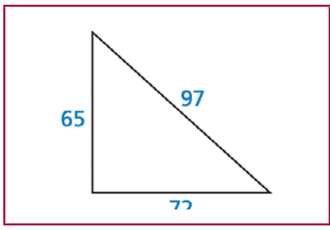
- ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტების სიგრძეები აღნიშნული მონაკვეთის სიგრძეების ტოლია, იპოვეთ ჰიპოტენუზა.
- ააგეთ ბლაგვკუთხა სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძე მოცემული მონაკვეთების ტოლია (x სმ და y სმ-ის), ააგეთ სამკუთხედი და შეამოწმეთ თეორემის სისწორე.
- ააგეთ მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომლის ორი გვერდის სიგრძე მოცემული მონაკვეთების ტოლია (x სმ და y სმ-ის), ააგეთ სამკუთხედი და შეამოწმეთ თეორემის სისწორე.

იხილეთ ნახაზების ნიმუში

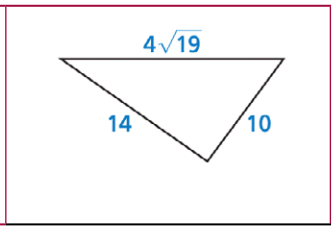


3. ქვემოთ მოცემული სამკუთხედებიდან დაადგინეთ, რომელია მართკუთხა სამკუთხედი

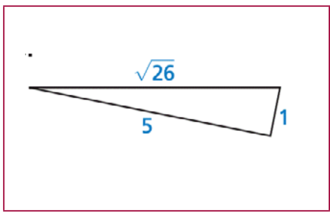
ა)



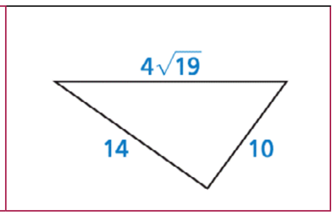
ბ)



გ)



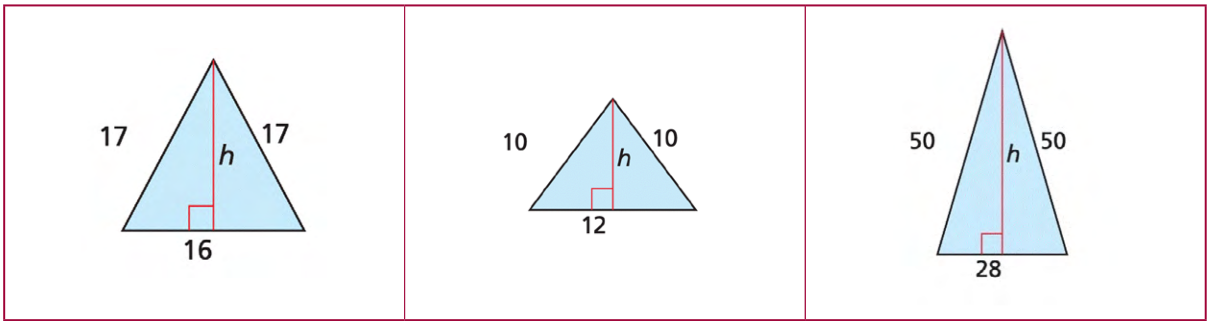
დ)



სავარჯიშოები

4. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლის სიგრძე.

ა) ბ) გ)



მინიშნება: ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის მიმართ გავლებული მედიანა, სიმაღლე და ბისექტრისა ერთი და იგივე მონაკვეთია.

ჯგუფური სამუშაო ■ მოიყვანეთ არგუმენტი

ლოგიკის სავარჯიშო

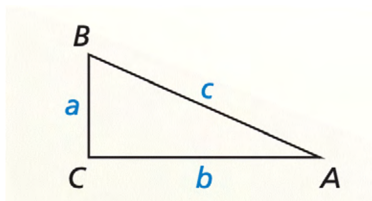
5. დაასაბუთეთ, რომ თუ a,b,c მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია, მაშინ ka, kb, kc ასევე იქნებიან მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

განიხილეთ კონკრეტული ნიმუშების მაგალითზე:

ვიცით, რომ მონაკვეთებისგან, რომლის სიგრძეებია 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ შეიძლება მართკუთხა სამკუთხედის აგება

დაასაბუთეთ, რომ ქვემოთ მოცემული სამეულებიც მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებს წარმოადგენენ

ა) 6 სმ, 8 სმ, 10 სმ
ბ) 9 სმ, 12 სმ, 15 სმ
გ) $3k$, $4k$, $5k$



$c^2 = a^2 + b^2$

!! ყურადღება მიაქციეთ:

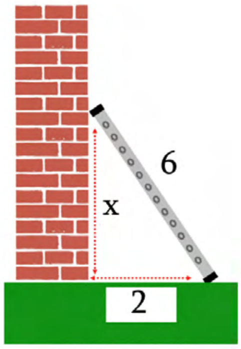
3, 4, 5	**5, 12, 13**	**8, 15, 17**	**7, 24, 25**
6, 8, 10	10, 24, 26	16, 30, 34	14, 48, 50
9, 12, 15	15, 36, 39	24, 45, 51	21, 72, 75
$3k$, $4k$,$5k$	$5k$, $12k$,$13k$	$8k$, $15k$,$17k$	$7k$, $24k$,$25k$

სავარჯიშოები

6. ნახაზზე მოცემული მონაცემების საფუძველზე, იპოვეთ x.

ა) გაასიტყვეთ ამოცანა

ბ) შეადგინეთ მსგავსი ამოცანა



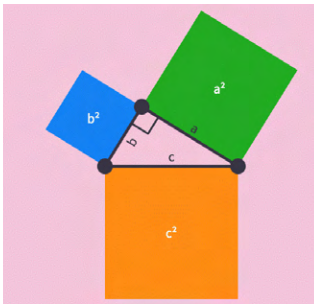
7. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი, იპოვეთ მანძილი აღნიშნულ ორ წერტილს შორის:

ა) A(0,4) და B(1,3); გ) A(–1, –2) და B(1,7); ე) A(4,0) და B(–4,2);

ბ) A(1,2) და B(4,6); დ) A(2,0) და B(0,6); ვ) A(–1,2) და B(–4,6).

8. პითაგორას თეორემა შესაძლებელია დამტკიცდეს სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებით, ქვემოთ მოცემულია დიაგრამა, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია პითაგორას თეორემის დასაბუთება.

