პროფესიული უნარების სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანაშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Swiss Agency for Development
and Cooperation SDC

პროფესიული უნარების სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

VIII. დავალების წარდგენა

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა ძალიან მნიშვნელოვანია სხვადასხვა ყოფით სიტუაციაში.

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ არის შესაძლებელი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება?*

კომპლექსური დავალება

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა

თქვენი დავალება

წარმოიდგინეთ, რომ ხართ ახალგაზრდა მეცნიერთა კლუბის წევრი და გევალებათ გამოიკვლიოთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა.

კერძოდ, შესასწავლია:

- დაადგინოთ გასროლის ადგილიდან რა მანძილის მოშორებით დავარდება კონკრეტული კუთხით გასროლილი სხეული.

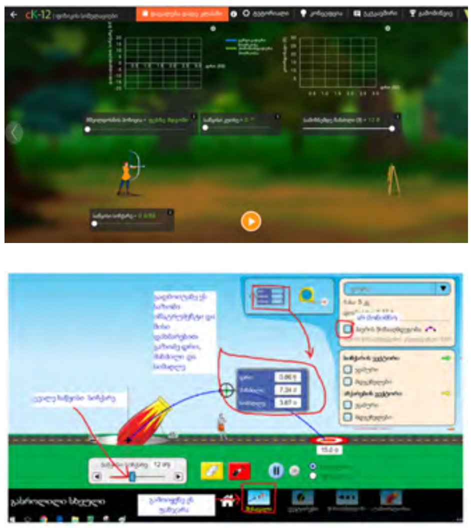
- როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე?
- რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

იმისათვის, რომ გამოიკვლიოთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა, შედით საიტზე Phet.Colorado.Edu ან [Ck12 – მიზანში სროლა](Ck12) და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე და ა.შ.) და დაადგინეთ, როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე.

გაგრძელება

VIII. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება



თუ აირჩევთ მეისრის სიმულაციას:

- დააყენეთ პარამეტრები ისე, რომ ისარი მოხვდეს მიზანში.
- თქვენ მიერ დაყენებული პარამეტრები დააორგანიზეთ ცხრილში.
- დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება). დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

მითითება: ჯერ დააფიქსირეთ კუთხე, ცვალეთ სიჩქარე და გამოიკვლიეთ, შემდეგ დააფიქსირეთ სიჩქარე, ცვალეთ კუთხე და გამოიკვლიეთ.
თუ აირჩევთ ზარბაზნის სიმულაციას

კვლევის შედეგად შეგროვებული მონაცემები დააორგანიზეთ ცხრილში:

ვარიანტი 1

	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)	დამატებითი ინფორმაცია
ცდა 1	15^0	4 მ/წმ				
ცდა 2	15^0	8 მ/წმ				
ცდა 3	15^0	16 მ/წმ				

ვარიანტი 2 – თავად ჩაატარეთ ექსპერიმენტი და შეიტანეთ თქვენთვის სასურველი მონაცემები

	გასროლილი კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)	დამატებითი ინფორმაცია
ცდა 1						
ცდა 2						
ცდა 3						
ცდა 4 და ა.შ.						

კომპლექსური დავალება

კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის აღწერა

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, თან დაურთეთ ცდის შედეგები და ფოტო მასალა.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

I. აღწერეთ კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია, გრაფიკი და დაასახელეთ რომელ სიდიდეებს შორის დამყარდა დამოკიდებულება?

II. ფორმულის წარმოდგენისას რომელ სიდიდეს შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადი და რომელს დამოკიდებული? რა ტიპის დამოკიდებულება დამყარდა ცვლადებს შორის? რომელი ფუნქციით არის შესაძლებელი აღნიშნული დამოკიდებულების წარმოდგენა?

III. მოცემულობიდან გამომდინარე რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი მოძრაობის ტრაექტორიის აღწერა/მოდელირება ფორმულით? რომელი ფორმით წარმოდგენაა უმჯობესი? წარმოადგინეთ თითოეული ფორმა და იმსჯელეთ, რომელი ფორმულირება არის მეტად მარტივი მოცემული სიტუაციისთვის.

IV. დააკავშირეთ თქვენს ხელთ არსებული ინფორმაცია რეალურ კონტექსტს, რას შეესაბამება დამოკიდებული ცვლადი, რას დამოუკიდებელი? რომელ სიდიდეებს შორის არის შესაძლებელი დამოკიდებულების გარკვევა? შეგიძლიათ იმსჯელოთ, სტანდარტული ფორმით წარმოდგენის შემთხვევაში, რას შეესაბამება b და c პარამეტრები?

V. როგორ დაგეხმარათ ტექნოლოგიები დავალების შესრულებაში? რომელი აპლიკაცია და სიმულაცია გამოიყენეთ და როგორ?

კომპლექსური დავალება

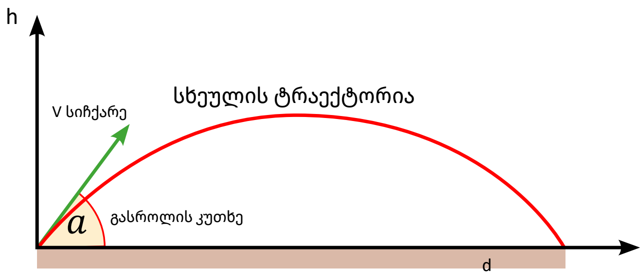
ინტეგრირება ფიზიკასთან:

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ როდესაც სხეულს ვისვრით ჰორიზონტისადმი კუთხით, სხეულის მოძრაობა აღიწერება განტოლებით:

$$h(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_ot+h_o \qquad \text{(I ფორმულა)}$$

$$v(t)=v_o+gt \qquad \text{(II ფორმულა)}$$

$$d=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} \qquad \text{(III ფორმულა)}$$



I ფორმულის შემთხვევაში:

h_o – სხეულის საწყისი სიმაღლეა, v_o – საწყისი ვერტიკალური სიჩქარე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ფორმულით ვხედავთ, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია დავადგინოთ, თუ რა სიმაღლეზეა სხეული მიწიდან, სხეულის მდებარეობა დამოკიდებულია დროზე კვადრატულად. მოცემულია კვადრატული ფუნქცია.

II ფორმულის შემთხვევაში:

d (distance) – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v_0 ბურთის მოძრაობის საწყისი სიჩქარე, α გასროლის კუთხე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. $g \approx 9.8$ მ/წმ² (ამოცანებში დავამრგვალოთ $g \approx 10$ მ/წმ²-მდე). ამ ფორმულაში სხეულის მოძრაობის სიჩქარე დამოკიდებულია აჩქარებაზე წრფივად.

ზემოთ მოცემული ფორმულებით ვხედავთ, რომ კვადრატული ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა ფორმით. მიმდინარე პარაგრაფში განვიხილავთ კვარატული ფუნქციის წარმოდგენის სტანდარტულ ფორმას.

6.1. ფუნქცია

საკვანძო კითხვა: როგორ არის შესაძლებელი სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა?

ნიმუში 1

განვიხილოთ კვადრატი, რომლის გვერდია x და ფართობი S. ვიცით, რომ $S = x^2$

$S = x^2$

x	1	2	3	4
S	1	4	9	16

როგორც ვხედავთ, კვადრატის ფართობი დამოკიდებულია კვადრატის გვერდის სიგრძეზე.

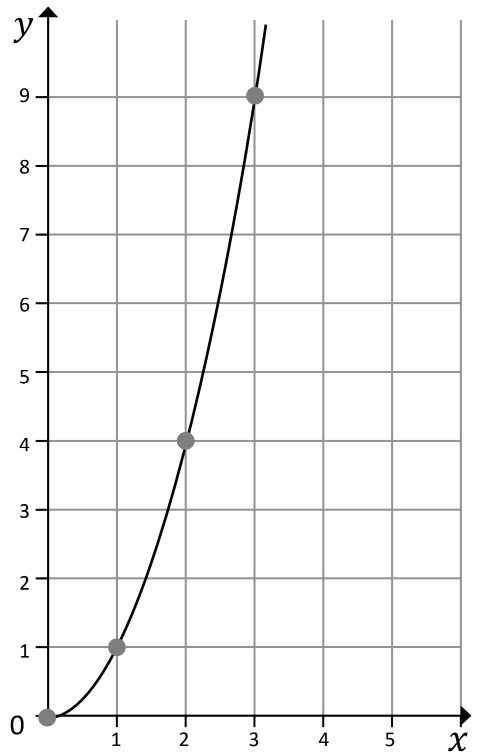
დავაწყვილოთ ინფორმაცია შემდეგი სახით:

(გვერდი, ფართობი)

↓

(1;1) (2;4) (3;9) (4;16)

საკოორდინატო სიბრტყეზე, X ღერძს შევუსაბამოთ კვადრატის გვერდი, Y ღერძს – ფართობი, ცხრილით მოცემული ინფორმაცია გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე:



ნიმუში 2

განვიხილოთ კუბი, რომლის გვერდის სიგრძეა x და მოცულობა V. ვიცით, რომ $V = x^3$

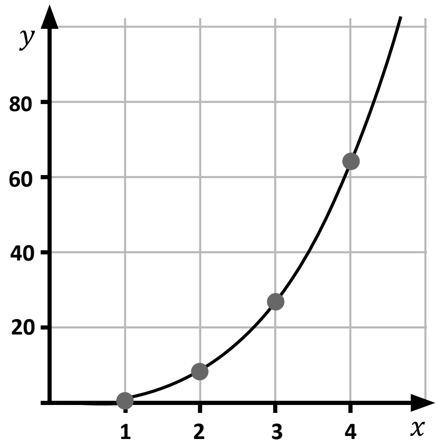
$$V = x^3$$

x	1	2	3	4
V	1	8	27	64

როგორც ვხედავთ, კუბის მოცულობა დამოკიდებულია კუბის გვერდის სიგრძეზე.

დავაწყვილოთ ინფორმაცია შემდეგი სახით:
(გვერდი, ფართობი)
↓
(1;1) (2;8) (3;27) (4;64)

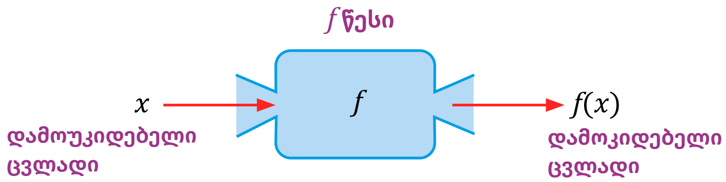
საკოორდინატო სიბრტყეზე X ღერძს შევუსაბამოთ გვერდი, Y ღერძს – მოცულობა და ცხრილში მოცემული ინფორმაცია გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.



გამომდინარე იქიდან, რომ როგორც კვადრატის გვერდის სიგრძე და ფართობი, ისე კუბის გვერდი და მოცულობა ვერ იქნება უარყოფითი, ამიტომ x-ის ნაცვლად განვიხილეთ მხოლოდ მისი დადებითი მნიშვნელობები და შესაბამისად, მივიღეთ y-ცვლადის დადებითი მნიშვნელობები.

ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში, სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება წარმოდგენილია **სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ფორმულით და გრაფიკის მეშვეობით.** ვხედავთ, რომ X-ის ყოველ მნიშნელობას შეესაბამება Y-ის ერთადერთი მნიშვნელობა, მაშასადამე, მოცემულ მაგალითებში გვაქვს სიდიდეებს შორის ფუნქციური დამოკიდებულება. ასევე, განსაზღვრულია წესი, რომლის მეშვეობითაც X-ს შეესაბამება Y-ს: პირველ შემთხვევაში, x ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება მისი კვადრატი, მეორე შემთხვევაში, მისი კუბი.

როგორც უკვე ვიცით, ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობას, როდესაც ერთი სიმრავლის ყოველ ელემენტს, შეესაბამება მეორე სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, **ფუნქცია** ეწოდება. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით.



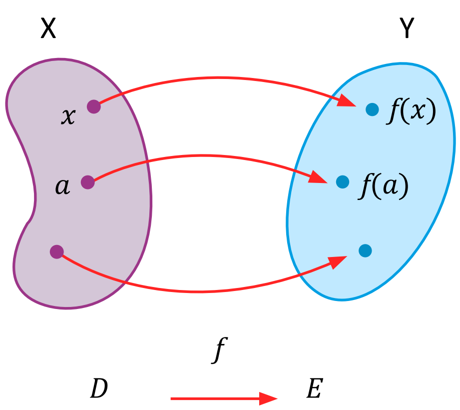
$y = f(x)$

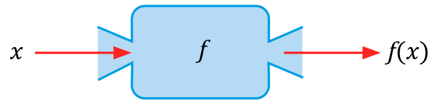
- სიმრავლეს, საიდანაც იღებს x მნიშვნელობებს, ეწოდება განსაზღვრის არე და აღინიშნება სიმბოლოთი D. (ხშირად ვწერთ $D(f)$).
- x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის y იღებს გარკვეულ ერთადერთ მნიშვნელობას. ყველა მიღებული y მნიშვნელობებით ვიღებთ y-ის მნიშვნელობების სიმრავლეს, შესაბამისად, აღნიშნულ სიმრავლეს ეწოდება მნიშვნელობათა სიმრავლე და აღინიშნება სიმბოლოთი E. (ხშირად ვწერთ $E(f)$).

- წესს, რომელიც მოქმედებს x-ზე, ეწოდება f-წესი.
- მოცემულია ფუნქცია, ნიშნავს მოცემულია განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა არე და წესი, რომელიც მოქმედებს ყოველ ელემენტზე განსაზღვრის არიდან.

მოცემულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა D, ეწოდება y-ცვლადის x ცვლადზე ისეთ დამოკიდებულებას, როდესაც ყოველ x რიცხვს განსაზღვრის არიდან (D სიმრავლიდან), შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი მნიშვნელობათა სიმრავლიდან (E-სიმრავლიდან)





ვწერთ შემდეგნაირად:

$$y = f(x)$$

x რიცხვის შესაბამის y-ს ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობა x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $f(x)$

x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი (ან არგუმენტი)
y-ს ეწოდება დამოკიდებული ცვლადი

მითითება: ვამბობთ, რომ მოხდა D-სიმრავლის ასახვა E-სიმრავლეში; აღნიშნულს ჩავწერთ, როგორც $f : D \to E$

ფუნქციის გრაფიკი

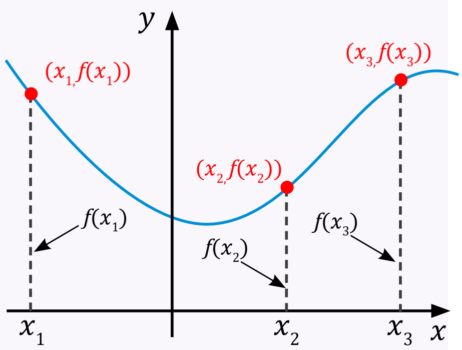
f-ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყის $(x; y)$ წერტილთა სიმრავლეს, სადაც $y = f(x)$ და x – იღებს ყველა მნიშვნელობას განსაზღვრის არიდან.

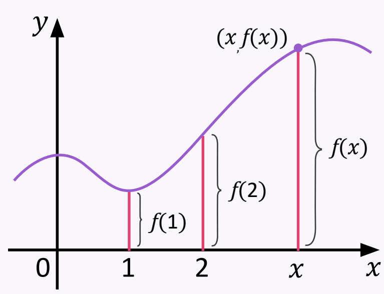
$(x_1, f(x_1))$ – სადაც, x_1 არის განსაზღვრის არიდან აღებული რიცხვი, რომელსაც შეესაბამება y_1. იქიდან გამომდინარე, რომ y_1-ის გამოთვლა ხდება f წესით, ვწერთ $f(x_1)$.

$f(x_1)$ იგივეა რაც y_1

მაგალითად, თუ
$x_1 = 1$ ვიღებთ $f(x_1) = f(1)$
$x_2 = 2$ ვიღებთ $f(x_2) = f(2)$
ნებისმიერი x-სთვის განსაზღვრის არიდან ვწერთ $f(x)$
$y = f(x)$

გრაფიკზე მოცემულია 3 რომელიღაც რიცხვი განსაზღვრის არიდან და მათი შესაბამისი y-ები მნიშვნელობათა სიმრავლიდან, გრაფიკის ამ სამი წერტილის კოორდინატებია: $(x_1, f(x_1))$; $(x_2, f(x_2))$; $(x_3, f(x_3))$.





ნიმუში 1-ის გაგრძელება

იმისათვის, რომ ჩანაწერი გახდეს ცხადი, ჩავწეროთ პირველი ნიმუში აღნიშნული წესით.

ვიცით, რომ $S = x^2$, რა დადებითი რიცხვიც არ უნდა ჩავსვათ x-ის ნაცვლად, მას შეესაბამება მისი კვადრატი. შესაბამისად, ვამბობთ, რომ x-ზე მოქმედებს f კვადრატული წესი.

$$f(x) = x^2$$

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	4	9	16

$x = 1$ $f(1) = 1^2 = 1$

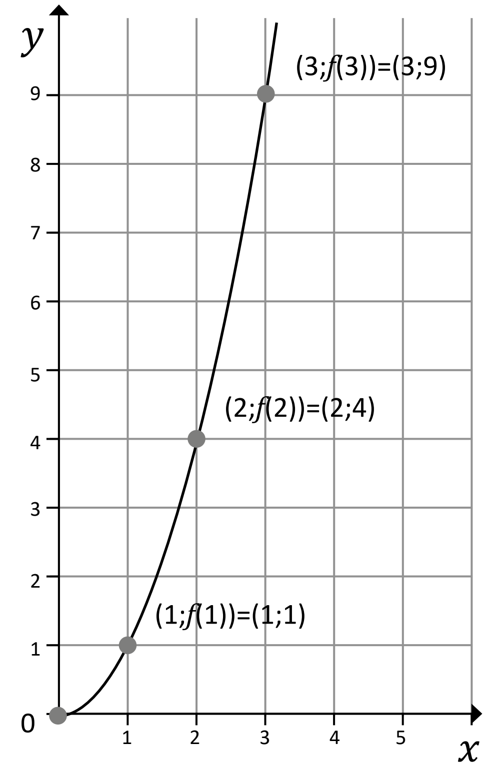
$x = 2$ $f(2) = 2^2 = 4$

$x = 3$ $f(3) = 3^2 = 9$

$x = 4$ $f(4) = 4^2 = 16$

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ – მნიშვნელობები შეესაბამება y-ს, მათ აღვნიშნავთ y-ღერძზე, ამიტომ სიმარტივისთვის ვიყენებთ აღნიშვნას – $(x;y)$

თუმცა იცოდეთ, რომ $(x;y)$, იგივეა რაც $(x;f(x))$



გრაფიკზე ყოველი x-თვის, განსაზღვრულია ფუნქციის შესაბამისი $y = f(x)$ მნიშვნელობა

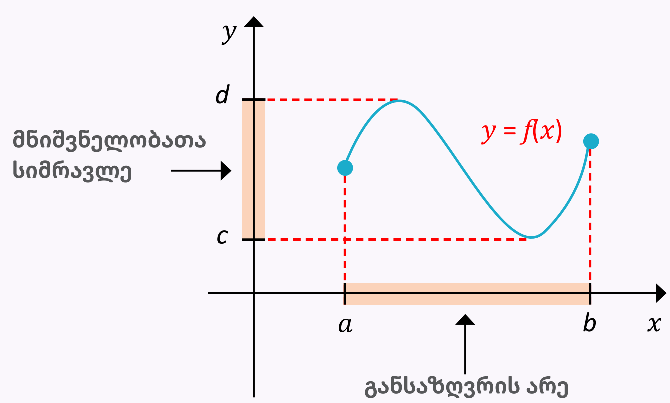
განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

ხშირად ფუნქცია გამოისახება გრაფიკულად. გრაფიკის მიხედვით მარტივია $(x; y)$ წყვილის დადგენა, ასევე, განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის გარკვევა.

ნახაზზე მოცემულია გარკვეული $f(x)$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვის არეა $D(f)=[a;b]$

ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $E(f) = [c;d]$

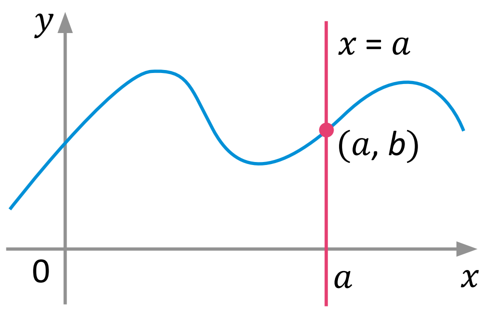
მითითება: $D(f)$ – აღნიშავს f ფუნქციის განსაზღვრის არეს. $E(f)$-აღნიშნავს f-ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს.



წინარე მასალის გამეორება

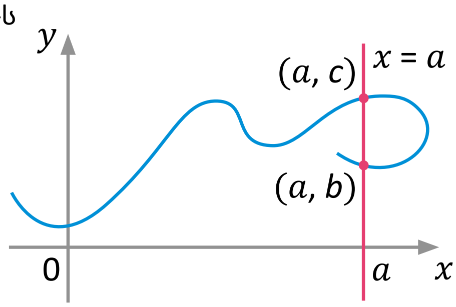
გავიხსენოთ როგორ ხდება გრაფიკის მეშვეობით ფუნქციის ამოცნობა

ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის გრაფიკი – ყოველი ვერტიკალური წრფე გრაფიკს კვეთს ერთადერთ წერტილში



ქვემოთ არ არის მოცემული ფუნქციის გრაფიკი – გავლებული ვერტიკალური წრფე გრაფიკს კვეთს ერთზე მეტ წერტილში (მოცემულ შემთხვევაში ორ წერტილში)

როცა $x = a$, y იღებს ორ მნიშვნელობას – c-ს და b-ს



ნიმუში 1-ის გაგრძელება

პირველ ნიმუშში **განსაზღვრის არეა** $D(f) = [0; +\infty)$ თუ დავუშვებთ, რომ კვადრატის გვერდია 0, ფართობიც იქნება 0.

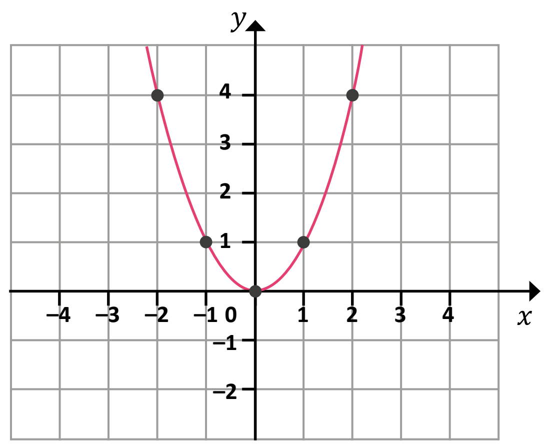
მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [0; +\infty)$

განვიხილოთ ფუნქცია

$f(x) = x^2$ როდესაც $D(f) = (-\infty; \infty)$)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



მოცემულ გრაფიკს ჰქვია პარაბოლა.

ფუნქციას – კვადრატული ფუნქცია

$D(f) = (-\infty; \infty)$)

$E(f) = [0; +\infty)$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს 0-დან $+\infty$-მდე

ნიმუში 2-ის გაგრძელება

მეორე ნიმუშში **განსაზღვრის არეა** $D(f) = [0; +\infty)$ თუ დავუშვებთ, რომ კუბის გვერდია 0, მოცულობაც იქნება 0.

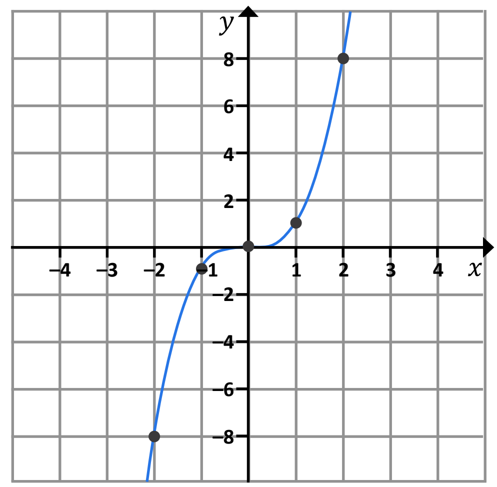
მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [0; +\infty)$

განვიხილოთ ფუნქცია

$f(x) = x^3$ როდესაც $D(f) = (-\infty; +\infty)$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



მოცემულ ფუნქციას ჰქვია – კუბური ფუნქცია

$D(f) = [-\infty; +\infty)$

$E(f) = [0; +\infty)$

მინიშნება: როდესაც მოცემულია რიცხვითი ფუნქცია, მაშინ მასთან ერთად მოცემული უნდა იყოს განსაზღვრის არეც (თუ განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და ფუნქცია რაიმე ფორმულითაა მოცემული, ხშირად ამოცანის პირობა მოითხოვს, რომ დაადგინოთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე).

ნიმუში 3

მოცემულია ფუნქცია ფორმულით:

$f(x) = 5x^3 - 4x$,

იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები, როდესაც $x = -2; 0; 1$

$x = -2 \quad f(-2) = 5 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -40 + 8 = -32$

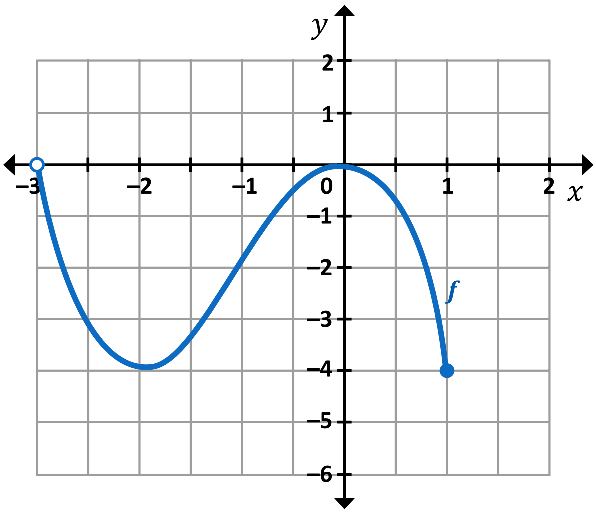
$x = 0 \quad f(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$

$x = 1 \quad f(1) = 5 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = 1$

მივიღეთ $(-2; -32)$,$(0;0)$,$(1;1)$

ნიმუში 4

იპოვეთ f-ფუნქციის მაქსიმალური განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.



გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ $-3 < x \leq 1$ ე.ი. $D(f) = (-3; 1]$

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ $-4 \leq y \leq 0$ ე.ი. $E(f) = [-4; 0]$

კანონზომიერების კვლევა და მოდელირება:	
როგორც ვისწავლეთ, რომ ფუნქციის წარმოდგენა შესაძლებელია:	■ ცხრილის მეშვეობით ■ ანალიზურად (განტოლებით, ფორმულით) ■ გრაფიკულად ■ სიტყვიერად
გავიხსენოთ, როგორ ხდება ცხრილის მეშვეობით დადგენა და რა ტიპის დამოკიდებულებაა ცვლადებს შორის	

გაგრძელება

წრფივი დამოკიდებულება

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია:

+5 +5 +5

x	0	5	10	15
y	50	40	30	20

−10 −10 −10

- ცხრილში ვხედავთ, რომ x ცვლადის 5-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 10-ით შემცირებას; ე.ი. y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.
- შემდეგი ნაბიჯია ფორმულირება.
- ვიცით, რომ წრფივი ფუნქცია მიიღება ფორმულით:

$$y = kx + b$$

სადაც k – დახრილობაა; b კი Oy ღერძთან კვეთის წერტილი:

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}} =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10}{5} = -2$$

პროცედურა: თუ ვიცით, ნებისმიერი ორი წერტილი ვიპოვით k-ს.

ცხრილიდან მარტივად დავინახავთ, რომ როცა $x = 0$, $y = 50$

განხილული ფუნქცია ფორმულით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$y = -2x + 50$

კვადრატული დამოკიდებულება

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია:

1 1 1 1

x	−2	−1	0	1	2
y	13	4	1	4	13

−9 −3 3 9

6 6 6

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

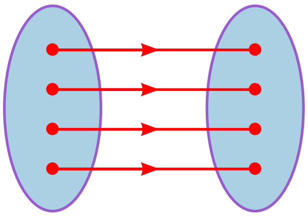
−5 −3 −1 1 3 5

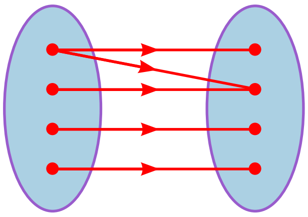
2 2 2 2 2

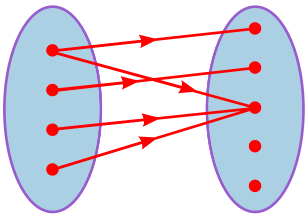
- ცხრილში ვხედავთ, რომ x ცვლადის 1-ით ზრდა, არ იწვევს y ცვლადის თანაბარ ცვლილებას, როცა განხილულია პირველი მონაცემები. თუმცა, თუ ჩავწერთ ცვლილებას და შემდეგ განვიხილავთ მათ ცლილებას დავინახავთ, რომ ტოლია.
- როდესაც მეორე ცვლილება არის ტოლი ვამბობთ, რომ y დამოკიდებულია x-ზე კვადრატულად.
- **პროცედურა:** მოცემულ თავში გაეცნობით, როგორ არის შესაძლებელი კვადატული დამოკიდებულების წარმოდგენა: ფორმულით, გრაფიკით და რა ტიპის რეალური მოვლენების აღწერისას გვჭირდება.

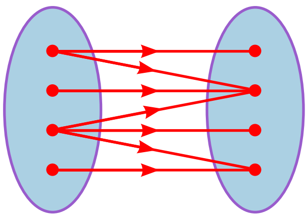
სავარჯიშოები

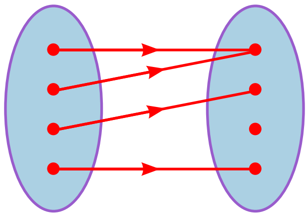
1. ქვემოთ დიაგრამით მოცემულია სხვადასხვა სიმრავლეს შორის მიმართებები. რომელი დიაგრამით არის მოცემული ფუნქცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

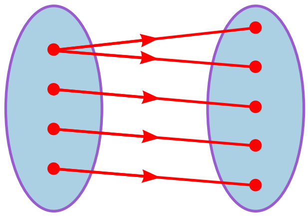
ა)


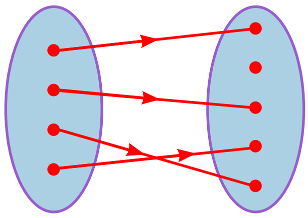
ბ)


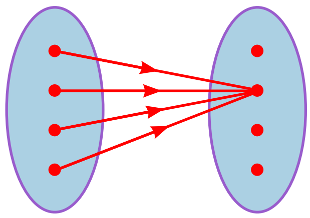
გ)


დ)


ე)


ვ)


ზ)


თ)


2. ქვემოთ მოცემულ შემთხვევებში, ნახაზზე მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე შეავსეთ დიაგრამა და გამოიკვლიეთ:

ა) როგორ არის დამოკიდებული პერიმეტრი მართკუთხედის სიგრძეზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

ბ) როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძეზე? არის თუ ეს არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

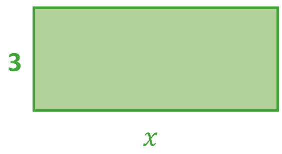
გ) როგორ არის დამოკიდებული წრეწირის სიგრძე წრის რადიუსზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

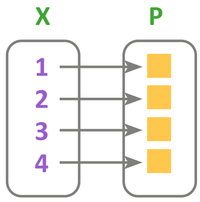
დ) როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა სიმაღლეზე? არის თუ არა ფუნქციური დამოკიდებულება?

შენიშვნა: დავუშვათ, იცვლება მხოლოდ ცვლადით აღნიშნული ფიგურის გვერდის სიგრძე.

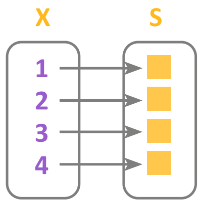
სავარჯიშოები

ა)

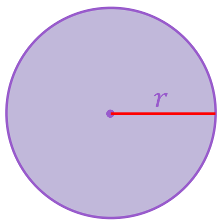


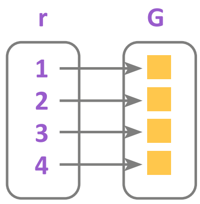


ბ)

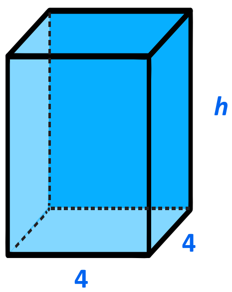


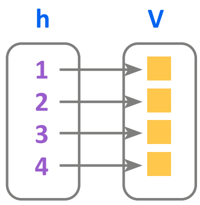
გ)





დ)





3. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x)= 4x - 5$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	–8	–4	0	1	5
$f(x)$					

გაიხსენეთ წრფივი ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკი.

4. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = -3x + 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	–3	–2	0	1	2
$f(x)$					

გაიხსენეთ წრფივი ფუნქცია და ააგეთ გრაფიკი.

5. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = -3x^2 + 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$					

სავარჯიშოები

6. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $f(x) = 2x^2 - 4x$.

იპოვეთ: $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$.

დაწერეთ წერტილთა წყვილები, გადაიტანეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და შეაერთეთ. რისი თქმა შეგიძლიათ გრაფიკზე?

7. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x) = x^2 + 2x$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$					

8. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x)= x^3 - 2$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-2	0	1	2	3
$f(x)$					

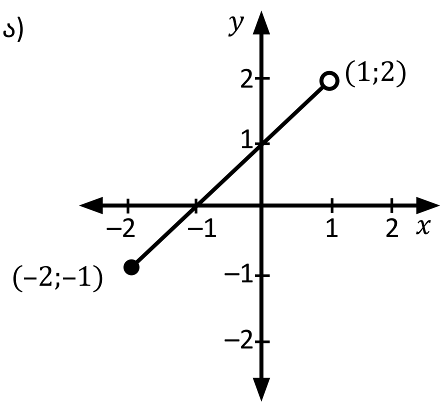
9. ფუნქცია მოცემულია ფორმულით: $f(x)=2x^3 - 5x$. მითითებული x-ის მნიშვნელობებისთვის იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობები და შეავსეთ ცხრილი:

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$					

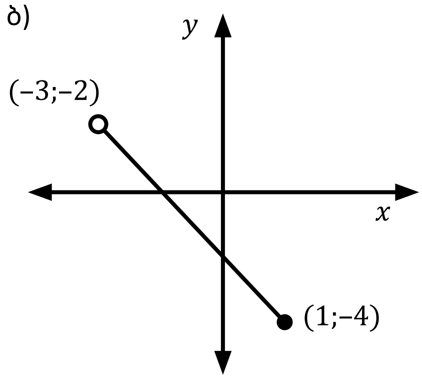
10. მოცემულია ფუნქცია ფორმულით $f(x) = -3x^3 + x - 1$, იპოვეთ $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$;

11. იპოვეთ გრაფიკით მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა)

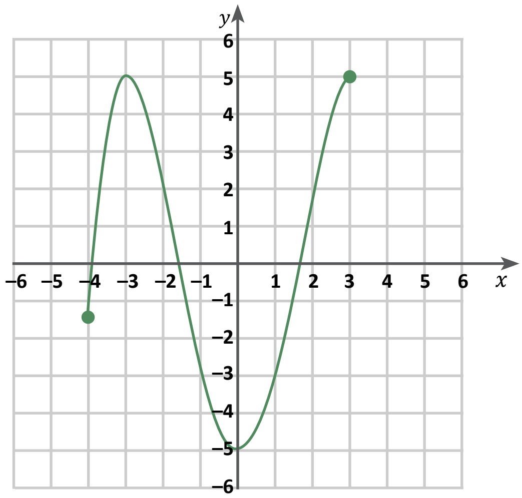


ბ)

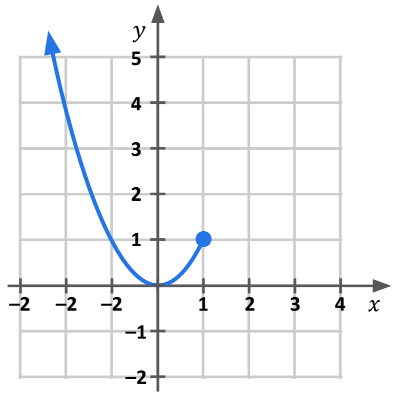


სავარჯიშოები

გ)



დ)



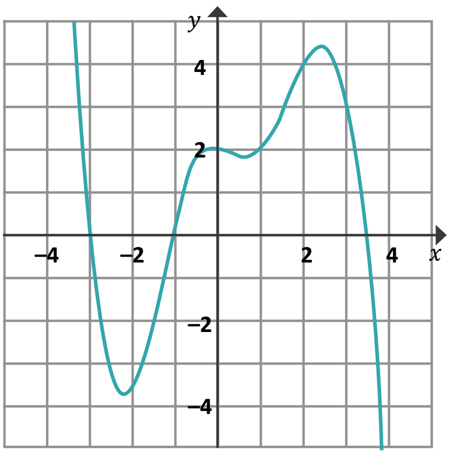
მინიშნება: ისარი მიუთითებს, რომ გრაფიკი გრძელდება

12. ქვემოთ მოცემულია სხვადასხვა ფუნქციის გრაფიკი, თითოეული გრაფიკიდან გამომდინარე იპოვეთ:

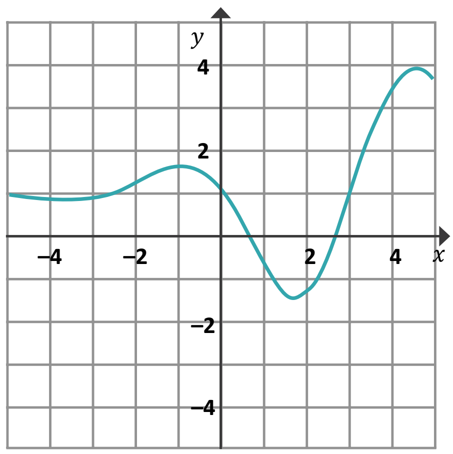
- y-ის მნიშვნელობა როცა $x = -3; -1; 0; 1; 3$
- იპოვეთ x-ის რა მნიშვნელობებისთვის უდრის $y = -3; 0; 1$

პასუხები დაამრგვალეთ მეათედამდე სიზუსტით.

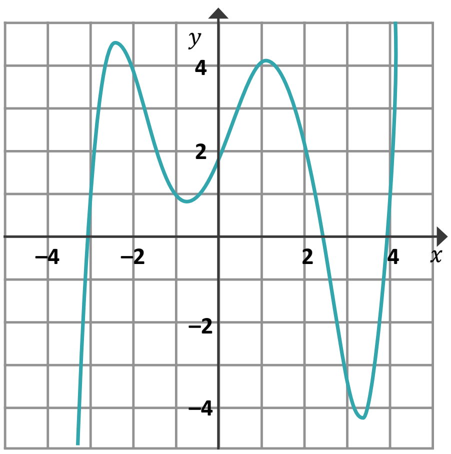
ა)



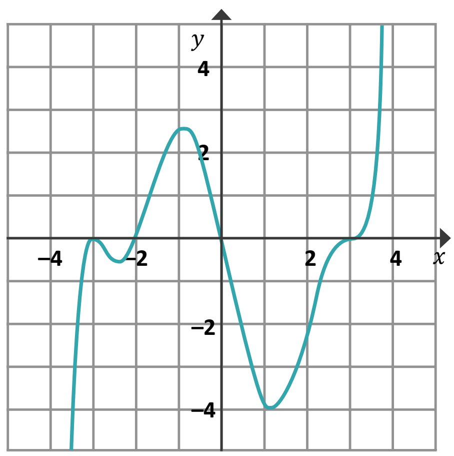
გ)



ბ)



დ)



სავარჯიშოები

13. **გამოწვევა:** კანონზომიერების აღმოჩენა

ცხრილით მოცემულია ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

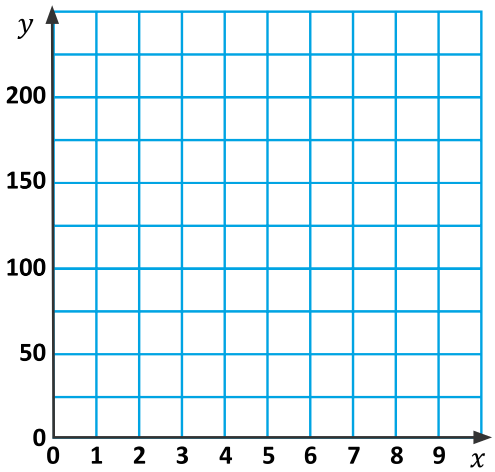
- ამოწერეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.
- გაარკვიეთ დამოკიდებულება წრფივია თუ არა. პასუხი დაასაბუთეთ.
- დაწერეთ ცვლადებს შორის დამოკიდებულების შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ გრაფიკი.

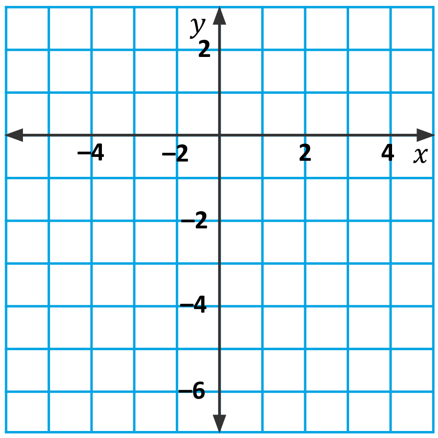
ა)

x	0	2	4	6	8
y	150	125	100	75	50

ბ)

x	–4	–2	0	2	4
y	1	0	–1	–2	–3





14. **გამოწვევა:** კანონზომიერების აღმოჩენა

- ცხრილით მოცემულია სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება.
- დაადგინეთ დამოკიდებულება წრფივია თუ კვადრატული. პასუხი დაასაბუთეთ.

ა)

x	–2	–1	0	1	2
y	14	6	0	–4	–6

ბ)

x	0	1	2	3	4
y	3	1	–5	–15	–29

ა)

x	–2	0	2	4	6
y	8	4	0	–4	–8

ბ)

x	0	1	2	3	4
y	1	6	15	28	49

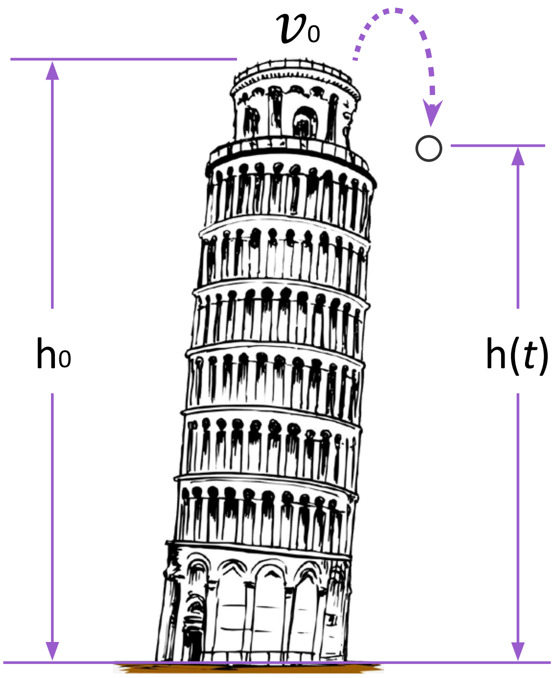
6.2. ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნები, კვადრატული ფუნქცია

გარდაქმნა ეწოდება ობიექტის პოზიციის ან ფორმის ცვლილებას.

გარდაქმნის სახეებია: **პარალელური გადატანა, ღერძული სიმეტრია, მობრუნება, ჰომოთეტია, არეკლვა.**

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილავთ ფუნქციების გარდაქმნებს, უფრო კონკრეტულად კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნას.

ობიექტის გასროლისას, ხდება მისი პარალელური გადატანა.



ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია, გარდაქმნები

კვადრატული ფუნქცია, ფუნქციის გარდაქმნები

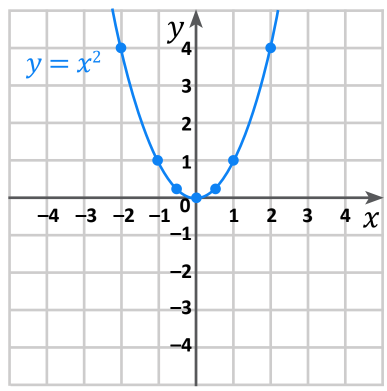
განვიხილოთ გრაფიკის პარალელური გადატანა კოორდინატებში და ფორმულით.

კვადრატული ფუნქციის საწყისი ფორმა $y = ax^2$, სადაც $a \neq 0$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $a > 0$ და $a = 1$, მივიღებთ $y = x^2$

ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი

$a > 0$



- კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება **პარაბოლა.**
- პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი – Oy ღერძი.