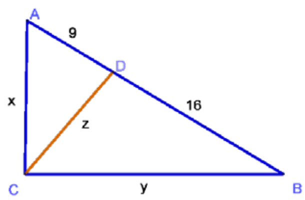
გააანალიზეთ დიაგრამაზე მოცემული სიტუაცია და ახსნებით აღნიშნული მეთოდით, როგორ მტკიცდება პითაგორას თეორემის სისწორე.



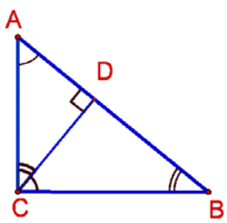
9. მათემატიკის მოყვარულთათვის*

ნახაზზე მოცემულია ΔACB, CD ⊥ AB

ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.

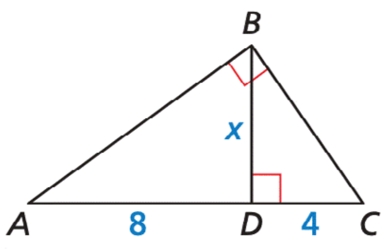
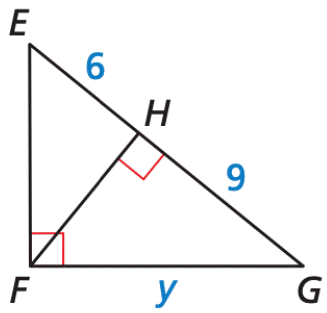


1. *ΔABC* მართკუთხა სამკუთხედია,
   AB = 25 სმ; BC = 20 სმ, CD = ?
2. ΔABC მართკუთხა სამკუთხედია,
   AD = 4სმ; DB = 12 სმ, AC = ?
3. ΔABC მართკუთხა სამკუთხედია,
   AB = 25 სმ; CB = 16 სმ, BD = ?



სავარჯიშოები

10. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციის თანახმად,

ა) იპოვეთ x	ბ) იპოვეთ y
	

3.2. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

საკვანძო კითხვა:

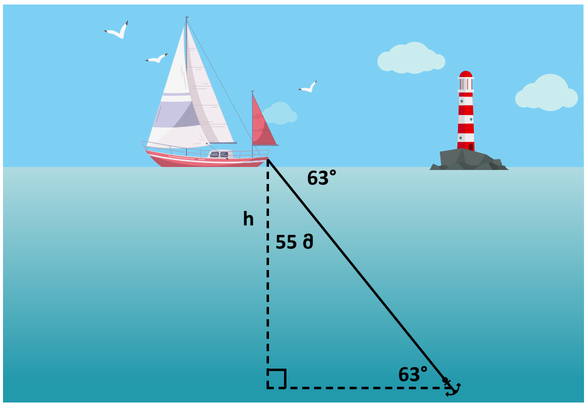
უძველესი დროიდან ადამიანები იკვლევდნენ სხვადასხვა ფიგურას და მათ ელემენტებს შორის დამოკიდებულებებს, რადგან გარკვეული დამოკიდებულებების დადგენა ეხმარებოდათ იმ დროისთვის მნიშვნელოვანი პრობლემის გადაჭრაში.

ტრიგონომეტრია მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ნაწილია, **ტრიგონომეტრია სწავლობს დამოკიდებულებას სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.**

(Triangle – სამკუთხედი, Metron – გაზომვა)

სიტყვა ტრიგონომეტრია დაკავშირებულია სამკუთხედთან და გაზომვებთან.

- *თქვენი აზრით, როდესაც ადრე მდინარეებში ან ტბებში შედიოდნენ მეთევზეები ნავებით ან ტივით, როგორ შეიძლებოდა მდინარის ან ტბის სიღრმის დადგენა?*

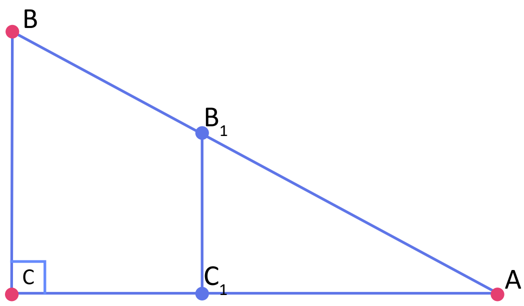


კვლევა

განვიხილოთ მართკუთხა ΔABC, რომლის $\angle C=90°$,

გავავლოთ BC გვერდის პარალელური B_1C_1 გვერდი.

$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, სამკუთხედები მსგავსია რადგან შესაბამისი სამივე კუთხე ტოლი აქვთ.



მსგავსებიდან გამომდინარე დავწეროთ შემდეგი თანაფარდობები:

I. $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AB}{AB_1}=k$	II. $\frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1}$	III. $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{AC_1}$
პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ	პროპორციაში წევრების გადანაცვლებით მივიღებთ, რომ
$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}$	$\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$	$\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1}$

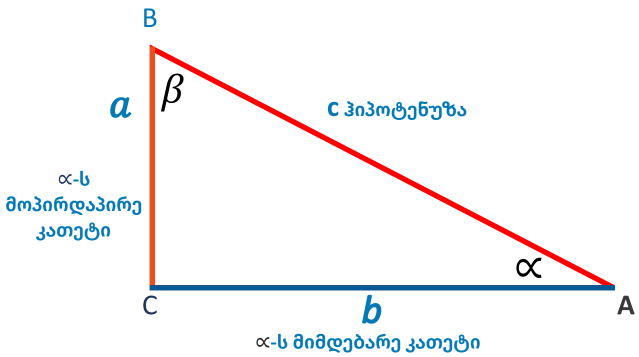
თუ ზემოთ მოცემულ ტოლობებს გავაანალიზებთ, დავინახავთ, რომ თუ ორ მართკუთხა სამკუთხედს ტოლი კუთხეები აქვთ (თუ სამკუთხედები მსგავსია), მაშინ ამ ორ სამკუთხედს მახვილი კუთხისთვის ტოლი ექნებათ:

მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი / ჰიპოტენუზასთან	**(ეწოდება კუთხის სინუსი)**
მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი / ჰიპოტენუზასთან	**(ეწოდება კუთხის კოსინუსი)**
მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი / მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტთან	**(ეწოდება კუთხის ტანგენსი)**
მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტი / მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტთან	**(ეწოდება კუთხის კოტანგენსი)**
შენიშვნა: *ბოლო შეფარდების ჩვენება შეიძლება პირველი სამის მსგავსად.*	***აღნიშნული თანაფარდობებისთვის მათემატიკაში არის სპეციალური სახელები და აღნიშვნები.***