გაგრძელება

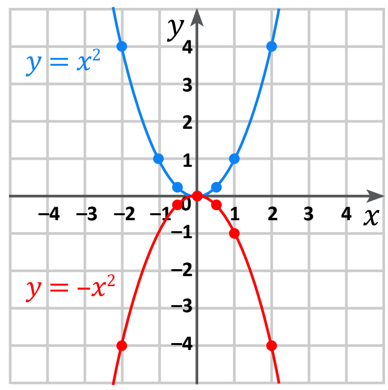
- როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a > 0$, პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ზევით;
- ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(f)=(-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = [0; +\infty)$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს 0-დან $+\infty$-მდე;
- ფუნქციის წვეროს კოორდინატია (0;0).

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც

$a < 0$ და $a = -1$, მივიღებთ $y = -1 \cdot x^2 = -x^2$

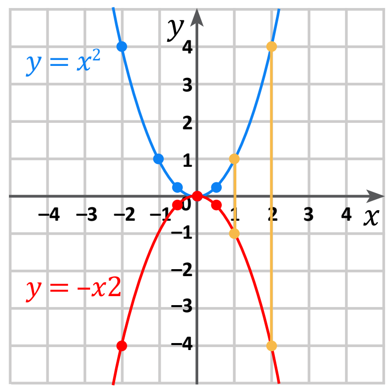
ავაგოთ გრაფიკი

$a > 0$



$a < 0$

მივიღეთ $y = x^2$ გრაფიკის სიმეტრიული გრაფიკი Ox ღერძის გასწვრივ.



როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a > 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით), ხოლო როდესაც $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).

როგორც გრაფიკიდან ვხედავთ, როდესაც $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიმართულია სათავიდან ქვევით.

- ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(f) = (-\infty; 0]$ – რადგან y იღებს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან 0-მდე;
- პარაბოლას წვეროს კოორდინატია (0;0).

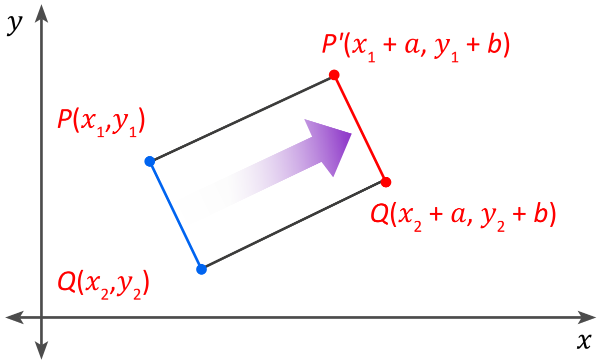
კავშირი ანალიზურ გეომეტრიასთან

გადავიტანოთ პარალელურად PQ მონაკვეთი წრფის გასწვრივ

პარალელური გადატანის დროს, ფიგურის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრფის გასწვრივ.

მოხდა PQ მონაკვეთის ყოველი წერტილის ასახვა P_1Q_1 მონაკვეთში.

მოცემულ შემთხვევაში, მონაკვეთის ყოველი წერტილი პარალელურად გადავიდა a ერთეულით მარჯვნივ და b ერთეულით ზემოთ.



გამომდინარე იქიდან, თუ რა წესით ხდება პარალელური გადატანა, შესაბამისად იცვლება ფიგურის წერტილთა კოორდინატები.

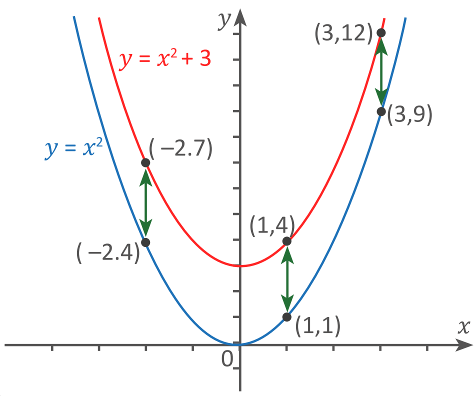
მოქმედებათა თვისებები	
განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის ტიპი:	**კოორდინატებში გამოსახვა:**
a – ერთეულით მოძრაობა მარჯვნივ	$(x; y) \to (x + a; y)$
a – ერთეულით მოძრაობა მარცხნივ	$(x; y) \to (x - a; y)$
b – ერთეულით მოძრაობა ზევით	$(x; y) \to (x; y + b)$
b – ერთეულით მოძრაობა ქვევით	$(x; y) \to (x; y - b)$

კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნები

მოცემულია საწყისი $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია.
ვწერთ მოცემულია საწყისი ფუნქცია $y = f(x)$.

I. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 3 ერთეული ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით) მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა $y = x^2 + 3$.



ნახაზი 1.

გაგრძელება

ნახ.1-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 3 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ ზევით (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით), გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის x კოორდინატი იგივეა, ხოლო y გაიზარდა 3-ერთეულით.

$$(x; y) \to (x; y + 3)$$

ჩავწეროთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით a ერთეულით ზევით მივიღეთ $y = x^2 + a$ ფუნქცია.

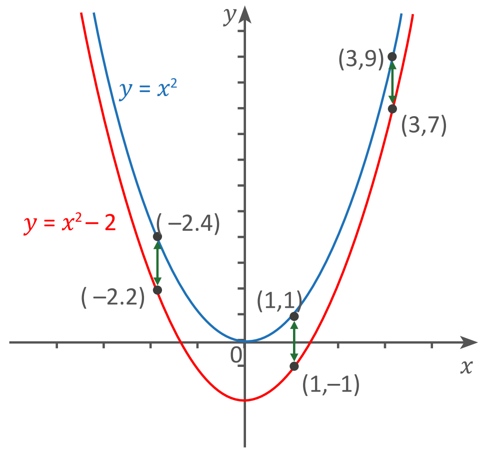
II. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 1 ერთეული ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = x^2 - 1.$

მიღებული გრაფიკის წვეროს კოორდინატია: (0;–1).

გრაფიკის წვერომ გადაინაცვლა 1 ერთეულით ქვემოთ.



ნახაზი 2.

ნახ.2-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 1 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ ქვევით (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის x კოორდინატი იგივეა, ხოლო y შემცირდა 1-ერთეულით.

$$(x; y) \to (x; y - 1)$$

ჩავწეროთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით a ერთეულით დაბლა მივიღეთ $y = x^2 — a$ ფუნქცია.

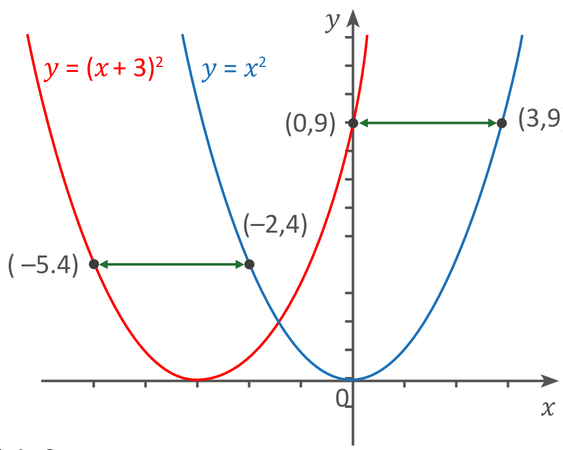
III. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი) წვეროს კოორდინატით (0; 0)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = (x + 3)^2.$

მიღებული პარაბოლას წვეროს კოორდინატია: (–3;0).

გრაფიკის წვერომ გადაინაცვლა 3 ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით), თუმცა ფორმულაში იწერება საპირისპირო ნიშანი.



ნახაზი 3.

!! ყურადღება მიაქციეთ: თავდაპირველი ფუნქციის ფორმულა იყო $y = x^2$. Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით 3 ერთეულით მარცხნივ პარალელური გადატანის შემდეგ მივიღეთ $y = (x + 3)^2$ ფუნქცია.

ნახ.3-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 3 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ მარცხნივ გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის y კოორდინატი იგივეა, ხოლო x კოორდინატმა წაინაცვლა მარცხნივ 3 ერთეულით (x-ს გამოაკლდა 3). ყოველმა $(x; y)$ წერტილმა გრაფიკიდან გადაინაცვლა $(x - 3; y)$ – წერტილში

$$(x; y) \to (x - 3; y)$$

მინიშნება: ფორმულაში ვწერთ საპირისპირო ნიშანს

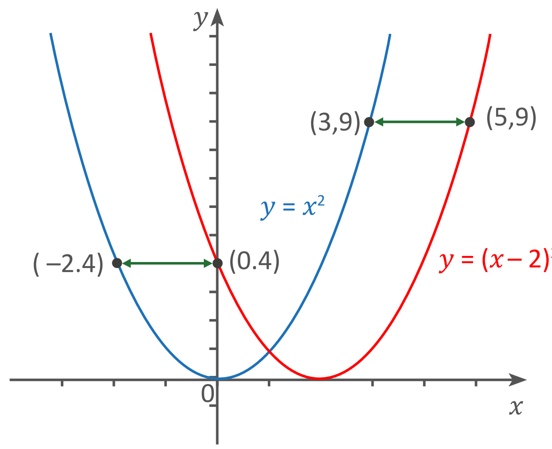
ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით b ერთეულით Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (მარცხნივ) მივიღეთ $y = (x + b)^2$ ფუნქცია;

IV. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

გრაფიკის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით მარჯვნივ (Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით), მივიღებთ წითელი ფერის გრაფიკს, რომელსაც შეესაბამება ფორმულა:

$y = (x - 2)^2$

გრაფიკის წვერომ გადაინაცვლა 2 ერთეულით მარჯვნივ, თუმცა ფორმულაში იწერება საპირისპირო ნიშანი.



ნახაზი 4.

!! ყურადღება მიაქციეთ: თავდაპირველი ფუნქციის ფორმულა იყო $y = x^2$. Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით 2 ერთეულით მარჯვნივ პარალელური გადატანის შემდეგ მივიღეთ $y = (x - 2)^2$ ფუნქცია.

ნახ.4-ზე ვხედავთ, რომ ლურჯი გრაფიკის 2 ერთეულით პარალელურმა გადატანამ მარჯვნივ გრაფიკის ყოველი წერტილი ასახა ახალ წერტილში, რომლის y კოორდინატი იგივეა, ხოლო x კოორდინატმა წაინაცვლა მარჯვნივ 2 ერთეულით (x-ს მიემატა 2). ყოველმა $(x; y)$ წერტილმა გრაფიკიდან გადაინაცვლა $(x + 2; y)$ – წერტილში

$$(x; y) \to (x + 2; y)$$

მინიშნება: ფორმულაში ვწერთ საპირისპირო ნიშანს

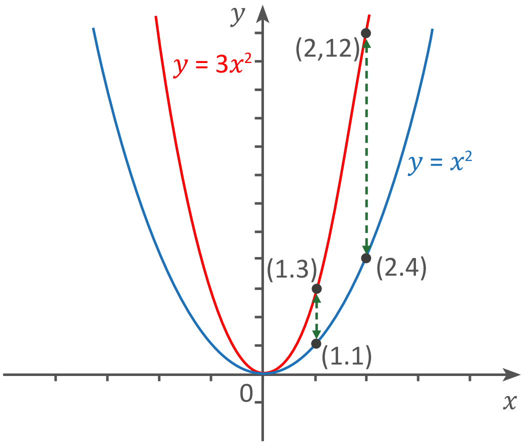
ჩავწერთ: $y = x^2$ ფუნქციის პარალელური გადატანით b ერთეულით Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით (მარჯვნივ) მივიღეთ $y = (x - b)^2$ ფუნქცია;

ფუნქციის რიცხვზე გამრავლება – გრაფიკის გარდაქმნა

V. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

ფუნქციის 3-ზე გამრავლებით ვიღებთ წითელ გრაფიკს, რომლის ფორმულაა $y = 3x^2$. აღნიშნული გარდაქმნით ყოველი $(x; y)$ წერტილი აისახა $(x; 3y)$ წერტილში:

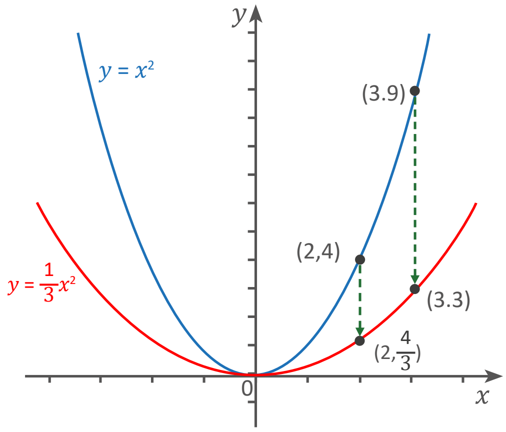
$(x; y) \rightarrow (x; 3y)$



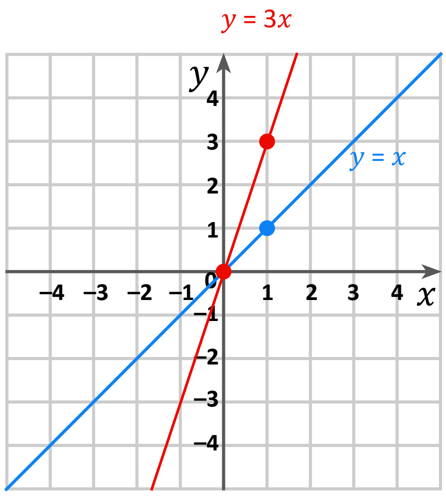
VI. განვიხილოთ $y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია (ლურჯი ფერის გრაფიკი)

ფუნქციის $\frac{1}{3}$-ზე გამრავლებით ვიღებთ წითელ გრაფიკს, რომლის ფორმულაა $y = \frac{1}{3}x^2$. აღნიშნული გარდაქმნით ყოველი $(x; \frac{1}{3}y)$ წერტილი აისახა $(x; y)$ წერტილში:

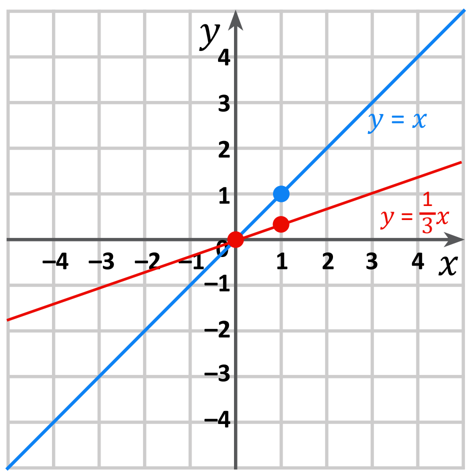
$(x; y) \rightarrow (x; \frac{1}{3}y)$



გავავლოთ პარალელი წრფივ ფუნქციასთან:



გავავლოთ პარალელი წრფივ ფუნქციასთან:



$y = x^2$ კვადრატული ფუნქციის გამრავლებით 1-ზე მეტ რიცხვზე ვიღებთ ფუნქციას, რომელიც მეტად „შეკუმშულია" და უახლოვდება y-ღერძს. $y = x^2$ კვადრატული ფუნქციის გამრავლებით რიცხვზე, რომელიც მოთავსებულია 0-ს და 1-ს შორის, ვიღებთ ფუნქციას, რომლის გრაფიკიც მეტად „ფართოა".

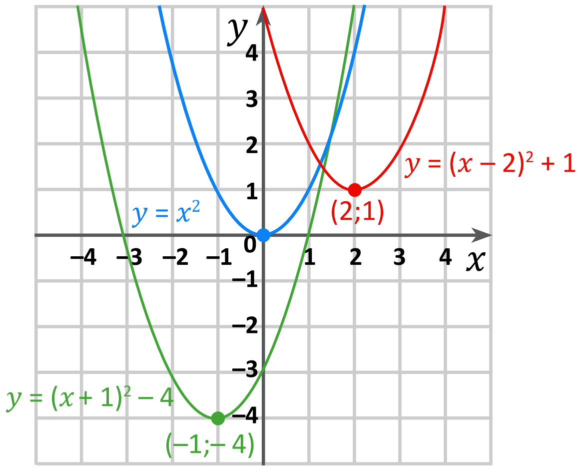
გააანალიზეთ და აღწერეთ მოცემული გრაფიკები და განიხილეთ სხვადასხვა შემთხვევა.

ნიმუში 1

ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა შესაძლებელია რამდენიმე წესის ერთად გამოყენებით

განვიხილოთ:

$y = x^2$ ლურჯი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა (პარალელური გადატანის შედეგად მიღებული ახალი გრაფიკები)



წითელი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება საწყისი კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნით – პარალელური გადატანით 2 ერთეულით მარჯვნივ და 1 ერთეულით ზემოთ. წვეროს კოორდინატით (2; 1) და ფორმულით:

$y = (x - 2)^2 + 1$

მწვანე ფუნქციის გრაფიკი მიიღება საწყისი კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნით – პარალელური გადატანით 1 ერთეულით მარცხნივ და 4 ერთეულით ქვემოთ. წვეროს კოორდინატით (–1; –4) და ფორმულით:

$y = (x + 1)^2 - 4$

როგორც ვხედავთ, კვადრატული ფუნქციის განტოლება დაკავშირებულია წვეროს კოორდინატთან, აღვნიშნოთ წვეროს კოორდინატები (x_0, y_0)-ით. თუ ვიცით წვეროს კოორდინატები და a-კოეფიციენტი, რომელიც გვიჩვენებს რამდენად გაფართოვდა ან „შეიკუმშა“ გრაფიკი, მაშინ შესაბამისი კვადრატული ფუნქციის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

აღნიშნულ ფორმულას ეწოდება კვადრატული ფუნქციის გამოსახვა წვეროს კოორდინატის მეშვეობით.

დაიმახსოვრეთ, ფორმულაში წვეროს x_0 კოორდინატი არის მოპირდაპირე ნიშნით.

ნიმუში 2

როგორ შეიძლება გრაფიკით მოცემული ინფორმაციის მიხედვით, კვადრატული ფუნქციის ფორმულის (განტოლების) ჩაწერა?

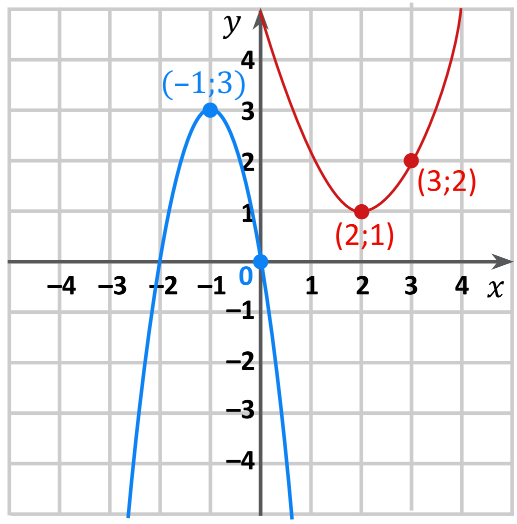
საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი.

ვიცით თითოეულის წვეროს კოორდინატი და დამატებითი ერთი წერტილი.

საკვანძო კითხვა: როგორ ჩავწეროთ მოცემული ფუნქციების შესაბამისი განტოლება?

რადგან მოცემულია წვეროს კოორდინატი, ვიცით, რომ წვეროს კოორდინატის მეშვეობით ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



მსჯელობა

განვიხილოთ წითელი ფუნქციის გრაფიკი. მოცემულია წვეროს კოორდინატი (2;1) და წერტილი (3;2); შევიტანოთ წვეროს კოორდინატები ფუნქციის განტოლებაში და მივიღებთ:

$y = a(x - 2)^2 + 1$

- *როგორ ვიპოვოთ a – კოეფიციენტი?*

როგორც ვიცით, წერტილი (3;2) გრაფიკზეა, შესაბამისად, ის უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას. როდესაც x-ის ნაცვლად განტოლებაში შევიტანთ 3-ს, გამოთვლის შემდეგ უნდა მივიღოთ 2. აღნიშნულის გათვალისწინებით შევადგინოთ განტოლება:

$a(3 - 2)^2 + 1 = 2$

$a = 1$

შესაბამისად მივიღებთ, რომ $y = (x - 2)^2 + 1$

განვიხილოთ ლურჯი ფუნქციის გრაფიკი.

მოცემულია წვეროს კოორდინატი (–1;3) და წერტილი (0; 0) შევიტანოთ წვეროს კოორდინატები ფუნქციის განტოლებაში და მივიღებთ:

$y = a(x + 1)^2 + 3$

რადგან პარაბოლას შტოები არის დაბლა, ვივარაუდოთ, რომ $a < 0$-ზე

რადგან (0; 0) გრაფიკზეა, შევადგინოთ განტოლება

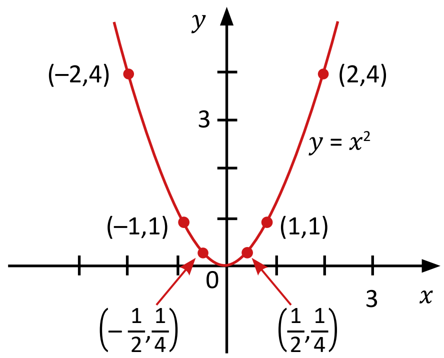
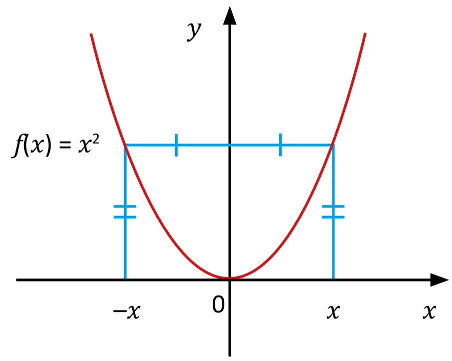
$a(0 + 1)^2 + 3 = 0$

$a = -3$

შესაბამისად, მივიღებთ:

$y = -3(x + 1)^2 + 3$

სიმეტრია, ლუწი ფუნქცია

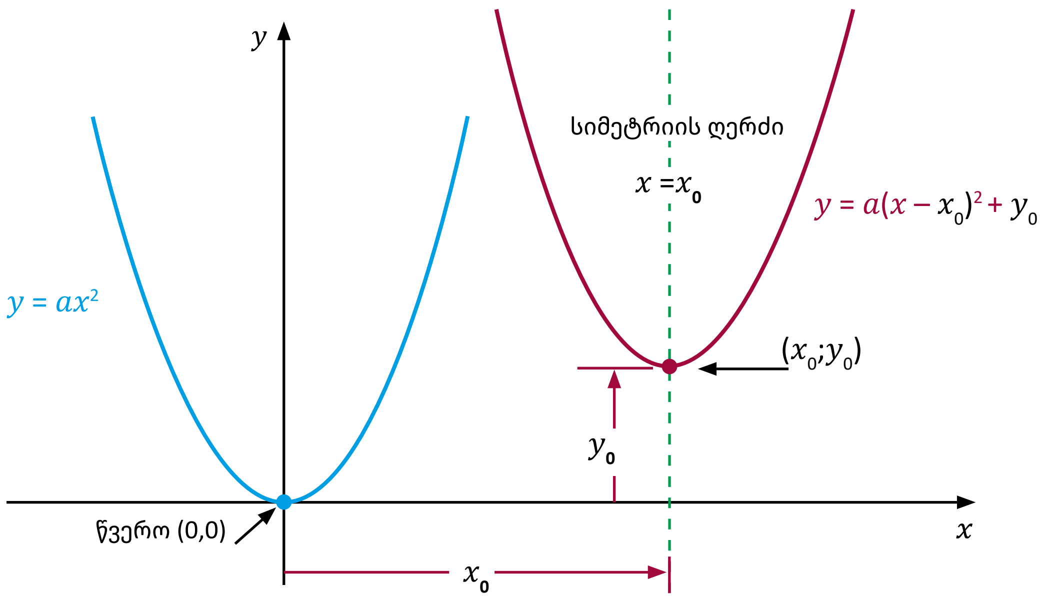
$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძია Oy ღერძი	გრაფიკიდან აღებული ყოველი x და მისი მოპირდაპირე $-x$ წერტილი, თანაბრად არის დაშორებული Oy ღერძიდან
	

თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x) = f(-x)$, ფუნქციას ეწოდება **ლუწი ფუნქცია.**

ლუწი ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძი – Oy ღერძია.

$y = x^2$ კვადრატული ფუნქცია **ლუწი ფუნქციაა.**

ზოგადად, ნებისმიერ პარაბოლას აქვს სიმეტრიის ღერძი; სიმეტრიის ღერძი პარაბოლის წვეროზე გადის და Oy ღერძის პარალელურია, მისი განტოლებაა: $x = x_0$;



ფუნქციის მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილი

წვეროს კოორდინატი ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი წერტილია პარაბოლაზე.

I. როდესაც $a > 0$-ზე $(x_0; y_0)$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია, როდესაც $x = x_0$, ფუნქცია (ანუ y) იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

- როცა $a > 0$-ზე

  $D(f) = (-\infty; +\infty)$

  $E(f) = [y_0; +\infty)$

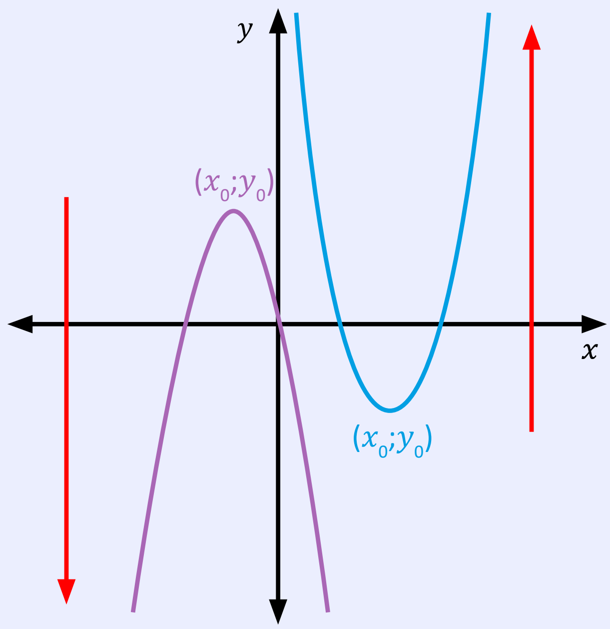
II. როდესაც $a < 0$-ზე

$(x_0; y_0)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია, როდესაც $x = x_0$,ფუნქცია (ანუ y) იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

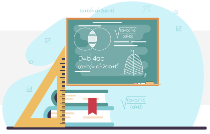
- როცა $a < 0$-ზე

  $D(f) = (-\infty; +\infty)$

  $E(f) = (-\infty; y_0]$



სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. სახელმძღვანელოში მოცემული ნახაზების უმეტესობა აგებულია მოცემული ვებგვერდების დახმარებით. გრაფიკების ასაგებად არსებობს რამდენიმე კარგი ვებგვერდი. შეისწავლეთ თითოეული, დავალების შესასრულებლად გამოიყენეთ თქვენთვის მეტად მოსახერხებელი ვებგვერდი.

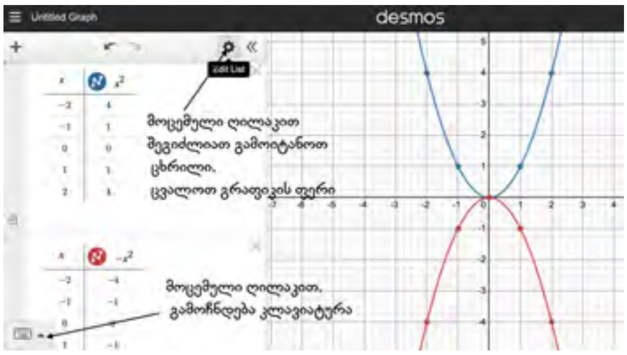
🔗 ტელესკოლა – 14:10 წთ ტექნოლოგიების გამოყენება (განხილულია ვებგვერდი Desmos)

🔗 www.desmos.com/calculator

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, აირჩიეთ Graphing Calculator (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ქვემოთ მოცემულია პანელი, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელია ფორმულის ჩაწერა.

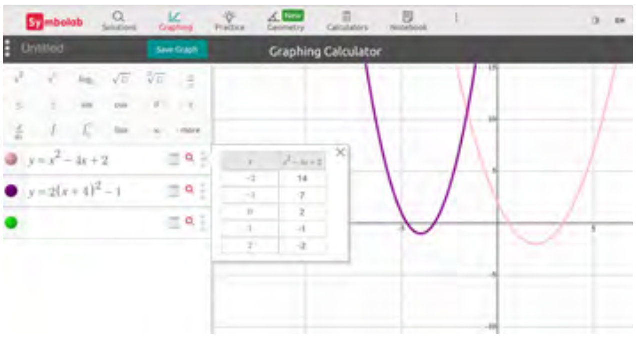


🔗 www.symbolab.com/graphing-calculator

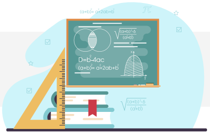
ინსტრუქცია: შედით ვებგვერდზე, აირჩიეთ Graphing (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ჩასაწერი ველის ზემოთ არის პანელი, რომელიც დაგეხმარებათ აკრიფოთ ნებისმიერი ფორმულა. მარჯვნივ არის ცხრილის ნიშანი, რომელიც გაჩვენებთ გრაფიკზე მდებარე წერტილის კოორდინატებს.



სავარჯიშოები



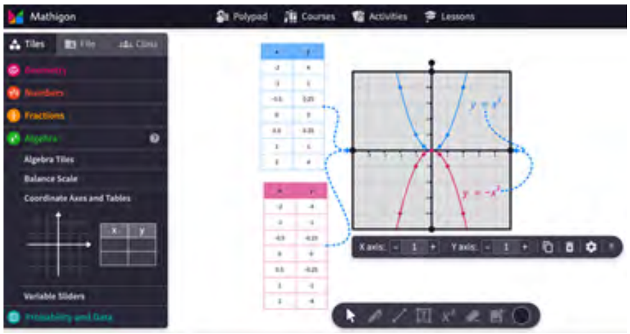
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

mathigon.org/polypad

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, მარცხენა მხარეს აირჩიეთ Algebra (გამოჩნდება ჩამონათვალი, აირჩიეთ Coordinate Axes and Tables);

შემდეგ მარჯვნივ სამუშაო სივრცეში გადაიტანეთ ცხრილი, ჩაწერეთ წერტილის $(x;y)$ წყვილები, ისრით „მიაერთეთ" ცხრილი საკოორდინატო სიბრტყეზე და მომენტალურად აისახება ინფორმაცია სიბრტყეზე.

შემდეგ დაწერეთ ფორმულა, ისრით „მიაერთეთ" საკოორდინატო სიბრტყეს და აიგება გრაფიკი.



www.geogebra.org/calculator

ინსტრუქცია: შედით საიტზე, აირჩიეთ Start Calculator (გამოჩნდება გრაფიკული კალკულატორის ველი).

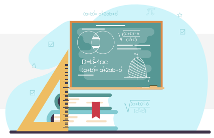
მარცხნივ სვეტში ჩაწერთ ფუნქციას, მარჯვნივ საკოორდინატო სიბრტყეზე აიგება გრაფიკი.

ქვემოთ მოცემულია პანელი, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელია ფორმულის ჩაწერა.

ჯგუფური სამუშაო:

2. **ინსტრუქცია:** შედით საიტზე Geogebra ან Desmos; ააგეთ გრაფიკები. იმსჯელეთ და აღწერეთ გარდაქმნის წესი ქვემოთ მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის.

სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

მითითება: მას შემდეგ რაც ააგებთ გრაფიკს, შეინახეთ თქვენ მიერ შესრულებული ნახაზი, გადაიტანეთ Word-ის ფაილში და თან დაურთეთ აღწერა. ასევე, თითოეული შემთხვევისთვის ამოიწერეთ წვეროს კოორდინატი.

ა) ააგეთ $y = x^2$; $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 4$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ბ) ააგეთ $y = x^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 2)^2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გ) ააგეთ $y = -x^2$; $y = - x^2 + 5$; $y = -x^2 - 5$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

დ) ააგეთ $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 3x^2$; $y = 0.5x^2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ე) ააგეთ $y = x^2$; $y = 2(x - 1)^2$; $y = -2(x - 1)^2$; ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ვ) ააგეთ $y = x2$; $y = (x - 3)^2 + 5$; $y = - (x - 3)^2 + 5$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ზ) ააგეთ $y = x^2$; $y = -2x^2$ $y = - 2(x - 4)^2$; $y = - 2(x - 4)^2 + 1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკთან.

3. ააგეთ მოცემული ფუნქციათა გრაფიკები. თითოეულისთვის დაწერეთ წვეროს კოორდინატი, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

მითითება: ჯერ ააგეთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, შემდეგ ააგეთ სავარჯიშოში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წვეროს კოორდინატის დახმარებით, თითოეულ შემთხვევაში ახსენით გარდაქმნის წესი. შეასრულეთ სამუშაო რვეულში.

ა) $y = x^2 + 2$; გ) $y = -x^2 + 3$; ე) $y = x^2 + 4$; ზ) $y = -4x^2$;
ბ) $y = 3x^2$; დ) $y = -x^2 + 4$; ვ) $y = -2x^2$; თ) $y = -x^2 - 2$.

4. ააგეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები საკოორდინატო სიბრტყეზე.

მითითება: ჯერ ააგეთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი, შემდეგ ააგეთ სავარჯიშოში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი წვეროს კოორდინატის დახმარებით, თითოეულ შემთხვევაში ახსენით გარდაქმნის წესი. შეასრულეთ სამუშაო რვეულში.

გაგრძელება

სავარჯიშოები

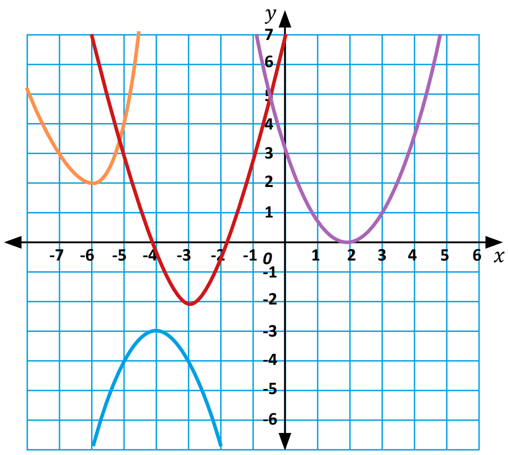
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

ა) $y = (x + 1)^2 + 3$ გ) $y = -(x + 1)^2 + 3$ ე) $y = (x - 2)^2 + 1$ ზ) $y = -(x + 1)^2 - 3$

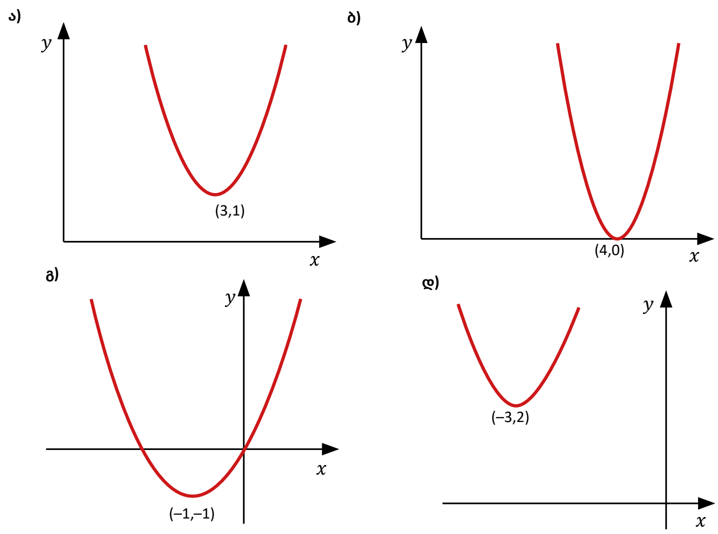
ბ) $y = (x - 1)^2 + 4$ დ) $y = -(x + 2)^2 + 4$ ვ) $y = 2(x - 1)^2 - 3$ თ) $y = -2(x - 3)^2 - 2$

გადაამოწმე შენ მიერ აგებული ფუნქციის გრაფიკების სისწორე რომელიმე **გრაფიკულ კალკულატორით (Desmos ან Geogebra)**

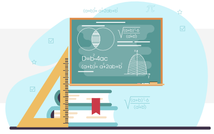
5. ნახაზზე მოცემულია სხვადასხვა კვადრატული ფუნქციის გრაფიკები; ვიცით, რომ a = 1-ს, ან a = –1-ს. დაწერეთ თითოეული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქცია ფორმულის მეშვეობით.



6. ქვემოთ მოცემულია კვადრატული ფუნქციის გრაფიკები, ჩათვალეთ, რომ a = 1 და დაწერეთ თითოეული გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის განტოლება.



სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

7. **გამოწვევა:** ააგე პარაბოლა და ჩაწერეთ ფუნქციის შესაბამისი განტოლება თუ ვიცით, რომ:

ა) წვეროს კოორდინატია (3;6) და პარაბოლა y ღერძს კვეთს წერტილში (0;2);

ბ) წვეროს კოორდინატია (–1;–4) და პარაბოლა y ღერძს კვეთს წერტილში (0;3);

გ) წვეროს კოორდინატია (0;5) და გრაფიკზე მდებარეობს A (1; –2) წერტილი;

დ) წვეროს კოორდინატია (2;3) და გრაფიკზე მდებარეობს A (6; 9) წერტილი .

დავალება

ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

გახსენით სიმულაცია – Phet-ქართულად, კუთხით გასროლილი სხეულის ტრაექტორია

8. შედით საიტზე Geogebra ან Desmos და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, გასასროლი ობიექტის სიმაღლე) და დაადგინეთ:.

I. როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე? აღწერეთ სიტყვიერად.

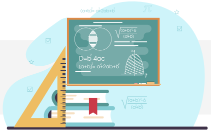
II. რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

ვარიანტი I

	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1	30°	8 მ/წმ			
ცდა 2	30°	16 მ/წმ			

- სიჩქარის ორჯერ გაზრდის შემდეგ, რამდენჯერ უფრო შორს დაეცა სხეული?
- რა მოხდება თუ გასროლის კუთხე იქნება 90°-ის ტოლი?

სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

ვარიანტი II					
	გასროლის კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1		8 მ/წმ			
ცდა 2		16 მ/წმ			

ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ, ცხრილში დაორგანიზებული მონაცემებიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვას:

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია შემდეგი დამოკიდებულება:

$\frac{v^2\ sin2\alpha}{g}$ სადაც d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v ბურთის მოძრაობის სიჩქარე, α გასროლის კუთხე, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ცხრილით მოპოვებული ინფორმაციის საფუძველზე შეამოწმეთ ფორმულის სისწორე.

დამატებითი მასალა საგამოცდოდ	შემაჯამებლების ნიმუშები თემების მიხედვით იხილეთ ბმულზე math.ge

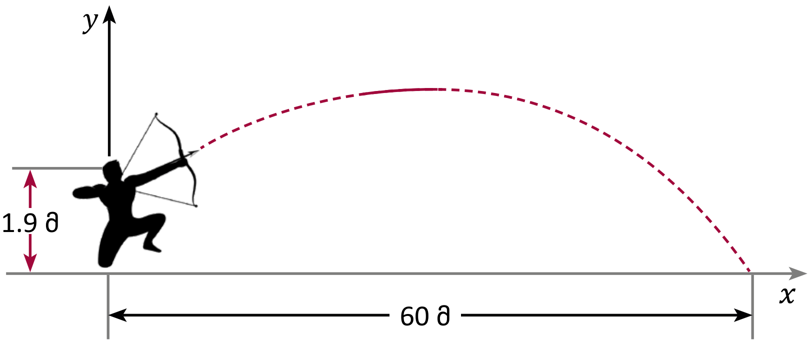
6.3. კვადრატული ფუნქციის სტანდარტული ფორმა

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ როდესაც სხეულს ვისვრით ჰორიზონტისადმი კუთხით, სხეულის მოძრაობა აღიწერება განტოლებებით:

$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o t + h_o$ **(I ფორმულა)**

$v(t) = v_o + gt$ **(II ფორმულა)**

$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ **(III ფორმულა)**



[ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია](#)

[ტელესკოლა – კვადრატული ფუნქცია, ვარიანტი 2](#)

I. ფორმულის შემთხვევაში:

h_o-სხეულის საწყისი სიმაღლეა; v_o-საწყისი ვერტიკალური სიჩქარე, ხოლო g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ფორმულით ვხედავთ, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ, თუ მიწიდან რა სიმაღლეზეა სხეული; სხეულის მდებარეობა დამოკიდებულია დროზე კვადრატულად; მოცემულია კვადრატული ფუნქცია.

II. II ფორმულის შემთხვევაში:

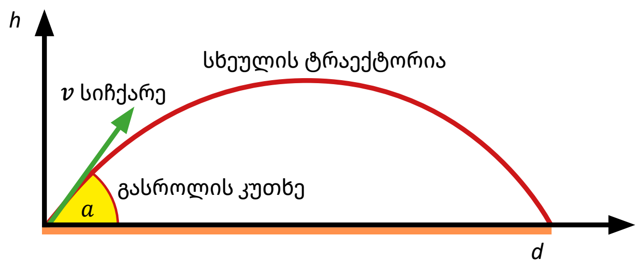
d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე, v_o ბურთის მოძრაობის საწყისი სიჩქარეს, α გასროლილ კუთხეს, ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. $g \approx 9.8$ მ /წმ^2 (ჩვენ ამოცანებში დავამრგვალოთ g ≈10მ /წმ^2-მდე). ამ ფორმულაში სხეულის მოძრაობის სიჩქარე დამოკიდებულია აჩქარებაზე წრფივად.

ზემოთ მოცემული ფორმულებით ვხედავთ, რომ კვადრატული ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა ფორმით, მოცემულ გაკვეთილში განვიხილოთ კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის სტანდარტული ფორმა.

!! ყურადღება მიაქციეთ:

როდესაც სხეულს ვისვრით მიწიდან, აღნიშნულ სიტუაციას შეესაბამება ნახ. 1-ზე მოცემული გრაფიკი და მონაცემები. როგორც ვხედავთ, კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის წირი შეესაბამება პარაბოლას.

[CK12 – სიმულაცია](#) (დარეგისტრირდით ვებგვერდზე და გახსენით სიმულაცია)



ნახაზი 1

საკვანძო კითხვა: რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენა ფორმულის მეშვეობით?

ნიმუში 1

საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ორი კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განვიხილეთ წინა გაკვეთილში.

ვიცით, რომ წითელი ფერით მოცემული გრაფიკის შესაბამისი განტოლებაა:

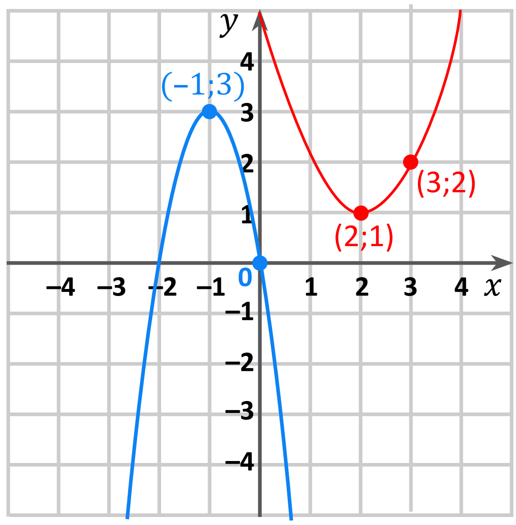
$y = (x - 2)^2 + 1$

ხოლო ლურჯი ფერით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისი განტოლებაა:

$y = -3(x + 1)^2 + 3$

ასევე ვიცით, რომ ორივე წარმოდგენილია წვეროს კოორდინატის ფორმით, ანუ ფორმულით:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



საკვანძო კითხვა: რამდენი სხვადასხვა ფორმით არის შესაძლებელი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენა ფორმულის მეშვეობით?

მსჯელობა:

როგორც წინა თავებში გავეცანით კვადრატულ სამწევრს და კვადრატულ განტოლებას, ვისწავლეთ გამოსახულებების გამარტივებები და წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით.

შემოკლებული გამრავლების ფორმულიდან გამომდინარე ვიცით, რომ

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4;$ $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

თუ გამოვიყენებთ აღნიშნულ ცოდნას და კვადრატულ ფუნქციაში გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ:

$y = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

$y = -3(x + 1)^2 + 3 = -3(x^2 + 2x + 1) + 3 = -3x^2 - 6x - 3 + 3 = -3x^2 - 6x$

ვიცით, რომ კვადრატული სამწევრის ზოგადი ფორმაა $ax^2 + bx + c$, სადაც a,b,c ნამდვილი რიცხვებია, ამასთან, $a \neq 0$, ფრჩხილის გახსნის შემდეგ, ორივე ფუნქცია ჩავწერეთ კვადრატული სამწევრის სტანდარტული ფორმის მეშვეობით:

$y = x^2 - 4x + 5$ $a = 1, b = -4, c = 5$	$y = -3x^2 - 6x$ $a = -3, b = -6, c = 0$

როდესაც ფუნქცია მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ ფორმით, ვამბობთ, რომ მოცემულია კვადრატული ფუნქცია ზოგადი სახით.