3.2.1 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

$sin\alpha = \frac{a}{c};$	$sin\beta = \frac{b}{c};$
$cos\alpha = \frac{b}{c};$	$cos\beta = \frac{a}{c};$
$tg\alpha = \frac{a}{b};$	$tg\beta = \frac{b}{a};$
$ctg\alpha = \frac{b}{a};$	$ctg\beta = \frac{a}{b};$



მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის სინუსი. **აღინიშნება**: $sin\alpha = \frac{a}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან ეწოდება კუთხის კოსინუსი. **აღინიშნება**: $cos\alpha = \frac{b}{c}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას მიმდებარე კათეტთან ეწოდება კუთხის ტანგენსი, **აღინიშნება**: $tg\alpha = \frac{a}{b}$

მართკუთხა სამკუთხედში კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას მოპირდაპირე კათეტთან ეწოდება კუთხის კოტანგენსი, **აღინიშნება**: $ctg\alpha = \frac{b}{a}$

შენიშვნა: *ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ტანგენსი და კოტანგენსი აღინიშნება შემდეგნაირად* $tg\alpha = tan\alpha; ctg\alpha = cot\alpha$

3.2.2 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები გამოთვლა ტექნოლოგიების გამოყენებით

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ დავადგინოთ, კუთხის თითოეული გრადუსისთვის რას უდრის: სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი?*
- *როგორ დავადგინოთ კუთხის მნიშვნელობა, თუ ვიცით კუთხის sinα,cosα, tgα, ctgα-ის მნიშვნელობა?*

მეთოდი 1:

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

შედით საიტზე Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

გაააქტიურეთ ღილაკი *Func*, ამოირჩიეთ რომელი კუთხის სინუსის, კოსინუსის ან ტანგესის მოძებნა გინდათ (მიაქციეთ ყურადღება, კუთხე იზომება გრადუსებით ან რადიანებით); კალკულატორი გაჩვენებთ თითოეული კუთხისთვის რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα;*

მაგ., *cos*25°≈ 0.906

საკვანძო კითხვა:

1. *sinα, cosα, tgα, ctgα-ს ასევე ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?*

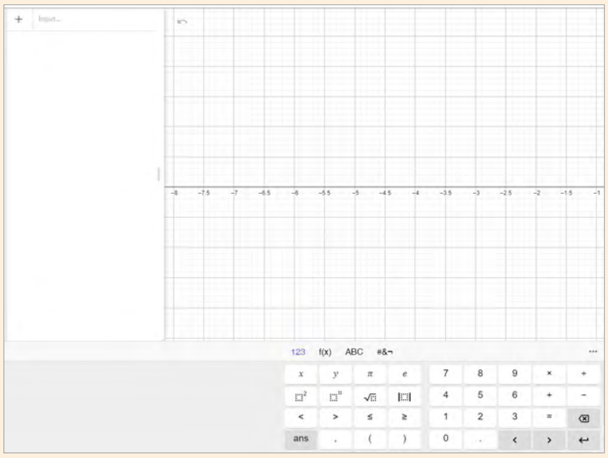
დადგენილია, რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα* – კუთხის თითოეული მნიშვნელობისთვის. ცხრილით, მოცემულია ის მნიშვნელობები, როდესაც კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*-ის წარმოდგენა შეიძლება მოხერხებული ფორმით.

შეგახსენებთ, კუთხე შეიძლება გავზომოთ როგორც გრადუსებით, ასევე რადიანებით.

180° გრადუსს შეესაბამება *π* რადიანი; პროპორციის გამოყენებით მარტივად დავადგენთ შემდეგ კავშირს:

Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე

Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



გრადუსების და რადიანების შესაბამისობის ცხრილი

რადიანი	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
გრადუსი	0	30	45	60	90
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	განსაზღვრული არ არის

გრადუსი	რადიანი
180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
360°	2π

- გამომდინარე იქიდან, რომ სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი კუთხის კონკრეტულ გრადუსულ ზომას შეუსაბამებენ რიცხვს, ეწოდებათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ გრაფიკებს შევისწავლით მოგვიანებით.

შებრუნებული ფუნქციები

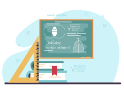
- *როგორ ვიპოვოთ კუთხე, თუ ვიცით კუთხის სინუსი, კოსინუსი ან ტანგენსი?*

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შებრუნებული ფუნქციები გვეხმარება, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი კოსინუსი ან ტანგენსი არის კონკრეტული რიცხვი.

$$sin^{-1}\left(\frac{BC}{AB}\right) = \angle A$$

$$cos^{-1}\left(\frac{AC}{AB}\right) = \angle A$$

$$tg^{-1}\left(\frac{BC}{AC}\right) = \angle A$$

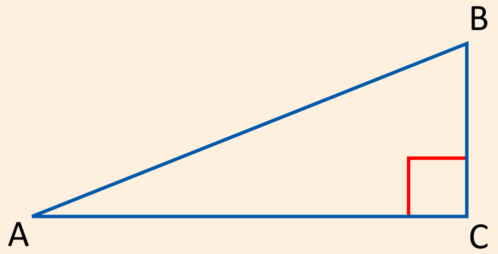


MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

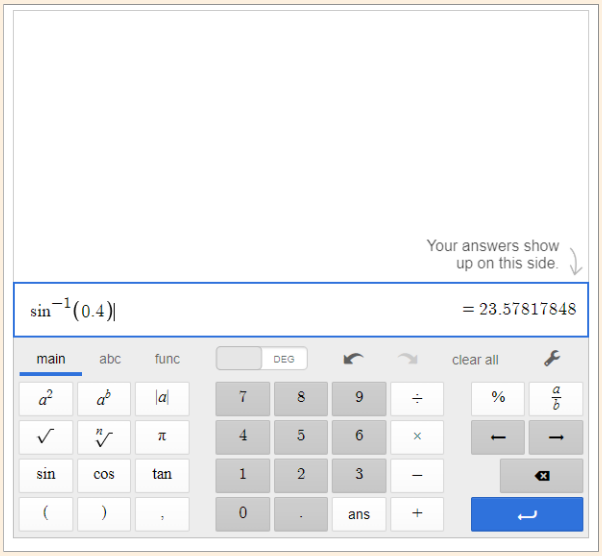
შედით საიტზე 🔗 Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

შებრუნებული ფუნქცია:

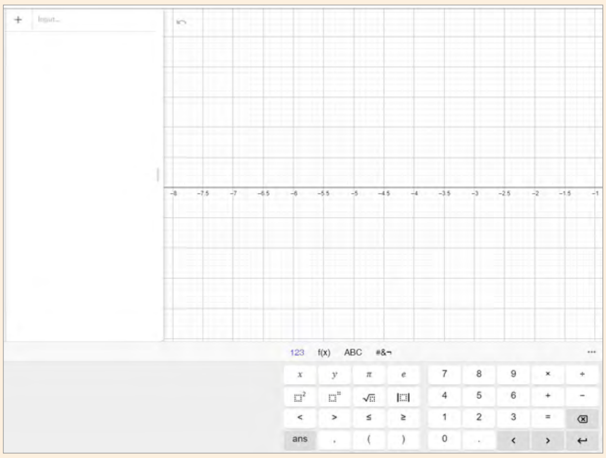
თუ ვიცით კუთხის სინუსი და გვსურს, დავადგინოთ (ვიპოვოთ) ის კუთხე, რომელზეც ფუნქცია იღებს მნიშვნელობას, ვიქცევით შემდეგნაირად:



Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ვირჩევთ sin^{-1} ფუნქციას, ვწერთ რიცხვით მნიშვნელობას და ვპოულობთ კუთხეს.

დაიმახსოვრეთ, $sin^{-1} \neq \frac{1}{sin\alpha}$

$sin^{-1}(0.1)$ – ნიშნავს, ვიპოვოთ კუთხე, რომლის სინუსი არის 0.1;

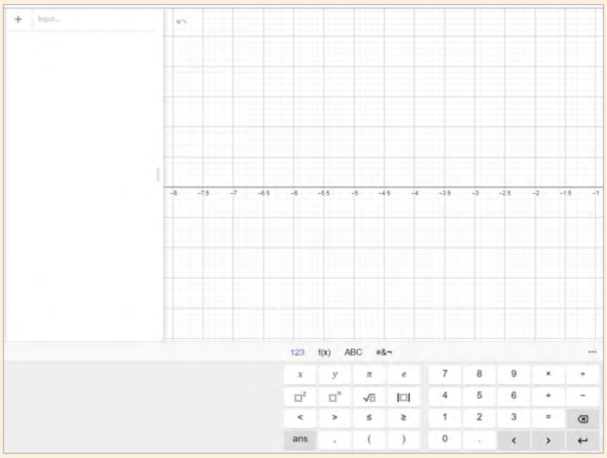
ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ $cos^{-1}(0.1)$; $tg^{-1}(0.1)$; $ctg^{-1}(0.1)$

გამომდინარე იქიდან, რომ კათეტი ყოველთვის ნაკლებია ჰიპტენუზაზე,

კუთხის სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობა ნაკლებია ან ტოლი 1-ის.

უფრო მეტს სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობებზე ვისწავლით მოგვიანებით.

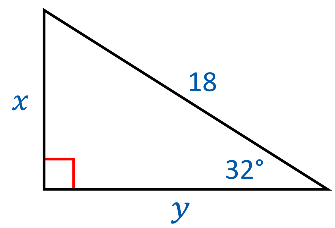
Geogebra-ს კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე



ნიმუში 1

- *როგორ გვეხმარება ტრიგინომეტრიული ფუნქციები სამკუთხედში უცნობი გვერდის პოვნაში?*

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



ვიპოვოთ x

ვიცით, რომ $sin32° = \frac{x}{18}$;

$x = 18 \cdot sin32°$ (1)

გრაფიკული კალკულატორით Desmos Calculator დავადგინოთ, რას უდრის sin32°≈0.53, შევიტანოთ მნიშნელობა (1) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $x = 18 \cdot sin32° \approx 18 \cdot 0.53 \approx 9.54$

ვიპოვოთ y

$cos32° = \frac{y}{18}$;

$y = 18 \cdot cos32°$ (2)

გრაფიკული კალკულატორით Desmos Calculator დავადგინოთ, რას უდრის cos32°≈0.85, შევიტანოთ მნიშნელობა (2) ტოლობაში და მივიღებთ, რომ $y = 18 \cdot cos32° \approx 18 \cdot 0.85 \approx 15.3$

რეკომენდაცია: y-ის გამოთვლა შეგვიძლია, როგორც პითაგორას თეორემის გამოყენებით, ასევე, $cos32°$-ის მეშვეობით.

3.2.3 მნიშვნელოვანი მართკუთხა სამკუთხედები

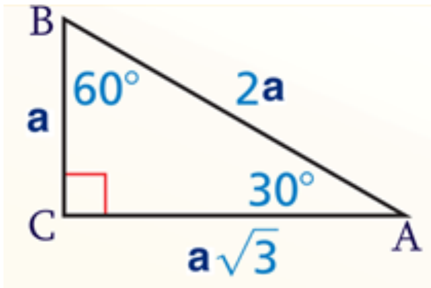
ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ვადგენთ, რომ

მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის წინ მდებარე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია; ხოლო მიმდებარე კათეტი უდრის მოპირდაპირე კათეტი გამრავლებული $\sqrt{3}$-ზე.

დასაბუთება:

$sin30° = \frac{BC}{AB}$; $sin30° = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{AB}$; $AB = 2a$



პითაგორას თეორემის თანახმად,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

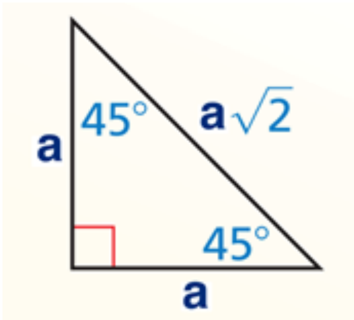
$AC\sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$AC = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში, ჰიპოტენუზის სიგრძე უდრის კათეტის სიგრძე გამრავლებული $\sqrt{2}$ -ზე.