ნიმუში 2

ჩაწერე $f(x) = x^2 + 4x + 1$ ფუნქცია $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით (წვეროს კოორდინატის მეშვეობით)
ა) დაადგინე წვეროს კოორდინატები ბ) ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი

მეთოდი 1:

ა) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

გავიხსენოთ კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფის წესი:

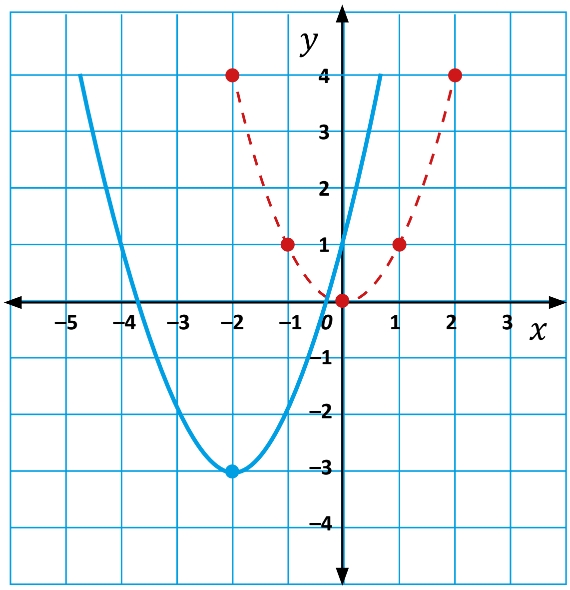
$$x^2 + 4x + 1 =$$

$$x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1 =$$

$$= (x + 2)^2 - 3$$

მივიღეთ, $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $f(x) = x^2$ გრაფიკის 2 ერთეულით მარცხნივ და 3 ერთეულით ქვემოთ პარალელური გადატანით (გადაადგილებით).



მეთოდი 2:

მოცემულია კვადრატული ფუნქცია

ა) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

$a = 1, b = 4, c = 1$

ვიცით, რომ

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ წვეროს y_0 კორდინატი, შევიტანოთ მნიშნელობა x_0 ფუნქციაში და ვიპოვოთ შესაბამისი y_0.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 =$$

$$= 4 - 8 + 1 = -3$$

წვეროს კოორდინატია (–2;–3)

$$f(x) = (x + 2)^2 - 3$$

კვადრატული ფუნქციის თვისებები

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქციის სტანდარტული ფორმა

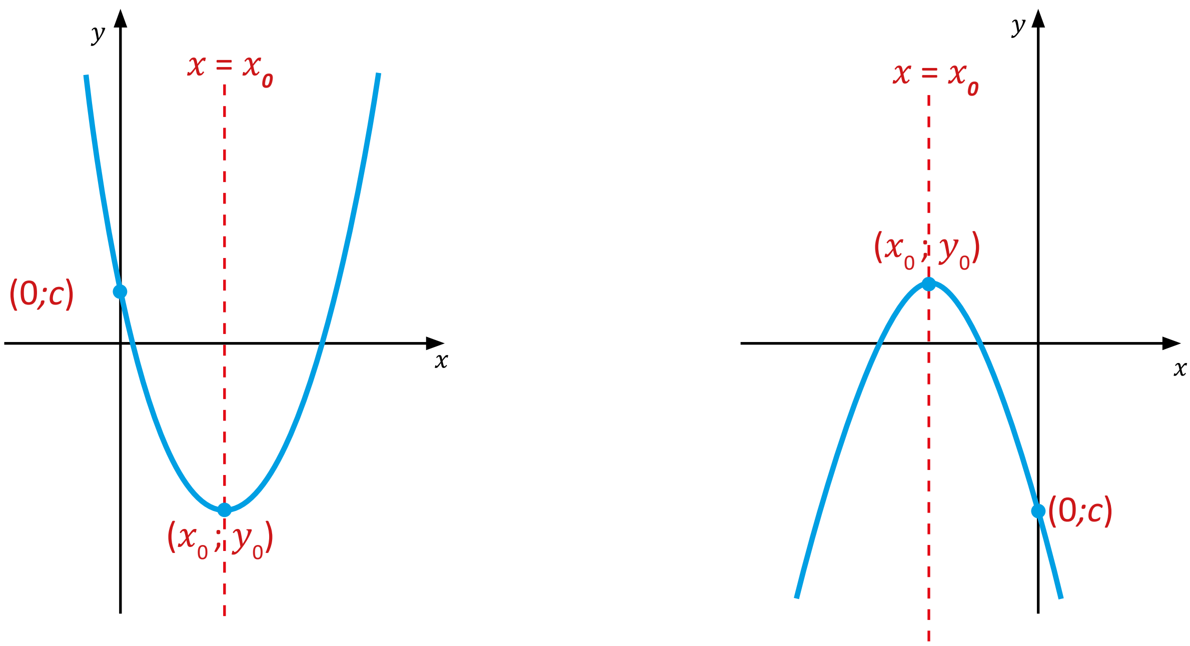
$$y = ax^2 + bx + c \text{ იგივე } f(x) = ax^2 + bx + c$$

ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, ეწოდება კვადრატული ფუნქციის ზოგადი ფორმა.

- კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება პარაბოლა
- როცა $a > 0$-ზე პარაბოლას შტოები მიმართულია ზემოთ, როცა $a < 0$-ზე, პარაბოლას შტოები მიმართულია დაბლა
- პარაბოლას წვეროს x-კოორდინატი გამოითვლება ფორმულით

  $x_0 = -\frac{b}{2a}$, ხოლო $y_0 = f(x_0)$.

  $y_0 = -\frac{D}{4a}$, სადაც $D = b^2 - 4ac$. y_0-ის დადგენა შეიძლება, როგორც ფორმულით, ასევე ფუნქციაში x_0-ის ჩასმით.
- $x = x_0$ წრფე არის ფუნქციის სიმეტრიის ღერძი.
- $(0; c)$ არის გრაფიკის მიერ Oy ღერძის კვეთის წერტილი.



$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$ $\qquad$ $y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$

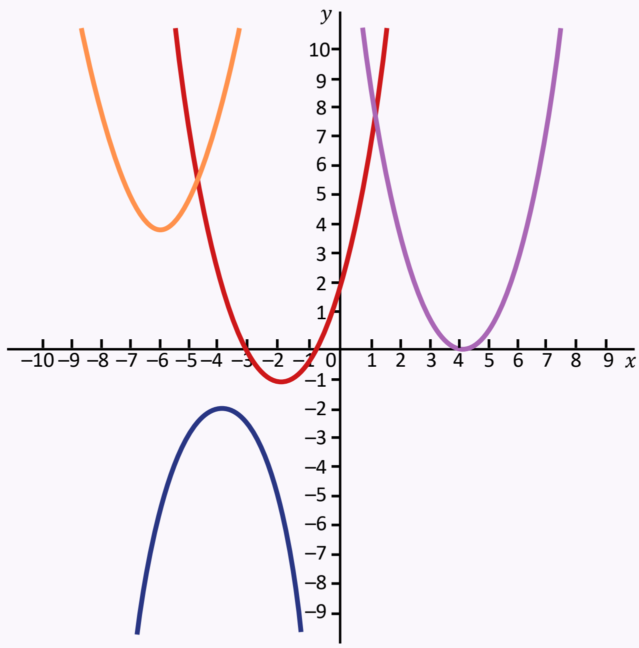
როგორც უკვე ვიცით, რომ პარაბოლას შტოები მიმართულია მაღლა თუ $a > 0$ და დაბლა თუ $a < 0$.

მარჯვნივ მოცემულ ნახაზზე ჩანს, რომ იასამნისფერი გრაფიკი ეხება Ox ღერძს, წითელი კვეთს ორ წერტილში, ხოლო ნარინჯისფერი და ლურჯი არ კვეთს Ox ღერძს.

? საკვანძო კითხვა:

როგორ დავადგინოთ ფუნქციის გრაფიკი კვეთს, ეხება თუ არ კვეთს Ox ღერძს?

სანამ აღნიშნულ კითხვას გავცემთ პასუხს, განვიხილოთ მაგალითი.



პარაბოლას Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები

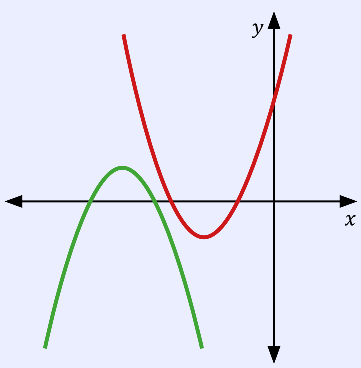
ვიცით, რომ როდესაც გრაფიკი კვეთს Ox ღერძს, გადაკვეთის წერტილის y კოორდინატი არის 0-ის ტოლი. როდესაც $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატულ ფუნქციაში y-ის ნაცვლად შეგვაქვს 0, ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას $ax^2 + bx + c = 0$ თუ მოცემულ განტოლებაში:

- $D > 0$, განტოლებას აქვს ორი ფესვი
- $D = 0$, განტოლებას აქვს ერთი ფესვი
- $D < 0$, განტოლებას არ აქვს ფესვი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

ე.ი. როდესაც მოცემულია $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია, მაშინ:

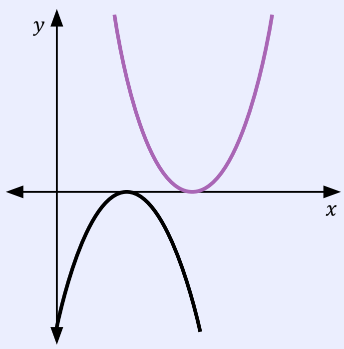
თუ $D = b^2 - 4ac > 0$

პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში:



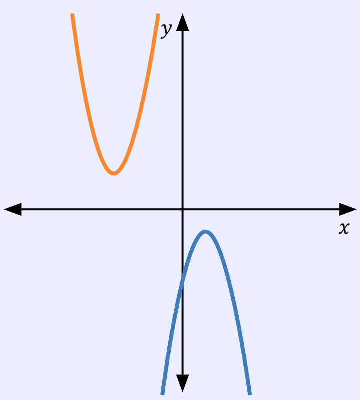
თუ $D = b^2 - 4ac = 0$

პარაბოლა ეხება Ox ღერძს ერთ წერტილში:



თუ $D = b^2 - 4ac < 0$

პარაბოლა არ ეხება Ox ღერძს:

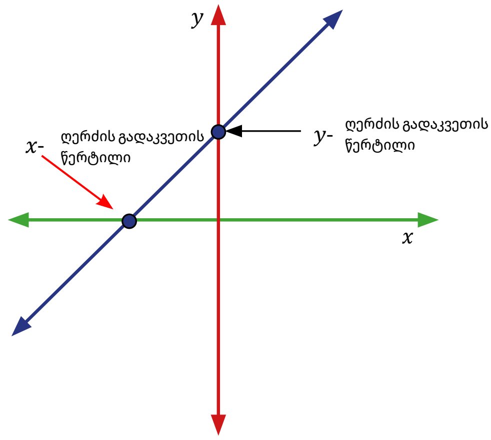


საკვანძო კითხვა: როგორ ვიპოვოთ პარაბოლას ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები?

გავიხსენოთ წრფივი ფუნქცია როდესაც მოცემულია

$y = kx + b$

x	y	
0	b	Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი
$-\frac{b}{k}$	0	Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი



როდესაც მოცემულია კვადრატული ფუნქცია

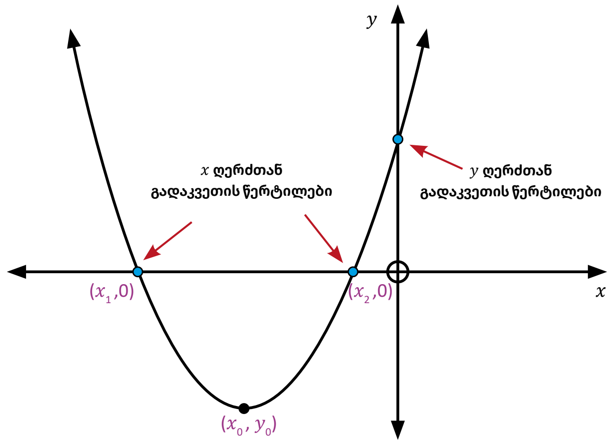
$$y = ax^2 + bx + c$$

x	y	
0	c	Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი
	0	Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

დამოკიდებულია, თუ რას უდრის D

თუ $D = b^2 - 4ac > 0$.

პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში $(x_1; 0)$ და $(x_2; 0)$.



მითითება: ფუნქციის განტოლებაში $x = 0$-ის ჩასმის შემდეგ ვიღებთ Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილს. ფუნქციის განტოლებაში $y = 0$-ის ჩასმის შემდეგ ვადგენთ პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ან ეხება თუ არ ეხება მას.

ნიმუში 4

მოცემულია $y = x^2 - 2x - 3$ ფუნქცია, იპოვე:

ა) ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები

ბ) წვეროს კოორდინატი

გ) განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

ა) $y = x^2 - 2x - 3$

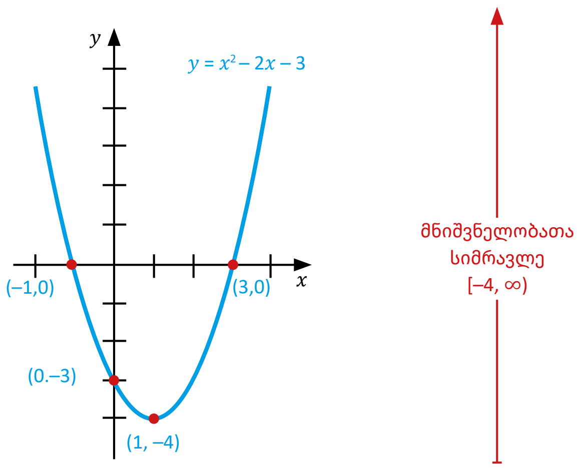
x	y	
0	–3	Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი
	0	OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ ან } x_2 = -1$$

(–1; 0) და (3; 0);



ბ) წვეროს კოორდინატი

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

წვეროს კოორდინატია (1; –4).

გ) ფუნქციის განსაზღვრის არეა

$D(f) = (-\infty; +\infty)$ მნიშვნელობათა სიმრავლე

$E(f) = [-4; +\infty)$

ნიმუში 5

შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა (3; –12) და B(–2;4) წერტილები $y = -x^2 - 2x + 3$ ფუნქციის გრაფიკზე

მსჯელობა: როდესაც წერტილი ეკუთვნის გრაფიკს, ნიშნავს, რომ მისი კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციის განტოლებას.

როდესაც $x = 3$

$y = f(3) = -(3)^2 - 2 \cdot 3 + 3 = -1 \cdot 3^2 - 3 = -12$

ე.ი. A(3; –12) წერტილი ეკუთვნის მოცემულ ფუნქციას და მდებარეობს გრაფიკზე.

როდესაც $x = -2$

$y = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = -1 \cdot 2^2 + 4 + 3 = 3$ რომე-ლიც $\neq 4$

ე.ი. B(–2; 4) წერტილი არ ეკუთვნის მოცემულ ფუნქციას და არ მდებარეობს მის გრაფიკზე

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ თითოეული კვადრატული ფუნქციის:

- წვეროს კოორდინატი, სიმეტრიის ღერძი, მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა;
- განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) $y = x^2 + 2x + 1$; დ) $y = -x^2 + 2x + 1$; ზ) $y = x^2 + 4x + 1$;
ბ) $y = -x^2 + 2x + 5$; ე) $y = 3x^2 - 4x - 2$; თ) $y = -x^2 - 3x + 4$;
გ) $y = 2x^2 - 6x + 3$; ვ) $y = -x^2 - x$; ი) $y = 2x^2 + 5$.

2. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

მითითება: იპოვეთ წვეროს კოორდინატი, ასევე ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები (საჭიროებისამებრ, დაამრგვალეთ პასუხები მეათედამდე სიზუსტით)

ა) $y = x^2 + 6x + 9$; დ) $y = -x^2 - 3x + 6$; ზ) $y = 2x^2 + 4x$;
ბ) $y = 4x^2 - 12x + 9$; ე) $y = 6x^2 - 12x - 1$; თ) $y = -x^2 + 4x - 4$;
გ) $y = 3x^2 - 12x + 10$; ვ) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 8$; ი) $y = -4x^2 - 24x - 36$.

3. მოცემული კვადრატული ფუნქციის განტოლებები წარმოადგინეთ $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით. ააგეთ თითეულის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზე:

ა) $y = x^2 + 2x + 3$; ბ) $y = x^2 + 5x + 6$;
გ) $y = x^2 + 6x + 5$; დ) $y = -x^2 + 2x - 1$;
ე) $y = x^2 - 2x + 3$; ვ) $y = -x^2 + 4x - 3$;
ზ) $y = x^2 + 3x + 2$; თ) $y = -2x^2 - 8x + 2$.

4. დაადგინეთ, ქვემოთ მოცემული კვადრატული ფუნქცია Ox ღერძს კვეთს, ეხება თუ არ კვეთს?

ა) $y = x^2 + 2x - 6$; ბ) $y = x^2 - 8x + 16$;
გ) $y = x^2 - 4x - 5$; დ) $y = -3 - x^2 - 5x$;
ე) $y = -x^2 + 2x - 7$; ვ) $y = 4x + 1 + x^2$;
ზ) $y = x^2 - 4x + 21$; თ) $y = x^2 - 4x$.

5. ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები, მისი წვეროს კოორდინატების და Oy ღერძის გადაკვეთის წერტილით:

მინიშნება: გრაფიკი Oy ღერძს კვეთს წერტილში $(0;y)$.

ა) $y = x^2 + 6x + 2$; გ) $y = -x^2 - 2x + 1$;
ბ) $y = x^2 - 4x + 4$; დ) $y = x^2 + 8x$.

6. კომპანია ქმნის და ყიდის სათამაშო აპლიკაციებს კომპიუტერებისთვის და ტელეფონებისთვის. მონაცემების ანალიზის საფუძველზე დადგინდა, რომ კომპანიის მოგება ყოველდღიურად დამოკიდებულია გაყიდული აპლიკაციების რაოდენობაზე შემდეგი წესით: $M = -2{,}5n^2 + 500n$;

სადაც M-კომპანიის დღიური მოგებაა, ხოლო n-გაყიდული აპლიკაციების რაოდენობა.

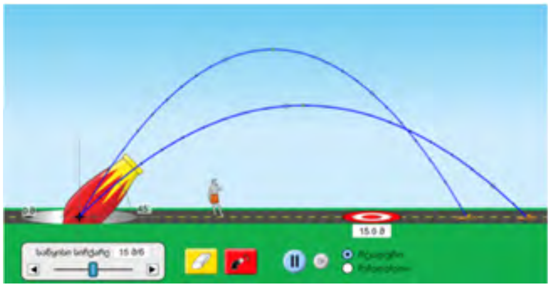
ა) რა იქნება კომპანიის მოგება თუ დღის განმავლობაში გაიყიდება მხოლოდ 10 აპლიკაცია? 20 აპლიკაცია?

სავარჯიშოები

ბ) რამდენი აპლიკაცია უნდა გაყიდოს კომპანიამ, რომ ჰქონდეს მაქსიმალური მოგება?

გ) რა იქნება კომპანიის მოგება თუ გაყიდის 200 აპლიკაციას? დაფიქრდით რატომ შეიძლება დადგეს აღნიშნული შედეგი.

7. ქვემეხიდან გაისროლეს ჭურვი. ჭურვის სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან გამოითვლება ფორმულით $h = 60t - 5t^2$, სადაც t – დრო იზომება წამებში გასროლის მომენტიდან, ხოლო სიმაღლე მეტრებში.



- იპოვეთ რა სიმაღლეზე ავა ჭურვი მიწის ზედაპირიდან, როდესაც
  ა) $t = 0$; ბ) $t = 1$; გ) $t = 3$; დ) $t = 8$.
- იპოვეთ დრო, როდესაც ჭურვი მიწის ზედაპირიდან არის ა) $h = 0$; ბ) $h = 100$; გ) $h = 160$ მეტრ სიმაღლეზე

8. ქვა გაისროლეს ჰაერში. გასროლის მომენტიდან, ქვის სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან დროის ყოველ მომენტში გამოითვლება ფორმულით:

$h = -5t^2 + 30t + 2$, სადაც t – დრო იზომება წამებში გასროლის მომენტიდან, ხოლო სიმაღლე მეტრებში.

ა) იპოვეთ რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე ავა ქვა მიწის ზედაპირიდან?

ბ) იპოვეთ რა სიმაღლეზე ავა ქვა მიწის ზედაპირიდან როცა $t = 3$?

გ) გასროლიდან რა დროში მიაღწია ქვის სიმაღლემ მიწის ზედაპირიდან 27 მ-ს? 42 მ-ს?

დ) ააგეთ t-ზე დამოკიდებულების h ფუნქციის გრაფიკი.

9. მანქანის სიჩქარე, როდესაც ის გადაადგილდება ქალაქის ქუჩებში გამოითვლება ფორმულით: $v(t) = -t^2 + 6t + 40$ კმ/სთ, სადაც $0 \le t \le 10$ წუთია.

- რა სიჩქარით მოძრაობდა მანქანა, როცა $t = 0$ წთ?
- რამდენი წუთი გავა სანამ მანქანის სიჩქარე მიაღწევს 45 კმ/სთ სიჩქარეს?
- კიდევ როდის იქნება მანქანის სიჩქარე 45 კმ/სთ?
- რა მაქსიმალური სიჩქარე შეუძლია განავითაროს მანქანამ და რა დროში მოხდება ეს?

10. გიორგი ამზადებს ხის სკამებს და ყიდის ყოველდღიურად. გიორგი აორგანიზებდა ინფორმაციას ცხრილში შემდეგი წესით:

გაყიდული სკამების რაოდენობა (x)		
მოგება (M)		

როდესაც მოახდინა სიტუაციის ფორმულირება დაადგინა, რომ მოგება (M) დამოკიდებულია ყოველდღიურად გაყიდული სკამების რაოდენობაზე (x-ზე) შემდეგი წესით: $M = -10x^2 - 220x - 400$.
გამოითვალეთ გიორგის მოგება, თუ ის დაამზადებს დღეში:

სავარჯიშოები

- ა) 0; ბ) 4; გ) 10 სკამს?
- რას შეიძლება ნიშნავდეს უარყოფითი მოგება?