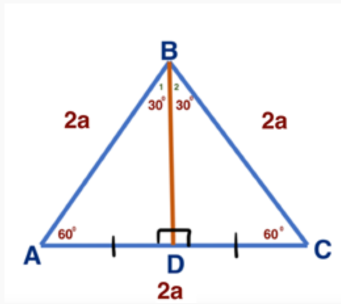
თუ ტოლ კათეტებს აღვნიშნავთ a-თი, ხოლო ჰიპოტენუზას c-თი,

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2} = 2\sqrt{a}$$



ლოგიკის სავარჯიშო

მათემატიკის მოყვარულთათვის: რატომ არის sin 30° = $\frac{1}{2}$?



განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძეა $2a$; ტოლგვერდა სამკუთხედში ნებისმიერ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, ბისექტრისა და მედიანა ერთი და იგივე მონაკვეთია;

განვიხილოთ ΔADB, იგი მართკუთხაა, რადგან გავლებულია BD სიმაღლე.

იგივე BD სიმაღლე იქნება $\angle B$-ს ბისექტრისა, შესაბამისად, $\angle ABD = 30°$

$sin30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$;

რ.დ.გ. (რისი დამტკიცებაც გვინდოდა)

კვლევითი აქტივობა:

მოცემული სამკუთხედიდან იპოვეთ:

$sin30°$, $cos30°$;
$sin60°$, $cos60°$;
$tg30°$, $ctg30°$;
$tg60°$, $ctg60°$;

მინიშნება: ტექნოლოგიების განვითარებამდე აღნიშნული და გაცილებით მეტი ფორმულების ცოდნა იყო არსებითად მნიშვნელოვანი იმისათვის, რომ მეცნიერებს ზუსტი გამოთვლები ეწარმოებინათ.

საინტერესი ისტორიული ფაქტები

კომპიუტერის გამოგონებამდე – მოცემული ფოტო გადაღებულია ნასას (NASA) კვლევით დეპარტამენტში 1957 წელს. ფოტოზე ჩანს, რამდენი მეცნიერი აწარმოებდა გამოთვლით სამუშაოებს, რომლებიც დაკავშირებული იყო კოსმოსში გაშვებულ რაკეტასთან. წამყვანი მეცნიერები (მათემატიკოსები და ფიზიკოსები) დაფებს ავსებდნენ ანგარიშის დროს. იმ ეპოქაში აუცილებელი იყო, ყველა ფორმულა სცოდნოდა მეცნიერს და გაწაფული ყოფილიყო გამარტივებებსა და გამოთვლების შესრულებაში.

წყარო *NASA The National Aeronautics and Space Administration*

თანამედროვეობაში აღნიშნული გამოთვლებს კომპიუტერი მაღალი სიზუსტით, წამებში ასრულებს. ტექნოლოგიურ ერაში კომპიუტერი გამოთვლების შესრულებაში უდიდეს სამსახურს უწევს მეცნიერებს, ამიტომ სწავლებაში უმნიშვნელოვანესია გვესმოდეს, როგორ ხდება კავშირების დამყარება ფიგურის ელემენტებს შორის, ასევე, სხვადასხვა ცნებებსა და კონცეფციებს შორის როგორ შეიძლება ახალი კანონზომიერების აღმოჩენა და შემდეგ ცოდნის გამოყენება, როგორც ყოველდღიურობაში, ასევე მეცნიერების სხვადასხვა დარგში.

მოგვიანებით ისწავლით, როგორ ხდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით ტალღური მოვლენების მოდელირება.

რუბრიკა

ქალები მეცნიერებაში

მარგარეთ ჰამილტონმა აპოლოს კოსმოსში გასაფრენად საჭირო ალგორითმი შეიმუშავა და დაწერა კოდი, რომლის მეშვეობითაც პირველად გადაუღეს ფოტო შავ ხვრელს.

მარგარეთ ჰამილოტნი იყო პირველი ქალი, რომელიც MIT-ში პროგრამირების კათედრას ხელმძღვანელობდა.

„ნუ გეშინიათ დასვათ კითხვები, კითხვების არდასმა და საერთოდ, კითხვების გარეშე ყოფნა, არის ყველაზე სულელური კითხვა“ – მარგარეტ ჰამილტონი.

მოიძიეთ სხვა საინტერესო ინფორმაცია მარგარეტ ჰამილტონზე.

მარგარეტ ჰამილტონი, 1969 წელი, აპოლონის მისია, მის მიერ შემუშავებულ ალგორითმთან (დაწერილ კოდთან).

სავარჯიშოები

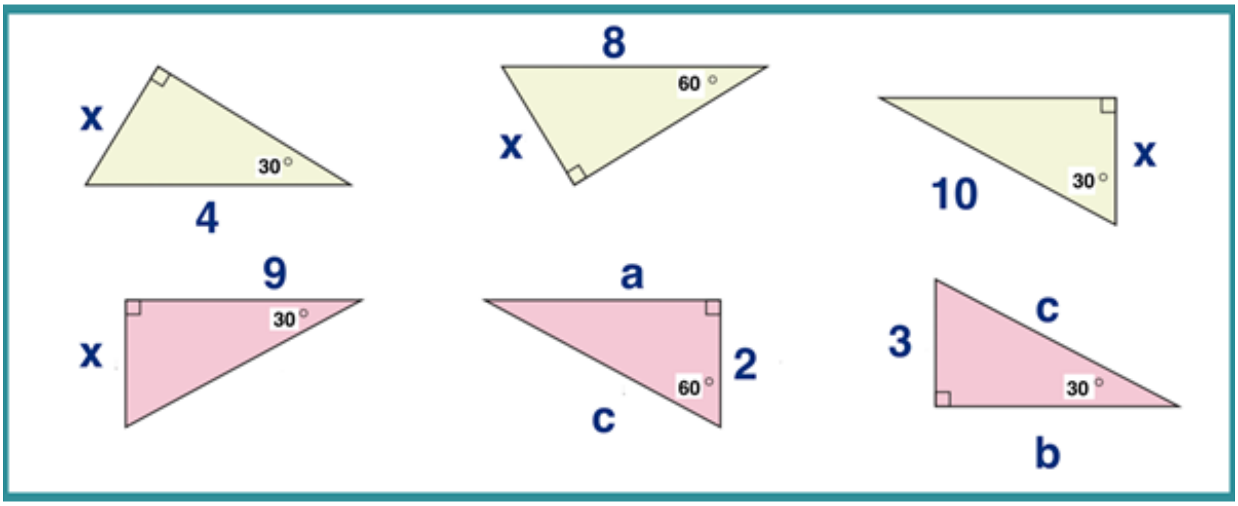
1. შედით საიტზე 🔗 Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator).
იპოვეთ ქვემოთ ჩამოთვლილი კუთხის *sinα, cosα, tgα, ctgα*