  მითითება: წარმოებას ახლავს ხარჯი, მაგალითად ხელფასები, გადასახადები იჯარის და ა.შ.)
- რა რაოდენობის სკამი უნდა დაამზადოს ყოველდღე, რომ მაქსიმალური მოგება მიიღოს? რა მოხდება თუ აღნიშნულ რაოდენობაზე მეტს დაამზადებს?
- რამდენი სკამი უნდა დაამზადოს მან, რომ მიიღოს 460 ლარის მოგება?

11. **გამოწვევა:** თითოეული ფუნქციისთვის ცნობილია წვეროს კოორდინატები, იპოვეთ უცნობი კოეფიციენტები, თუ ვიცით რომ:

ა) $y = x^2 + bx + c$, წვეროს კოორდინატია (3;–4);
ბ) $y = -3x^2 + bx + c$, წვეროს კოორდინატია (1;0);
გ) $y = ax^2 + 10x + c$, წვეროს კოორდინატია (–5;–27);
დ) $y = c - ax^2 - 2x$, წვეროს კოორდინატია (–1;3).

STEM

დავალება

ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება
გახსენით სიმულაცია –
Phet — ქართულად, კუთხით გასროლილი სხეულის ტრაექტორია

შედით საიტზე და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, გასასროლი ობიექტის სიმაღლე) და დაადგინეთ.

მითითება: მოცემული დავალების შესრულებაში დაგეხმარებათ შემდეგი ინფორმაცია

ტელესკოლა — მათემატიკური მოდელირება

I. როგორ არის დამოკიდებული დაცემის მანძილი სიჩქარესა და კუთხეზე? აღწერეთ სიტყვიერად.

II. რაზეა დამოკიდებული ობიექტის მდებარეობა სივრცეში? როგორ არის დამოკიდებული მიწიდან ობიექტის სიმაღლე დროზე?

პარამეტრების დაფიქსირების შემდეგ დაორგანიზეთ ექსპერიმენტის შედეგად მოპოვებული მონაცემები ქვემოთ მოცემულ ცხრილში.

სავარჯიშოები

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

სიმულაციაში დააფიქსირეთ კუთხე, სიჩქარე (თუ შეცვლით ზარბაზნის სიმაღლეზე, მაშინ აღნიშნულ ცხრილს დაამატეთ სვეტი)

	გასროლილი კუთხე	საწყისი სიჩქარე (მ/წმ)	ფრენის სიშორე (მ-დაცემის ადგილი)	ფრენის დრო (წმ)	მაქსიმალური სიმაღლე (მ)
ცდა 1					
ცდა 2					
ცდა 3					
ცდა 4 და ა.შ.					

ექსპერიმენტის ჩატარების შემდეგ, ცხრილში დაორგანიზებული მონაცემებიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

ა) რა ეწოდება წირს, რომელსაც კუთხით გასროლილი სხეული შემოწერს?

ბ) რომელი მონაცემის/მონაცემების საფუძველზე შეძლებდით აღნიშნული სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნას? (ფუნქციის განტოლების ჩაწერას?) ჩაწერეთ გრაფიკის შესაბამისი ფუნქციის განტოლება სხვადასხვა ფორმით.

გ) მოცემულ სიტუაციაში რომელია დამოუკიდებელი ცვლადი და რომელი დამოკიდებული ცვლადი? რა ტიპის კანონზომიერება შენიშნეთ?

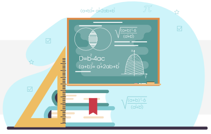
დ) მიღებული შედეგების ანალიზით რა შეგიძლიათ დაასკვნათ დაცემის მანძილის დამოკიდებულებაზე საწყის სიჩქარეზე? გასროლის კუთხეზე?

ე) დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

12. STEM **დავალება – დამოუკიდებელი სამუშაო.**
გახსენით CK12-სიმულაცია (დარეგისტრირდით საიტზე მეილის მეშვეობით და გახსენით სიმულაცია)

შედით საიტზე და ცვალეთ პარამეტრები (კუთხე, სიჩქარე, მეისრის სიმაღლე, მანძილი ნიშნულსა და მეისრეს შორის)

სავარჯიშოები



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- დააყენეთ პარამეტრები ისე, რომ ისარი მოხვდეს მიზანში.
- თქვენ მიერ დაყენებული პარამეტრები დაორგანიზეთ ცხრილში.
- დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება). დაფიქრდით, რატომ შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

13. გამოწვევა: ჯგუფური სამუშაო STEM **ინტეგრირებული დავალება:**

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია სიტუაცია, როდესაც მეისრე ისვრის ისარს. ჩვენ ვიცი, რომ:

- ისრის მოძრაობის ტრაექტორია ემთხვევა პარაბოლას გრაფიკს და აღიწერება ფორმულით $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_ot + h_o$;
- ისრის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში აღიწერება ფორმულით $v(t)=v_o + gt$ (ისარი მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად);
- სხეულის დაცემის ადგილი გასროლის ადგილიდან აღიწერება ფორმულით $d = \frac{v^2\ \sin 2\alpha}{g}$.

ფორმულებში:

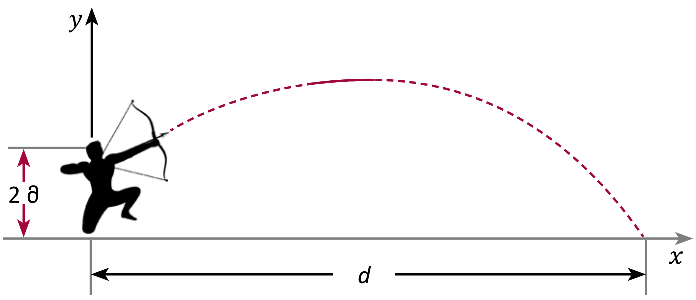
- h_o შეესაბამება სხეულის საწყის სიმაღლეს; $h(t)$ – სხეულის სიმაღლეს დროის ნებისმიერ მომენტში.
- d – არის მანძილი გასროლის წერტილიდან დაცემის წერტილამდე.
- v ბურთის მოძრაობის სიჩქარე დროის ნებისმიერ მომენტში.
- v_o – სხეულის მოძრაობის საწყისი სიჩქარე.
- α გასროლილ კუთხეს.
- ხოლო g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას.

მიღებულია, რომ $g \approx 9.8$ მ/წმ^2 (გამოთვლებში, სიმარტივისთვის, ჩაწერეთ $g \approx 10$ მ/წმ^2)

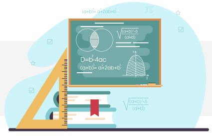
განვიხილოთ ორი სიტუაცია:

სიტუაცია 1.

როდესაც მეისრე ისვრის ჰორიზონტისადმი რაიმე კუთხით, გასროლისას საწყისი სიჩქარეა 20 მ/წმ და ისარი დაშორებულია მიწიდან 2 მეტრით.



სავარჯიშოები

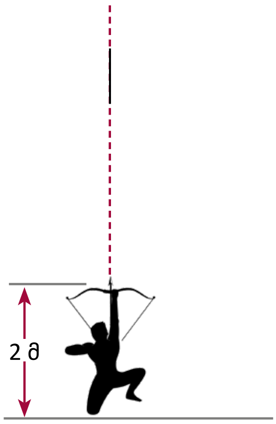


MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- ამოცანის პირობასა და ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, ჩასვით მონაცემები ფორმულაში $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ და დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი. გაითვალისწინეთ, რომ $g \approx 10$მ/წმ^2; დაადგინეთ რა დროის შემდეგ მიაღწევს ისარი მაქსიმალური სიმაღლეს; დაადგინეთ, რა იქნება ისრის მაქსიმალური სიმაღლე მიწიდან.
- დაადგინეთ, რამდენად შორს დაეცემა ისარი გასროლის ადგილიდან.
- დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეცემა ისარი მიწაზე.

სიტუაცია 2.

მეისრე ისვრის, ვერტიკალურად ზემოთ (ასეთ დროს ჰორიზონტისადმი კუთხე არის 90°). ისრის საწყისი სიჩქარეა 30 მ/წმ-ში.



- ამოცანის პირობასა და ნახაზზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, ჩასვით მონაცემები ფორმულაში:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი.

- დაადგინეთ, რა იქნება ისრის მაქსიმალური სიმაღლე გასროლის შემდეგ.
- რა დროში მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს.
- რა იქნება სიჩქარე იმ დროს, როდესაც ისარი მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს? (ისარგებლეთ ფორმულით $v(t) = v_0 + gt$.
- გასროლიდან რა მანძილზე მოშორებით დაეცემა სხეული.

მითითება: ისარგებლეთ $d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ ფორმულით; გაითვალისწინეთ, რომ $\sin 180° = 0$.

- დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეცემა ისარი მიწაზე.

6.4. კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

კავშირი კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმებს შორის

განვიხილოთ საინტერესო ამოცანა:

მართკუთხედის ფორმის ქაღალდის სიგრძე და სიგანე შესაბამისად 16 და 12 სმ-ია. (სურ.1)

ქეთის სურს გააკეთოს სასაჩუქრე ყუთი, რომელსაც ექნება მაქსიმალური მოცულობა (სურ.2).

ქეთიმ დაადგინა, რომ ყუთის გასაკეთებლად, თუ მართკუთხედის ფორმის ფირფიტას გვერდებიდან ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს და ისე გააკეთებს ყუთს, მიიღებს შესაძლო მაქსიმალური მოცულობის ყუთს. კვადრატის ნაწილების ჩამოჭრის შემდეგ ქეთის, ასევე, აინტერესებს როგორ გამოითვლება დარჩენილი ფირფიტის ფართობი და მოცულობა, რისთვისაც მან გადაწყვიტა სიტუაციის მათემატიკური მოდელის ჩაწერა.

Mathigon აპლიკაცია

– *იხილეთ სიტუაციის შესაბამისი სიმულაცია.*

შევქმნათ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი

ვიცით, რომ მართკუთხედის სიგრძეა – 16 სმ, ხოლო მართკუთხედის სიგანე –12 სმ,

ვთქვათ, ჩამოჭრილი თითოეული კვადრატის გვერდის სიგრძეა x სმ. მას შემდეგ, რაც ოთხივე წვეროსთან ჩამოეჭრება კვადრატის ფორმის ნაწილი, თითოეული გვერდის სიგრძე იქნება:

სიგრძე – $(16 - 2x)$

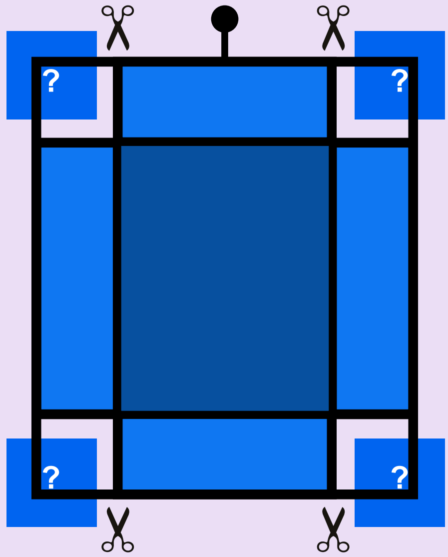
სიგანე – $(12 - 2x)$

დარჩენილი მართკუთხედის, ყუთის ძირის, ფართობი იქნება:

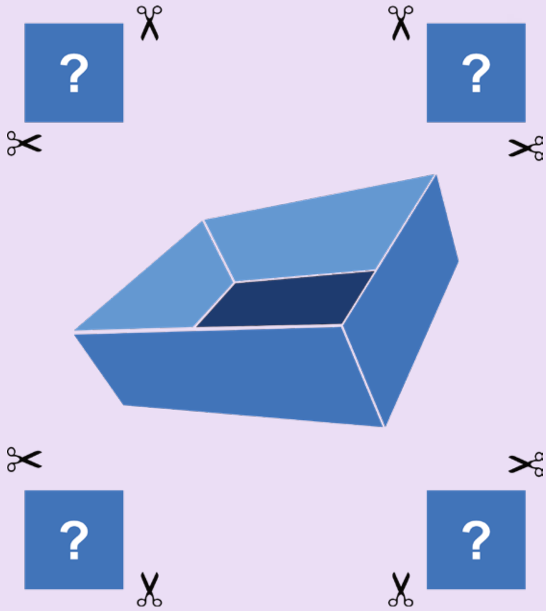
$S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x)$

მიღებული ყუთის სიმაღლე იქნება x სმ და შესაბამისად მოცულობა იქნება:

$V(x) = x(16 - 2x)(12 - 2x)$



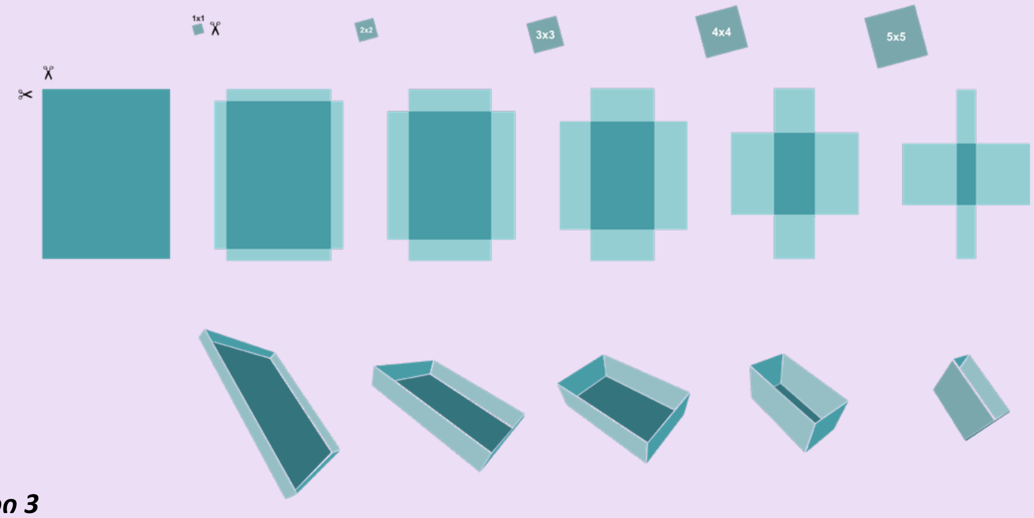
სურათი 1



სურათი 2

როგორც ხედავთ, დარჩენილი ფიგურის, ყუთის ძირის ფართობი და ყუთის მოცულობა დამოკიდებულია ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდის სიგრძეზე. ფართობი დამოკიდებულია კვადრატული წესით, ხოლო მოცულობა კუბური წესით.

სიტუაციის უკეთ გააზრებისთვის, მოვახდინოთ მისი ვიზუალიზაცია. მართკუთხედს ჩამოვაჭრათ კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა 1 სმ, შემდეგ 2 სმ, და ა.შ.



სურათი 3

სურათიდან და ფორმულებიდან ჩანს, რომ დარჩენილი ფიგურის ფართობი იცვლება ჩამოჭრილი კვადრატიდან გამომდინარე, ასევე, იცვლება მიღებული ფიგურის ფორმა და ზომა.

მინიშნება: წყარო *Mathigon – Open box problem*

კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

- ვხედავთ, რომ ფართობის გამოთვლის შემთხვევაში მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომელიც წარმოდგენილია ნამრავლის სახით. ფრჩხილის გახსნის შემდეგ მივიღებთ **სტანდარტულ ფორმას:**

  $S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x) = 192 - 32x - 24x + 4x^2 = 4x^2 - 56x + 192$

- შეგვიძლია, ასევე, წარმოვადგინოთ აღნიშნული დამოკიდებულება წვეროს კოორდინატის სახით:

$S(x) = 4x^2 - 56x + 192$

ვიცით, რომ $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{56}{8} = 7$

$S(x_0) = 4(7)^2 - 56 \cdot 7 + 192 = 196 - 392 + 192 = -4$

წვეროს კოორდინატებია (7;–4)

ფართობი ხდება 0-ის ტოლი, თუ $(16 - 2x)(12 - 2x) = 0$

$$x_1 = 8 \text{ ან } x_2 = 6$$

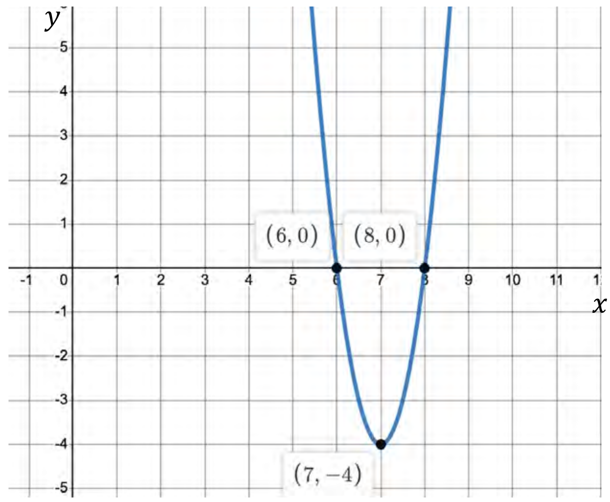
მართკუთხედის სიგანეა 12 სმ, ამიტომ მას ვერ ჩამოვაჭრით კვადრატს, რომლის გვერდის სიგრძეა 6 სმ ან მეტი, იგი აუცილებლად უნდა იყოს 6 სმ-ზე ნაკლები.

შესაბამისად, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე $D = (0; 6)$.

როგორც დავინახეთ, დარჩენილი ფირფიტის ფართობი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა ზომის კვადრატს ჩამოაჭრიან წვეროებიდან.

Ox ღერძზე გადავზომოთ გვერდის სიგრძე, ხოლო Oy ღერძზე მიღებული ფართობი.

ჩვენ მიერ შედგენილი ფუნქცია, მოცემული იყო ნამრავლის სახით, თუმცა ვიცით, კვადრატული ფუნქციის მოცემის სხვადასხვა გზები, დავამყაროთ კავშირი წარმოდგენის ფორმებს შორის. შეიძლება თუ არა იგივე ფუნქცია ჩავწეროთ სხვა ფორმით?



აღნიშული დამოკიდებულება, კონკრეტულად ფუნქცია, ჩავწერეთ 3 სხვადასხვა განტოლებით:

I. $S(x) = (16 - 2x)(12 - 2x)$

II. $S(x) = 4x^2 - 56x + 192$

III. $S(x) = 4(x - 7)^2 - 4$

I. **ფორმით** ადვილად ვხედავთ,რომ ფართობი 0-ის ტოლია თუ $x = 8$ ან $x = 6$, თუმცა ვიცით, რომ განსაზღვრის არე $D = (0; 6)$. ვერ ჩამოვაჭრით 6 სმ ან მეტი გვერდის მქონე კვადრატს;

II. **ფორმით** ვადგენთ მარტივად, თუ $x = 0$, საწყისი კვადრატის ფართობია 192;

III. **ფორმით** ვხედავთ წვეროს კოორდინატს, რომელიც მოცემულ კონტექსტში ინფორმაციას არ გვაძლევს იმიტომ, რომ წერტილი განსაზღვრის არეს არ ეკუთვნის.

ჩვენს შემთხვევაში ყველაზე მოსახერხებელი იყო ნამრავლით წარმოდგენა. რეალური პროცესების მოდელირების დროს აუცილებელია შევარჩიოთ ან სიტუაციას შევუსაბამოთ მეტად მოსახერხებელი ფორმულა.

შენიშვნა: ამოცანის ნაწილს, რომელიც დაკავშირებულია მოცულობასთან განვიხილავთ მოგვიანებით.

კვადრატული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმები

კვადრატული ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ 3 ფორმულით (განტოლებით):

$y = ax^2 + bx + c$ – სტანდარტული ფორმა

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ – წვეროს კოორდინატით

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ – ნამრავლის სახით წარმოდგენა

ღერძებთან კვეთის წერტილები

როდესაც $x = 0$, ვპოულობთ, რა წერტილში კვეთს პარაბოლა Oy ღერძს

როდესაც $y = 0$, ვადგენთ რა წერტილებში კვეთს, ეხება ან არ კვეთს პარაბოლა Ox ღერძს

წვეროს კოორდინატის დადგენა

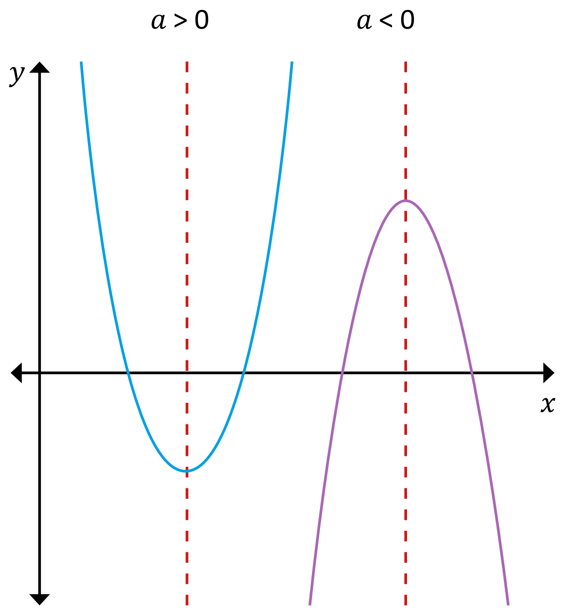
$y = ax^2 + bx + c$

როდესაც მოცემულია სტანდარტული ფორმა, წვეროს კოორდინატის პოვნას შევძლებთ შემდეგი ფორმულით:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad y_0 = -\frac{D}{4a}$$

ასევე, ვიცით, რომ წვეროს კოორდინატზე გავლებული Oy ღერძის პარალელური წრფე წარმოადგენს პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს. შესაბამისად, სიმეტრიის ღერძის განტოლებაა:

$$x = x_0 \quad x_0 = \frac{-b}{2a};$$



თუ გრაფიკი კვეთს Ox ღერძს, მაშინ წვეროს x კოორდინატი ტოლია:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

მითითება:

როცა $a > 0$-ზე, $(x_0; y_0)$ – მინიმუმის წერტილია

როცა $a < 0$-ზე, $(x_0; y_0)$ – მაქსიმუმის წერტილია

ნიმუში 1

ა) იპოვეთ განტოლება, რომლის ფესვებია –7 და 5;

ბ) კვადრატული ფუნქცია Ox ღერძს კვეთს წერტილებში –7 და 5, იპოვეთ კვადრატული ფუნქციის განტოლება, თუ ვიცით, რომ $A(3;40)$ წერტილი მდებარეობს აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკზე.

ა) ვიცით, რომ $x_1 = -7$ და $x_2 = 5$

მოცემული ფესვები არის $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ განტოლების ამონახსნები.

ფესვების შეტანით მივიღებთ განტოლებას:

$a(x + 7)(x - 5) = 0$.

რადგან პირობაში არ არის მოცემული არანაირი ინფორმაცია a-ზე, a- შეიძლება იყოს ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი.

მითითება: მიაქციეთ ყურადღება, გამოსახულებაში ფესვებს ვწერთ მოპირდაპირე ნიშნით.

ბ) ვიცით, რომ კვადრატული ფუნქცია კვეთს Ox – ღერძს წერტილებში –7 და 5, ე.ი. აღნიშნულ წერტილებში:

$y = 0$

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ ფუნქციის განტოლება, ვისარგებლოთ ფორმულით:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

ვიცით, რომ $x_1 = -7$ და $x_2 = 5$, ამიტომ

$y = a(x + 7)(x - 5)$

- *როგორ დავადგინოთ რას უდრის a?*

ვიცით, რომ გრაფიკზე მდებარეობს წერტილი $A(3;40)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x = 3$, $y = 40$.

შევიტანოთ ფუნქციის მნიშვნელობები ფორმულაში და მივიღებთ:

$40 = a(3 + 7)(3 - 5)$

$40 = -20a$

$a = -2$

მივიღეთ, რომ $y = -2(x + 7)(x - 5)$

თუ გავხსნით ფრჩხილს, მივიღებთ კვადრატული ფუნქციის სტანდარტულ ფორმას

$$y = -2(x_2 - 5x + 7x - 35) =$$

$$= -2x_2 - 4x + 70$$

ნიმუში 2

მოცემული $y = x^2 + 6x + 8$ ფუნქციისთვის

ა) იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ $y = 0$;

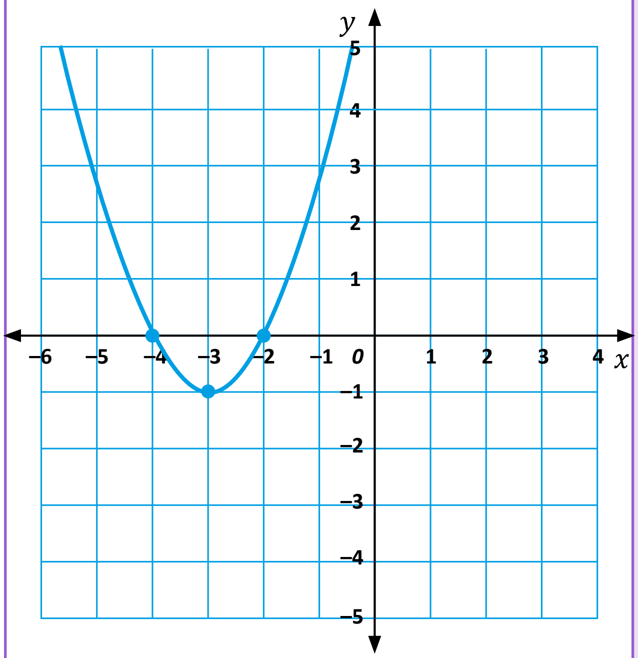
ბ) წარმოადგინეთ ფუნქციის განტოლება ნამრავლის ფორმით.

მსჯელობა:

ა) გვაინტერესებს, x-ის რა მნიშვნელობისთვის ხდება შესაბამისი y 0-ის ტოლი. ჩავსვათ y-ის ნაცვლად 0 და ამოვხსნათ მიღებული კვადრატული განტოლება;

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$
$$(x + 2)(x + 4) = 0$$
$$x_1 = -2 \text{ ან } x_2 = -4$$

განტოლებას აქვს 2 განსხვავებული ამონახსნი, რაც იმას ნიშნავს, რომ გრაფიკი x ღერძს კვეთს ორ წერტილში: (–2; 0) და (–4;0).



!! ყურადღება მიაქციეთ:

ბ) $y = x^2 + 6x + 8$ ნამრავლად წარმოდგება როგორც $y = (x + 2)(x + 4)$

აღნიშნული ფორმით მარტივად ვხედავთ Ox ღერძის გადაკვეთის x კოორდინატს.

ნიმუში 3

მეწარმეს აქვს მასალა, რომლის მეშვეობითაც შეუძლია შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომლის პერიმეტრია 80 მეტრი

- *რა უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ნაკვეთს ჰქონდეს მაქსიმალური ფართობი?* პასუხი დაასაბუთეთ

მსჯელობა:

მეთოდი 1:

ვიცით, რომ მართკუთხედის $P = 80$,

ე.ი. სიგრძე + სიგანე = 40

თუ მათკუთხედის სიგრძეს აღვნიშნავს x-ით, მაშინ სიგანე იქნება $(40 - x)$;

მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

გაგრძელება

$S = x(40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x$

მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა: $D = (0; 40)$.

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის იქნება ფართობი მაქსიმალური. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ პარაბოლის მაქსიმუმის წერტილი.

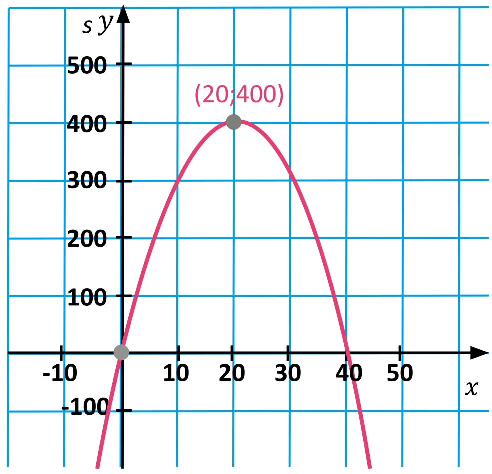
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \cdot (-1)} = 20$$

$$y_0 = -(20)^2 + 40 \cdot 20 = 400$$

როდესაც მართკუთხედის სიგრძე იქნება 20 სმ, მაშინ სიგანე იქნება $40 - 20 = 20$ სმ, ხოლო ფართობი იქნება მაქსიმუალური.

ე.ი. მაქსიმალურ ფართობს მივიღებთ, თუ ავაგებთ კვადრატის ფორმის მიწის ნაკვეთს.

მითითება: აღნიშნული ტიპის ამოცანები სასკოლო პროგრამაში გვხვდება მე-4 და მე-5 კლასიდან, მათ მოსწავლეები ხსნიან ცდის (სინჯვის) მეთოდით და მიდიან დასკვნამდე, თუმცა ახლა უკვე შესაძლებელია მათემატიკური ფორმულებით დავასაბუთოთ მიღებული შედეგი.



მეთოდი 2:

გრაფიკული ამოხსნა

მას შემდეგ რაც დავადგენთ, რომ ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$S = x(40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x$

ტექნოლოგიების მეშვეობით კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებით მარტივად დავადგენთ წვეროს კოორდინატს და შესაბამისად, დავწერთ ამოხსნას და დასკვნას.

სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემული ფუნქციისთვის შეასრულე შემდეგი:

- ჩაწერე ფუნქცია $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ფორმით.
- ჩაწერე ფუნქცია $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ფორმით.

ა) $y = x^2 + 6x + 8$; გ) $y = x^2 - 8x + 7$; ე) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
ბ) $y = x^2 - 4x + 3$; დ) $y = 2x^2 + 5x + 3$; ვ) $y = -x^2 - 2x + 3$.

2. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის x **ღერძთან** გადაკვეთის წერტილის კოორდინატი:

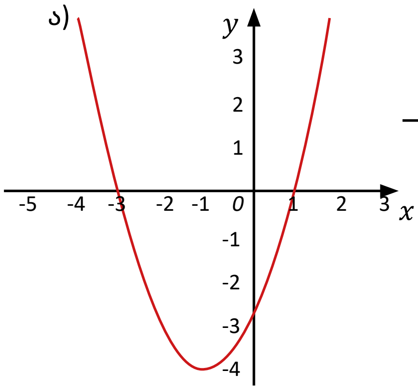
ა) $y = (x + 1)(x - 4)$; დ) $y = (x + 1)(x - 2)$;
ბ) $y = -(x - 3)(x - 2)$; ე) $y = -2(x + 5)(x - 3)$;
გ) $y = (2x - 8)(x + 1)$; ვ) $y = (3x + 9)(2x - 1)$.

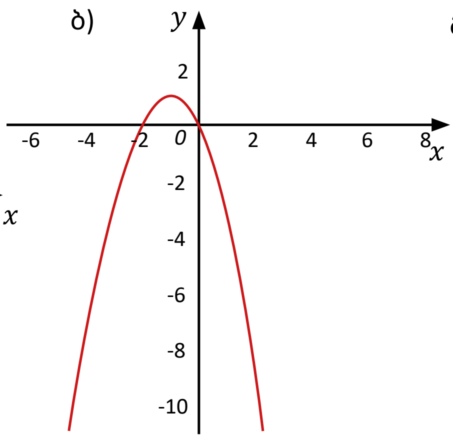
3. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის y **ღერძთან** გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

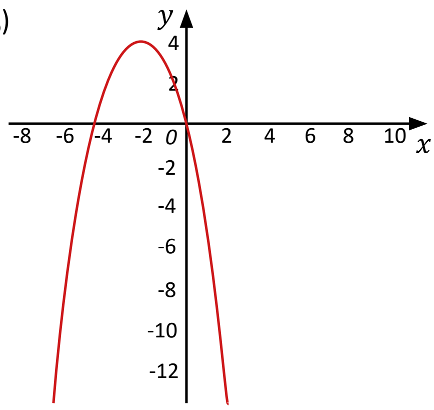
ა) $y = (x + 1)(x - 5)$; დ) $y = -(x + 1)(x - 2)$;
ბ) $y = -(x + 6)(x - 1)$; ე) $y = (x + 6)^2$;
გ) $y = -(2x + 1)(x + 1)$; ვ) $y = (2x - 6)^2$.

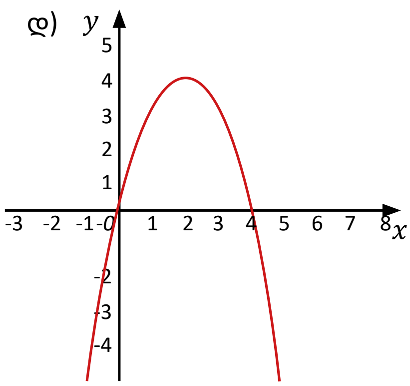
4. ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის გრაფიკები, ნახაზიდან გამომდინარე დაადგინე Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

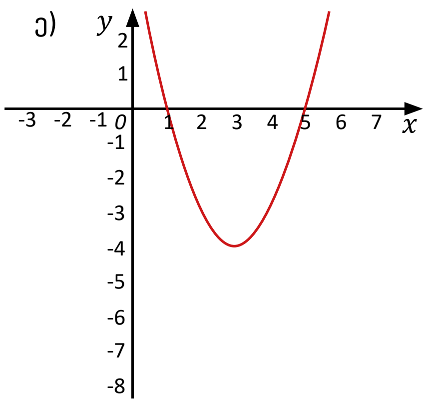
გამოწვევა: ჩაწერეთ თითოეული ფუნქციის განტოლება.

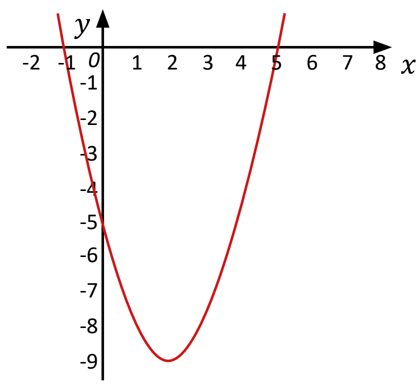
ა)


ბ)


გ)


დ)


ე)


ვ)


სავარჯიშოები

5. $y = 6x^2 - x - 5$ ფუნქციისთვის იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $y = 0$; ბ) $y = -3$.

6. ჩაწერეთ თითოეული ფუნქცია წვეროს კოორდინატის ფორმით:

- დაადგინეთ თითოეულის წვეროს კოორდინატები;
- დაადგინეთ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;
- დაადგინეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;
- ააგეთ გრაფიკები.

ა) $y = x^2 - 4x + 4$; დ) $y = x^2 + 2x + 5$;
ბ) $y = 4x^2 + 6x$; ე) $y = 2x^2 - 4x + 6$;
გ) $y = -2x^2 + 8x + 4$; ვ) $y = x^2 + 3x - 4$.

7. მოცემულია $y = 5x^2 + 6x + 8$. იპოვეთ y – ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $x = 0$; ბ) $x = -1$; გ) $x = -3$.

8. მოცემულია $y = -4x^2 + x + 5$, იპოვეთ y-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $x = 3$ ბ) $x = -2$ გ) $x = -\frac{5}{4}$

9. მოცემულია $y = x^2 + 6x$, იპოვეთ x-ის მნიშვნელობები, თუ:

ა) $y = 0$; ბ) $x = -8$; გ) $y = -10$

10. შეამოწმეთ მდებარეობს თუ არა ეს წერტილები მოცემული ფუნქციის გრაფიკზე?

ა) ეკუთვნის თუ არა $A(3;-7)$ და $B(-2;4)$ წერტილები $y = -2x^2 + 3x + 2$ ფუნქციას? მდებარეობს თუ არა გრაფიკზე?

ბ) ეკუთვნის თუ არა $A(1;2)$ და $B(2;1)$ წერტილები $y = 7x^2 - 3x - 2$ ფუნქციას? მდებარეობს თუ არა გრაფიკზე?

11. **გამოწვევა:**

ა) $C(2; k)$ წერტილი ძევს $y = 2x^2 - 3x - 2$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ k.

ბ) $D(2; d)$ წერტილი ძევს $y = -9x^2 - x - 2$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ d.

გ) $E(n;37)$ წერტილი ძევს $y = 11x^2 - 3x - 1$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ n.

დ) $F(m; -15)$ წერტილი ძევს $y = -3x^2 - 7x - 5$ ფუნქციის გრაფიკზე, იპოვეთ m.

სავარჯიშოები

MATH Lab – ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ამოცანა, აღნიშნულ ამოცანებს ოპტიმიზაციის ამოცანები ეწოდებათ.

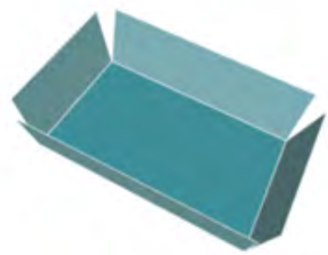
იმისათვის, რომ უფრო აღქმადი და თვალსაჩინო გახდეს ამოცანა, განვიხილოთ შემდეგი სიტუაცია.

სტუდენტს სურს ააგოს პროფესიული კოლეჯის სპორტული ინვენტარის საცავი, რომელსაც ექნება მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა და გამომდინარე იმ რესურსებიდან, რომლებიც აქვს, სურს, რომ ჰქონდეს მაქსიმალური მოცულობა.

დასაწყისისთვის სტუდენტს აქვს 24 მ სიგრძის და 18 მ სიგანის ფოლადის ფირფიტა. მოსწავლემ დაადგინა, რომ თუ გვერდებზე ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს და ისე შეადგენს ყუთის ფორმის საცავს, მიიღებს მაქსიმალურ მოცულობას.

საკვანძო კითხვა:

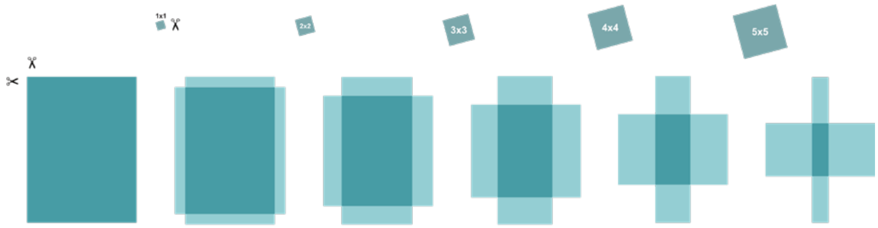
რა ზომის კვადრატები უნდა ჩამოიჭრას ოთხივე კუთხიდან, რომ მისგან დამზადდეს მაქსიმალური ტევადობის თავღია ყუთის ფორმის საცავი?



ინსტრუქცია ამოცანის ამოხსნისთვის:

ჩაატარეთ ცდები: ჩამოაჭერით მართკუთხედს კვადრატები, რომლის გვერდის სიგრძეა: $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$ და ა.შ.

- დააორგანიზეთ ინფორმაცია ცხრილში *(იხილეთ ცხრილი 1)*
- გამოთვალეთ მიღებული ფიგურის ფართობი (ჩამოჭრის შედეგად დარჩენილი ფირფიტის ფართობი იქნება, შედგენილი საცავის ზედაპირის ფართობი).
- თითოეული შემთხვევისთვის გამოთვალეთ რა შეიძლება იყოს ყუთის ფორმის საცავის მოცულობა.



გაგრძელება

სავარჯიშოები

■ MATH Lab – ■ ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

დაორგანიზეთ ცდების შედეგებით მიღებული ინფორმაცია ცხრილში.

იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია, თუ როგორ არის შესაძლებელი გამოთვლების შესრულება ფასიანი [EXCEL-ის მეშვეობით.]

ცხრილი 1

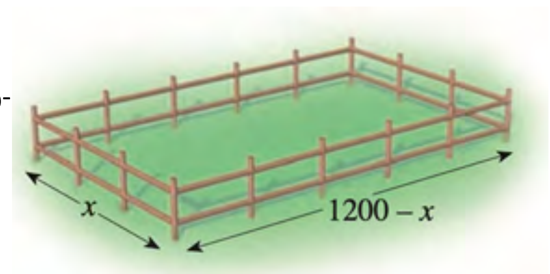
x	ჩამოჭრის შემდეგ სიგრძე	ჩამოჭრის შემდეგ სიგანე	სიმაღლე (საცავის სიღრმე)	ფართობი	მოცულობა

განზოგადება, სიტუაციის მათემატიკური მოდელის შექმნა განტოლების მეშვეობით.

- შეადგინეთ ფორმულა, რომლის მეშვეობით შესაძლებელი იქნება დარჩენილი მართკუთხედის ფირფიტის, საცავის ძირის, ფართობის გამოთვლა x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.
- შეადგინეთ მიღებული საცავის მოცულობის გამოსათვლელი ფორმულა.

13. ოპტიმიზაციის ამოცანა:

მეწარმეს აქვს მასალა, რომლის მეშვეობითაც შეუძლია შემოღობოს მართკუთხედის ფორმის მიწის ნაკვეთი, რომლის პერიმეტრია 2400 მეტრი.



რა უნდა იყოს მართკუთხედის გვერდები, რომ ნაკვეთს ჰქონდეს მაქსიმალური ფართობი?

პასუხი დაასაბუთეთ.

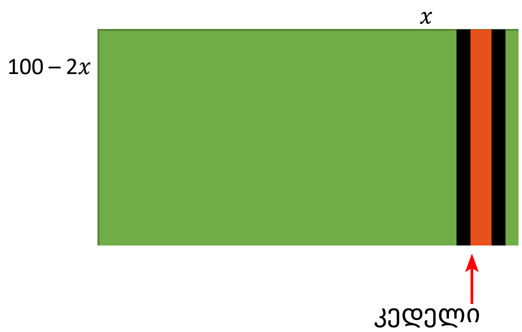
14. იფიქრე გეგმაზე. დავუშვათ, რომ თქვენ მუშაობთ კომპანიაში და პროდუქციისთვის ქმნით ყუთს, რომელსაც აქვს მართკუთხედის ფორმის ფუძე 36 სმ პერიმეტრით. ყუთის სიმაღლე უნდა იყოს 4 სმ.

- რა უნდა იყოს ფუძეში მყოფი მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე, რომ ფართობი იყოს მაქსიმალური? **მითითება**: შემოიტანეთ აღნიშვნა, დავუშვათ ყუთის გვერდის სიგრძეა x სმ, ჩაწერეთ რა იქნება სიგანე და ფართობი
- მას შემდეგ, რაც დაადგენთ რა ზომების შემთხვევაშია შესაძლებელი მაქსიმალური ფართობის მიღება ფუძეში, რა იქნება ყუთის მოცულობა?

სავარჯიშოები

MATH Lab – ჯგუფური ან/და დამოუკიდებელი მუშაობისთვის

15. **ოპტიმიზაციის ამოცანა**: **გამწვანება**. სკოლის ადმინისტრაცია გეგმავს სათამაშო მოედნის აშენებას. მას სურს მართკუთხედის ფორმის სივრცის შემოღობვა არსებული კედლის გამოყენებით. იპოვეთ ყველაზე დიდი ფართობი, რომლის შემოღობვაა შესაძლებელი 100 მეტრი სიგრძის ღობით?



16. ბილიარდის მაგიდის მწარმოებელმა აღმოაჩინა, რომ თვიურად n მაგიდის წარმოების ღირებულება ლარებში დაითვლება $R = 2n^2 - 32n + 100$ ფორმულით, სადაც R-არის წარმოების ღირებულება, ხოლო n-არის დამზადებული მაგიდების რაოდენობა.

- რამდენი მაგიდა უნდა დაამზადოს ერთ თვეში, რომ წარმოების ღირებულება მინიმუმამდე დაიყვანოს?
- რა იქნება თითეული მაგიდის მინიმალური ღირებულება?
- რა იქნება ერთი მაგიდის ღირებულება ლარში თუ თვეში დაამზადებს 20 მაგიდას?

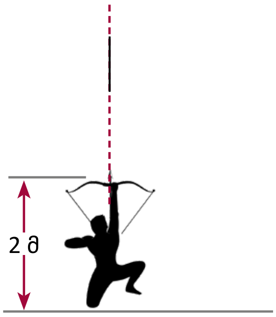
STEM დავალება – კავშირი ბუნებისმეტყველებასთან:

17. მეცნიერებმა აღრიცხეს გადაშენების პირას მყოფი ერთ-ერთი სახეობის ფრინველები და დაადგინეს, რომ პოპულაციის ზრდა გამოითვლება ფორმულით: $P = -0.5t^2 + 130t + 1350$, სადაც P-არის ფრინველების პოპულაცია (რაოდენობა), ხოლო t – თვეების რაოდენობა.

თუ არაფერი შეიცვალა და ფრინველებმა დაიწყეს გამრავლება მოცემული წესით:

- რამდენი ფრინველი იყო საწყის ეტაპზე? (მაშინ, როდესაც მეცნიერებმა დაიწყეს ფრინველების აღწერა?)
- რამდენი ფრინველი იქნება 2 თვის შემდეგ? 5 თვის შემდეგ? 10 თვის შემდეგ?
- რამდენი თვის შემდეგ მიაღწევს მაქსიმალურ რაოდენობას ფრინველთა პოპულაცია?
- როდის იქნება ფრინველების რაოდენობა 4800-ის ტოლი?
- რამდენი თვის შემდეგ გახდება 0-ის ტოლი პოპულაცია? (ანუ გადაშენდება პოპულაცია?)