ა) $\alpha = 0°$	ე) $\alpha = 20°$
ბ) $\alpha = 90°$	ვ) $\alpha = 40°$
გ) $\alpha = 30°$	ზ) $\alpha = 25°$
დ) $\alpha = 60°$	თ) $\alpha = 180°$

2. იპოვეთ კუთხის მნიშვნელობა თუ ვიცით, რომ

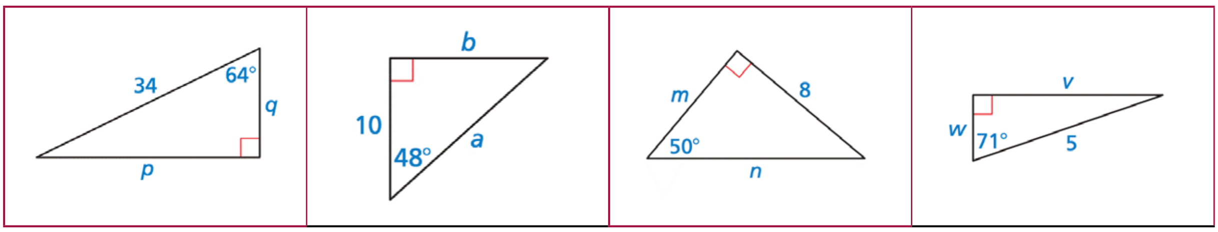
ა) $sin\alpha = 0.5$	ე) $tg\alpha = 1$
ბ) $sin\alpha \approx 0.8$	ვ) $ct\alpha \approx 0.5$
გ) $cos\alpha \approx 0.5$	ზ) $tg\alpha \approx 1.5$
დ) $cos\alpha \approx 0.7$	თ) $ctg\alpha = 1$

3. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები.



4. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი გვერდები

ა) ბ) გ) დ)



5. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 1 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

სავარჯიშოები

6. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 1 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

7. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 30°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 8 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

8. მართკუთხა სამკუთხედის კუთხე 60°-ია, მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე კი 6 სმ, იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი გვერდების სიგრძეები.

9. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში კათეტის სიგრძე 4 სმ-ია, იპოვეთ ჰიპოტენუზის სიგრძე.

10. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის სიგრძე $12\sqrt{2}$ სმ-ია, იპოვეთ კათეტების სიგრძეები.

11. ტოლფერდა სამკუთხედში კუთხე 120°-ია, ფერდი 10 სმ, იპოვეთ ფუძის სიგრძე და ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

12. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე 30°-ია, ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 4.2სმ, იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

13. ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა 5.4 სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე.

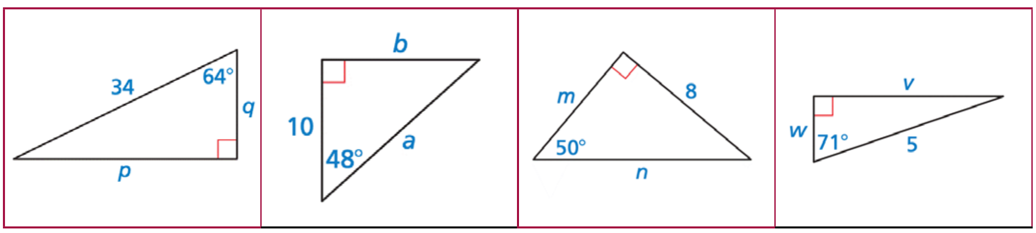
14. **გამოწვევა:** ტოლგვერდა სამკუთხედში გვერდის სიგრძეა a სმ, იპოვეთ ერთ-ერთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის სიგრძე. (დააკავშირეთ სიმაღლე a-სთან).

MATH Lab

15. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ უცნობი მახვილი კუთხეების გრადუსული ზომები;

ტექნოლოგიების გამოყენება

ა) ბ) გ) დ)



16. **არგუმენტირებული მსჯელობა:** გამოთქვით ვარაუდი, რატომ ვერ იქნება კუთხის კოსინუსი ან სინუსი 1-ზე მეტი და რატომ შეიძლება, კუთხის ტანგენსი იყოს 1-ზე მეტი. მოიყვანეთ არგუმენტი.

17. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 12 სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 60°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

სავარჯიშოები

18. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 18სმ-ია, ერთ-ერთი მახვილი კუთხე კი 30°-ის ტოლია, იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

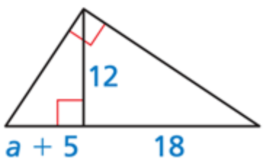
19. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 8 სმ-ია, მის წინ მდებარე კუთხე კი 60°-ია; იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

20. მართკუთხედის გვერდებია 6 სმ და 8 სმ, იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

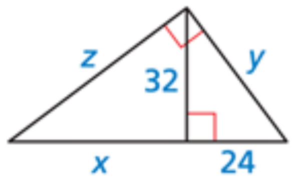
21. მართკუთხედის პერიმეტრი 72 სმ-ია. გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:5. იპოვეთ მართკუთხედის დიაგონალის სიგრძე.

22. ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე

ა) იპოვეთ a



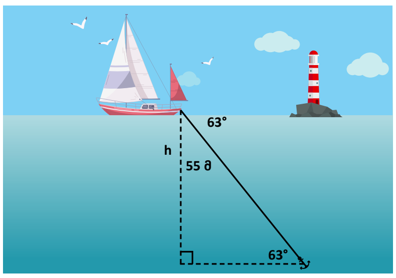
ბ) იპოვეთ x, y, z



23. განვიხილოთ გაკვეთილის დასაწყისში მოცემული ამოცანა.

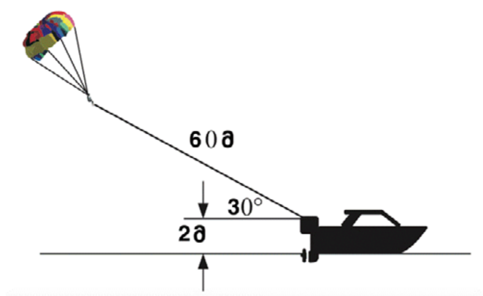
სათევზაოდ გასულმა მეთევზემ ჩააგდო ღუზა, რომლის სიგრძე 55 მ-ია;

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ ტბის სიღრმე.



24. ზღვაზე წასულმა ახალგაზრდებმა გადაწყვიტეს მფრინავი ბურთით გასეირნება, მათ მფრინავი ფურთი მიამაგრეს კატერს.

ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე იპოვეთ რა სიმაღლეზეა მფრინავი ბურთი წყლის ზედაპირიდან?



25. **გამოწვევა: Math Lab** – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

MATH Lab – კვლევითი აქტივობა მათემატიკის მოყვარულთათვის:

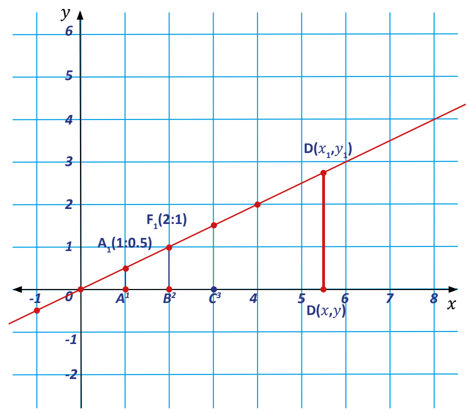
15. როგორ შეიძლება კუთხის მნიშვნელობების დადგენა? რატომ ეწოდება $y = kx + b$, წრფივ ფუნქციაში k-ს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

ტექნოლოგიების გამოყენება

ჯგუფური სამუშაო – კვლევითი აქტივობა:

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = kx$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი, მონიშნეთ მასზე წერტილები და დაუშვით მართობები Ox ღერძზე. მიიღებთ მსგავსს სამკუთხედებს (დაასაბუთეთ სამკუთხედების მსგავსება)

ΔOAA_1, ΔOBB_1, ΔOCC_1, ΔODD_1,



თითოეული სამკუთხედისთვის იპოვეთ: *sinα; cosα; tgα*

	$\Delta\ OAA_1$	$\Delta\ OBB_1$	$\Delta\ OCC_1$
sinα			
cosα			
tgα			

აქტივობის შემდეგ ნახავთ, რომ თითოეული სამკუთხედისთვის *sinα, cosα, tgα*-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები აქვთ.

მინიშნება: თუ გავაანალიზებთ მოცემულს, მივიღებთ, რომ

$$tg\alpha = \frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB} = \ldots = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$tg\alpha = k$

აღნიშნულიდან გამომდინარე k-ს კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება.

3.3. ტრიგონომეტრიული იგივეობები

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

რადგან მართკუთხა სამკუთხედში $\beta = 90° - \alpha$, ამიტომ მივიღებთ:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$	$\sin 30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60°$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$	$\cos 30° = \sin(90° - 30°) = \sin 60°$
$tg\alpha = ctg(90° - \alpha)$	$tg 30° = ctg(90° - 30°) = ctg 60°$
$ctg\alpha = tg(90° - \alpha)$	$ctg 30° = ctg(90° - 30°) = tg 60°$

პითაგორას თეორემის თანახმად, ვიცით, რომ $a^2 + b^2 = c^2$ გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე c^2-ზე

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

შევცვალოთ თითოეული თანაფარდობა ტრიგონომეტრიული ფუნქციით

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

აღმოვაჩინეთ ახალი კავშირები და კანონზომიერება ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad a = c \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad b = c \cdot \cos\alpha$$

შევიტანოთ აღნიშნული ინფორმაცია ტანგენსის და კოტანგენსის ფორმულაში

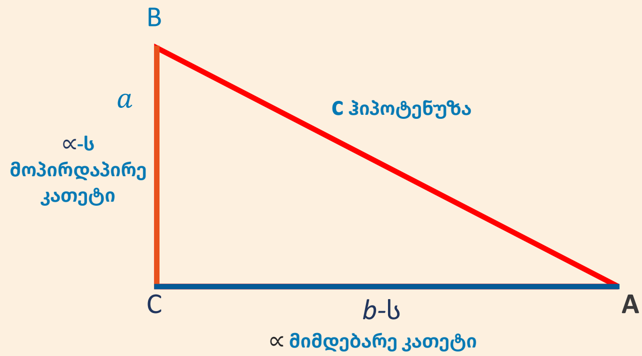
$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\alpha = \frac{c \cdot \sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \qquad ctg\alpha = \frac{c \cdot \cos\alpha}{c \cdot \sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

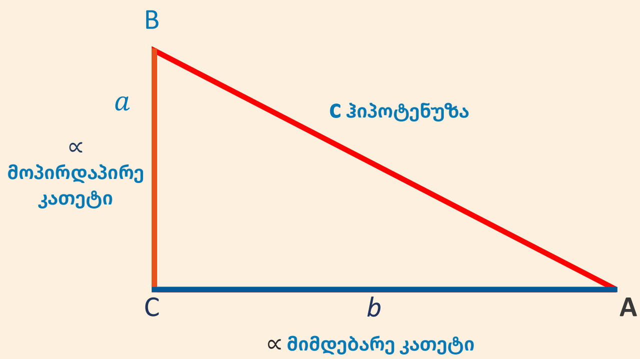
$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

როგორც ხედავთ, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთმანეთთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$tg\beta = \frac{b}{a}$
$ctg\alpha = \frac{b}{a}$	$ctg\beta = \frac{a}{b}$



3.3.1 ბლაგვი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი

საკოორდინატო სიბრტყეზე განვიხილოთ წრეწირი, რომლის ცენტრია სათავე, ხოლო რადიუსის სიგრძე უდრის 1-ს; ასეთ წრეწირს ეწოდება – ერთეულოვანი წრეწირი, ხოლო შესაბამის წრეს – ერთეულოვანი წრე.

ერთეულოვან წრეწირზე მოვნიშნოთ $B(x;y)$ წერტილი და Oy ღერძის ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $D(-x;y)$ წერტილი;

შევაერთოთ B წერტილი სათავესთან, დავუშვათ მართობი Ox ღერძზე და განვიხილოთ მართკუთხა ΔOBC, რომლის $\angle BOC = \alpha$;

ანალოგიურად, დავხაზოთ მართკუთხა ΔODE, $\Delta BOC = \Delta ODE$

ΔOBC-ში დავწეროთ α-კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$sin\alpha = \frac{BC}{OB} \ (1) \quad cos\alpha = \frac{OC}{OB} \ (2)$$

რადგან წრე ერთეულოვანია

$OB = R = 1$, ხოლო

$BC = y; \quad OC = x$

ჩავსვათ აღნიშნული (1) და (2) ფორმულაში და მივიღებთ, რომ

$$sin\alpha = \frac{y}{1} = y; \quad cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

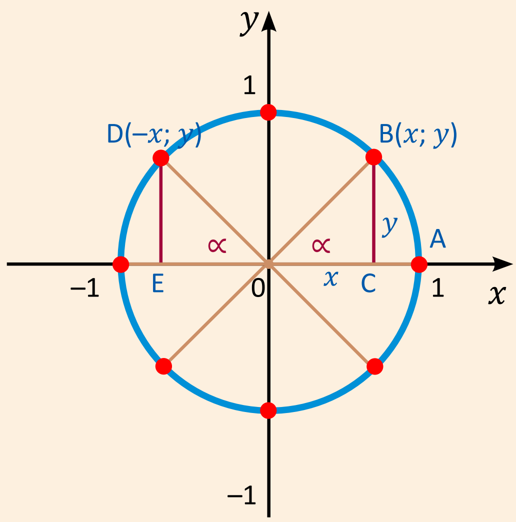
თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს დავინახავთ, რომ ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილის კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხესთან, რომელსაც ქმნის ამ წერტილის საკოორდინატო სისტემის სათავესთან შემაერთებელი მონაკვეთი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ე.ი. B წერტილის კოორდინატებია: $B(cos\alpha; sin\alpha)$

განვიხილოთ $\angle AOD = 180\text{-}\alpha$ ბლაგვი კუთხეა,

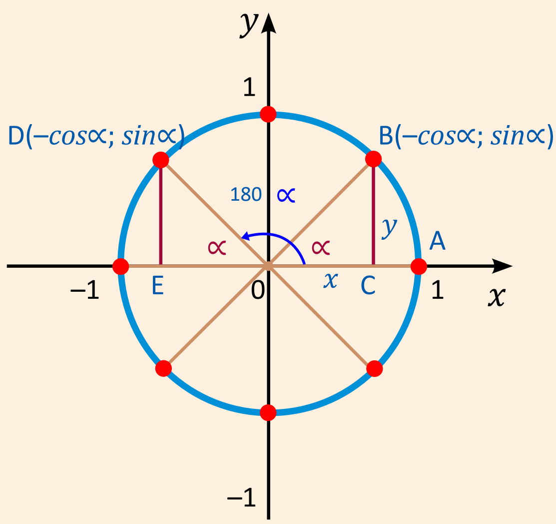
D წერტილის კოორდინატი შეესაბამება აღნიშნულ კუთხეს

$D(cos(180\text{-}\alpha); \ sin(180\text{-}\alpha))$, რადგან D სიმეტრიულია B წერტილის Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ $D(-cos\ \alpha; \ sin\alpha)$

თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს, მივიღეთ ახალი კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის



$\Delta BOC = \Delta DOE$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნით



ნიმუში 1 – ტრიგონომეტრიული იგივეობა

დაყვანის ფორმულა

$cos(180° - \alpha) = -cos\alpha$ $sin(180° - \alpha) = sin\alpha$ როგორც ვხედავთ, ბლაგვი კუთხის კოსინუსი უარყოფითი რიცხვია.	$\alpha = 30°$; $cos(180° - 30°) = -cos30°$ $cos(150°) = -cos30°$ $sin(180° - 30°) = sin30°$ $sin150° = sin30°$
როგორც ხედავთ, ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი ბლაგვი კუთხისთვის, მისი სინუსი და კოსინუსი გამოვთვალოთ შესაბამისი მახვილი კუთხის სინუსით და კოსინუსით.	

ნიმუში 2

- *როგორ ვიპოვოთ ბლაგვი კუთხის კოსინუსი ან სინუსი?*

ვიპოვოთ cos145° და sin145°

Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ $cos145°$ ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $cos145° = cos(180° - 35°) = -cos35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $cos145° \approx -0.82$ $cos35° \approx 0.82$	Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით შეგვიძლია ვიპოვოთ პირდაპირ sin145° ან გამოვიყენოთ დაყვანის ფორმულა: $sin145° = sin(180° - 35°) = sin35°$ **შევამოწმოთ:** Desmos Calculator-ით ან სხვა გრაფიკული კალკულატორით $sin145° \approx 0.57$ $sin35° \approx 0.57$

სავარჯიშოები

1. შეავსეთ ცხრილი და პასუხი დაამრგვალეთ მეათედებამდე სიზუსტით.

α	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$cos(180^\circ - \alpha)$	$sin(180^\circ - \alpha)$
0°				
15°				
45°				
80°				
90°				
120°				

ბ) შეამოწმეთ თითოეულისთვის სამართლიანია თუ არა იგივეობა: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

2. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი.
ა) 45°; ბ) 50°; გ) 30°; დ) 88°; ე) 60°.

3. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომელსაც აქვს მოცემული კუთხეების ტოლი სინუსი
ა) 145°; ბ) 133°; გ) 95°; დ) 108°; ე) 154°.

4. იპოვეთ ბლაგვი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია
ა) $cos30^\circ$; ბ) $cos45^\circ$; გ) $cos65^\circ$; დ) $cos29^\circ$; ე) $cos33^\circ$.

5. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $cos130^\circ$; ბ) $cos125^\circ$; გ) $cos135^\circ$; დ) $cos150^\circ$; ე) $cos120^\circ$.

6. დააკავშირეთ მოცემული კუთხეები მახვილ კუთხესთან და გამოთვალეთ
ა) $sin120^\circ$;ბ) $sin150^\circ$; გ) $sin135^\circ$; დ) $sin110^\circ$; ე) $sin170^\circ$.

7. იპოვეთ მახვილი კუთხე, რომლის კოსინუსი მოცემული კუთხეების კოსინუსის მოპირდაპირე რიცხვია:
ა) $cos135^\circ$; ბ) $cos150^\circ$; გ) $cos120^\circ$; დ) $cos160^\circ$; ე) $cos110^\circ$.

8. ჩვენ ვნახეთ, რომ $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ მოცემული ფორმულიდან გამომდინარე, იპოვეთ

ა) $tg135^\circ$; ბ) $tg150^\circ$; გ) $tg120^\circ$; დ) $tg180^\circ$; ე) $cos90^\circ$.

ბ) დაადგინეთ, როდის არ არის განსაზღვრული ტანგენსი და რატომ?