6.5. ფუნქციის ანალიზი. ზრდადობა კლებადობისა და ნიშანმუდმივობის შუალედი



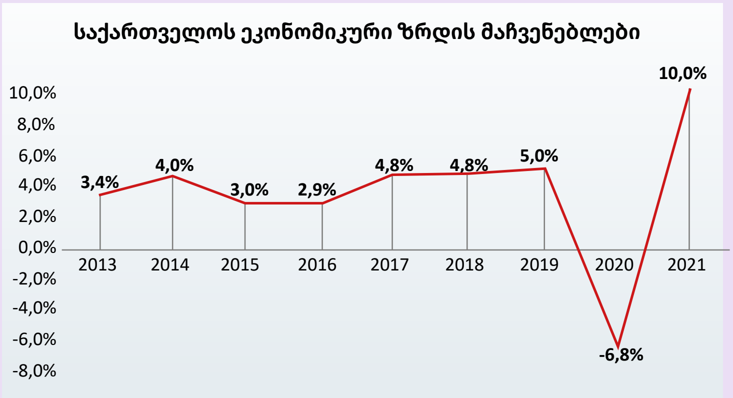
როდესაც კუთხით ხდება სხეულის გასროლა, ვხედავთ, რომ დროის რაღაც მომენტში სხეული ადის ზემოთ, შორდება მიწის ზედაპირს და შემდეგ ჩამოდის ქვემოთ.

? **საკვანძო კითხვა:** როგორ ხდება მოცემული სიტუაციის აღწერა/ჩაწერა მათემატიკურად?

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ტელევიზიებისა თუ სხვადასხვა მედია საშუალების მეშვეობით ვეცნობით ინფორმაციას. ინფორმაცია ხშირად წარმოდგენილია დიაგრამების, ცხრილების მეშვეობით.

გრაფიკით ინფორმაციის წარმოდგენა ერთ-ერთი თვალსაჩინო მეთოდია, რომელიც აადვილებს ინფორმაციის აღქმას და ანალიზს.

თანამედროვე ცხოვრებაში აუცილებლად უნდა ვიცოდეთ გრაფიკით მოწოდებული სხვადასხვა ინფორმაციის წაკითხვა.

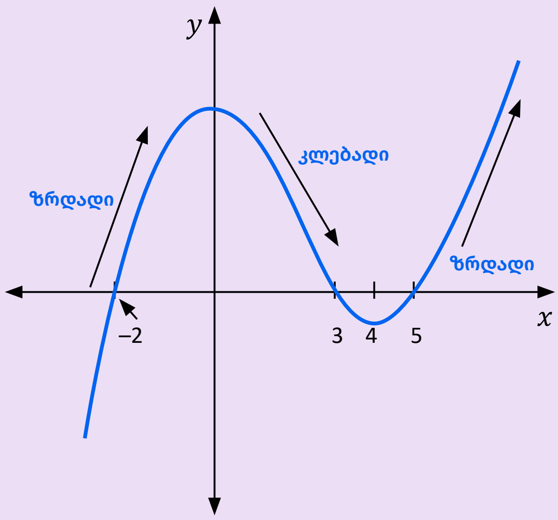


მონაცემთა წყარო: საქსტატი

[წყარო 🔗 Forbes , საქსტატი]

გრაფიკით ვხედავთ, რომ 2013 წლიდან 2014 წლამდე იყო ეკონომიკური ზრდა, ხოლო 2019-დან 2020-მდე ეკონომიკური კლება.

შევადაროთ აღმართზე ასვლას და ჩამოსვლას, როდესაც ვუყურებთ გრაფიკს, გარკვეული წერტილიდან „ზემოთ ასვლაზე“ ვამბობთ – ზრდადია, ხოლო „ქვემოთ ჩამოსვლაზე“ ვამბობთ კლებადია.



ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

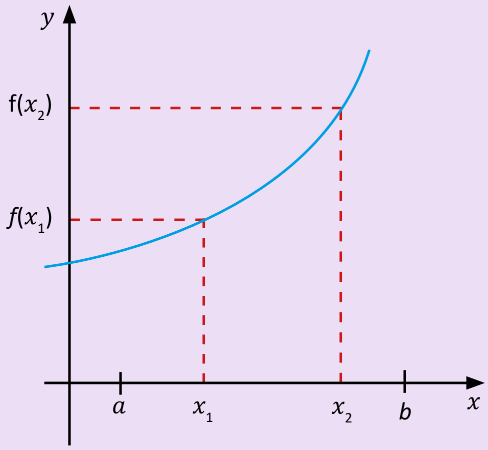
განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე $[a;b]$.

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) > f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია.



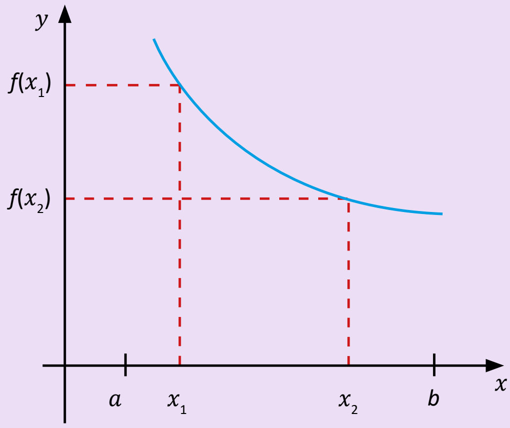
განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე $[a;b]$.

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) < f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე ფუნქცია კლებადია.



განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც განსაზღვრულია ინტერვალზე

$[a;b]$

თუ აღნიშნულ ინტერვალზე აღებული ნებისმიერი

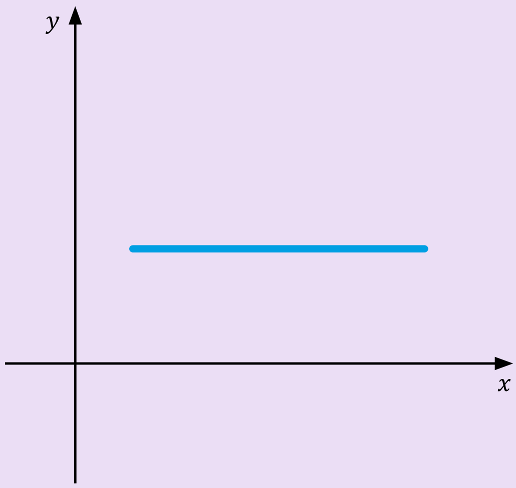
x_1 და x_2 წერტილისთვის სრულდება პირობა:

თუ $x_2 > x_1$,

მაშინ $f(x_2) = f(x_1)$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემულ ინტერვალზე

ფუნქცია მუდმივია.



ნიმუში 1

მოცემულია ა) $y = x^2 - 2x - 3$ და ბ) $y = -4x^2 + 12x - 9$ ფუნქცია.

დავადგინოთ რომელ ინტერვალზეა ფუნქცია ზრდადი, კლებადი

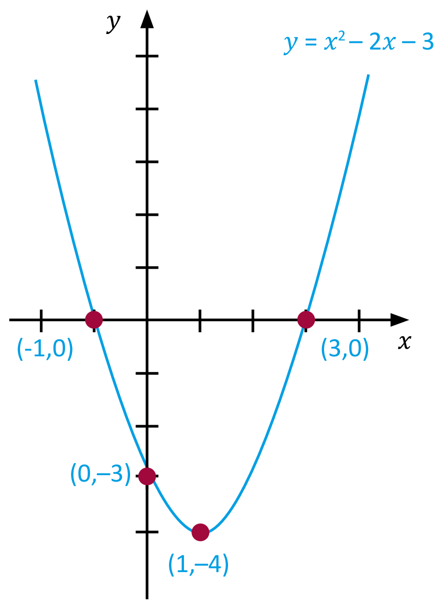
ა) გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ მოცემული ფუნქციის $y = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

წვეროს კოორდინატებია $(1; -4)$.

$(-\infty; 1]$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის კლებადი.

$[1; +\infty)$ ინტერვალზე კი კვადრატული ფუნქცია არის ზრდადი.

$(1; -4)$ – არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.



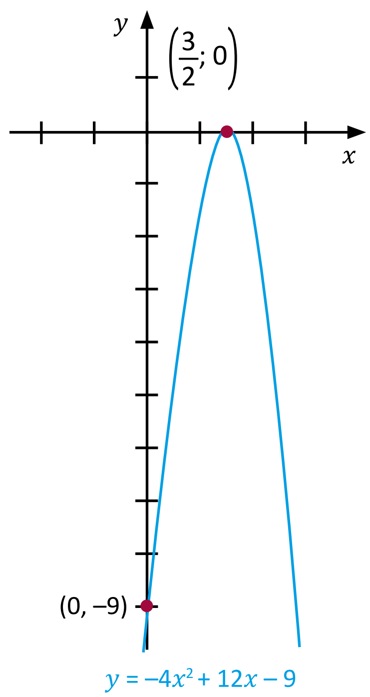
ბ) გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ მოცემული $y = -4x^2 + 12x - 9$ ფუნქციის

წვეროს კოორდინატებია $\left(\frac{3}{2};0\right)$.

$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის ზრდადი.

$\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ ინტერვალზე კვადრატული ფუნქცია არის კლებადი.

$\left(\frac{3}{2};0\right)$ – არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.



ნიმუში 2

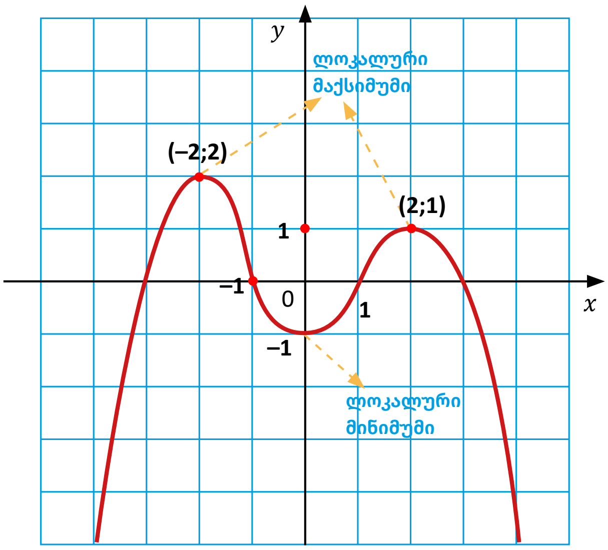
მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები.

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ გრაფიკის ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებია:

$(-2;2), (0;-1), (2;1)$

მიღებული x კოორდინატები გვეხმარება განსაზღვრის არეზე მოვნიშნოთ ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალები.

ლოკალური მაქსიმუმი ის წერტილია, რომელზეც ფუნქცია ზრდადობას ცვლის კლებადობით. ანალოგიურად, ლოკალური მინიმუმის წერტილი ის წერტილია, რომელზეც ფუნქცია კლებადობას ცვლის ზრდადობით.



როდესაც $x \epsilon (-\infty; -2)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება და y იღებს მნიშვნელობებს $-\infty$-დან 2-მდე.

როდესაც $x \epsilon (-2;0)$, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქცია მცირდება და y იღებს მნიშვნელობებს 2-დან -1-მდე.

როდესაც $x \epsilon (0;2)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება და y იღებს მნიშვნელობებს -1-დან 1-მდე.

როდესაც $x \epsilon (2; +\infty)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება და y იღებს მნიშვნელობებს 1-დან $-\infty$-მდე.

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები განსაზღვრის არეზე, ჯერ ვპოულობთ ინტერვალზე მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილის კოორდინატებს, სადაც ზრდადობა იცვლება კლებადობით. ზოგადად, ლოკალური მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილებს ლოკალური ექსტრემუმები ეწოდებათ.

ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ძალიან მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ გრაფიკიდან ინფორმაციის წაკითხვა და ანალიზი.

მოცემულ გრაფიკზე ვხედავთ, რომ გარკვეულ ადგილებში გრაფიკის ნაწილი არის საკოორდინატო სიბრტყის I და II მეოთხედში, ან III, IV მეოთხედებში.

განსაზღვრის არეს გარკვეული ქვესიმრავლისთვის $y > 0$-ზე, ხოლო გარკვეული ქვესიმრავლისთვის $y < 0$-ზე. აღნიშნულ შუალედებს (ინტერვალებს) ეწოდება, ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები.

ქვემოთ განვიხილოთ ნიმუშები, რომელიც დაგვეხმარება ფუნქციის ნიშნის კვლევაში.

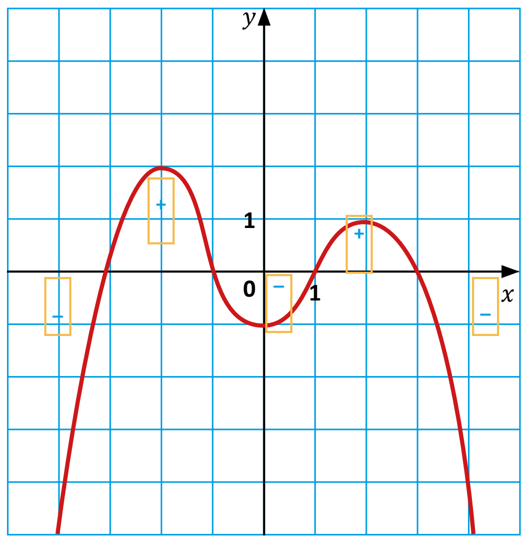
ნიმუში 3

მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

გამომდინარე იქიდან, თუ რომელ მეოთხედშია გრაფიკი განთავსებული, ადგენს ფუნქციის ნიშანს.

როდესაც გრაფიკის ნაწილი განთავსებულია:

- I და II მეოთხედში, მაშინ შესაბამის ინტერვალზე ფუნქცია (y) არის დადებითი;
- III და IV მეოთხედებში, მაშინ შესაბამის ინტერვალზე ფუნქცია (y) არის უარყოფითი.



იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის ნიშანი:

- ვპოულობთ გრაფიკის მიერ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს;
- ვყოფთ Ox ღერძს ინტერვალებად;
- თითოეული ინტერვალისთვის ვადგენთ ფუნქციის შესაბამის ნიშანს.

განვიხილოთ ნიმუშ 3-ში მოცემული გრაფიკი:

- გრაფიკის მიერ Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია:

$$(-3;0),(-1;0),(1;0),(3;0)$$

- როდესაც $x < -3$, მაშინ x-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის ინტერვალიდან $(-\infty;-3)$ ფუნქცია უარყოფითია, ე.ი. y-ის შესაბამისი მნიშვნელობა უარყოფითია;
- როდესაც $-3 < x < -1$, მაშინ ფუნქცია დადებითია;
- როდესაც $-1 < x < 1$, მაშინ ფუნქცია უარყოფითია;
- როდესაც $1 < x < 3$, მაშინ ფუნქცია დადებითია;
- როდესაც $x > 3$, მაშინ ფუნქცია უარყოფითია.

ნიმუში 4

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქცია, როდესაც $a > 0$ –ზე .
დაადგინეთ x-ის რა მიშვნელობისთვის არის $y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი?

x-ის რა მიშვნელობისთვის არის

$y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია დადებითი, ნიშნავს რომ ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი (ანუ x) რომლისთვისაც $y > 0$-ზე.

x-ის რა მიშვნელობისთვის არის

$y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია უარყოფითი, ნიშნავს ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი (ანუ x) რომლისთვისაც $y < 0$-ზე.

ვიპოვოთ გრაფიკის Ox ღერძთან კვეთის წერ-ტილები:

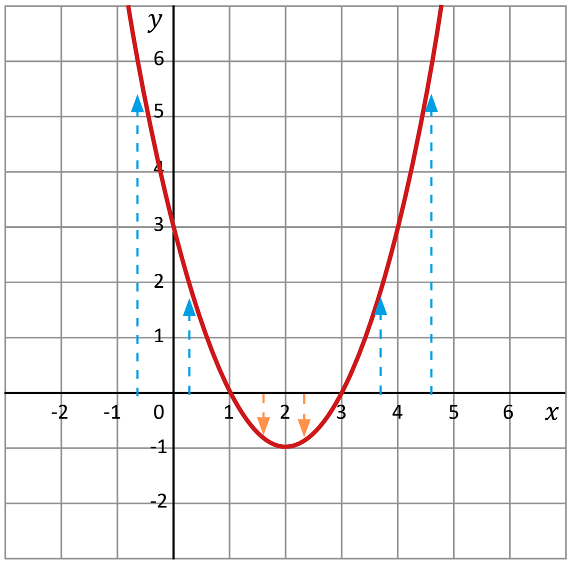
როცა $y = 0$, მაშინ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ან } x_2 = 3$$

Ox ღერძის კვეთის წერტილებია (1;0) (3; 0).

მოვნიშნოთ აღნიშნული წერტილები გრაფიკზე.



ხედავთ, რომ

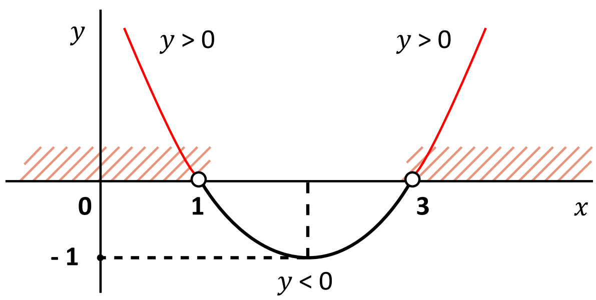
- როდესაც $x < 1$ ან $x > 3$

პარაბოლას შტოები არის I და II მეოთხედში, ე.ი. $y > 0$-ზე.

- როდესაც $1 < x < 3$

პარაბოლას ნაწილი მოთავსებულია IV მეოთ-ხედში, ე.ი. $y < 0$-ზე.

მეტი თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ იგივე ფუნქციის შემდეგი ნახაზი:



ნიმუში 5

განვიხილოთ კვადრატული ფუნქცია, როდესაც $a < 0$-ზე.
დაადგინეთ x-ის რა მიშვნელობისთვის არის $y = -x^2 + 4x - 3$ ფუნქცია დადებითი და უარყოფითი?

ვიპოვოთ გრაფიკის Ox ღერძთან კვეთის წერტი-ლები:

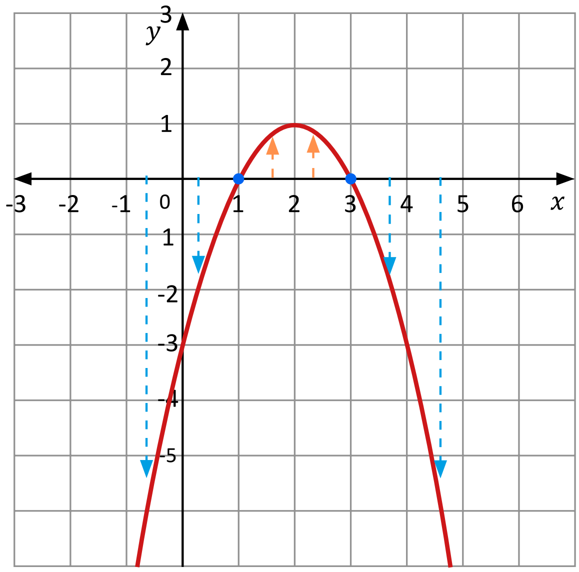
როცა $y = 0$, მაშინ $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$$-(x-1)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ ან } x_2 = 3$$

Ox ღერძის კვეთის წერტილებია (1;0) (3; 0).

მოვნიშნოთ აღნიშნული წერტილები გრაფიკზე;



ვხედავთ, რომ

- როდესაც $x < 1$ ან $x > 3$

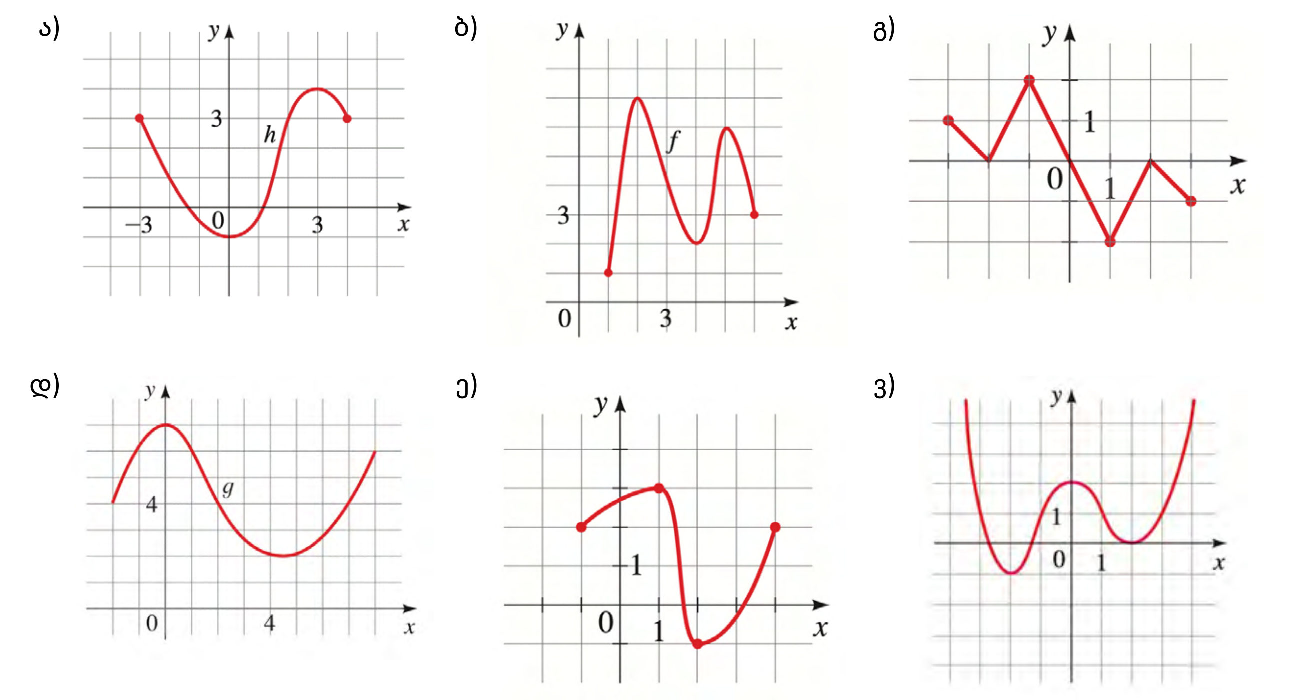
პარაბოლას შტოები არის III და IV მეოთხედში, ანუ $y < 0$-ზე.

- როდესაც $1 < x < 3$

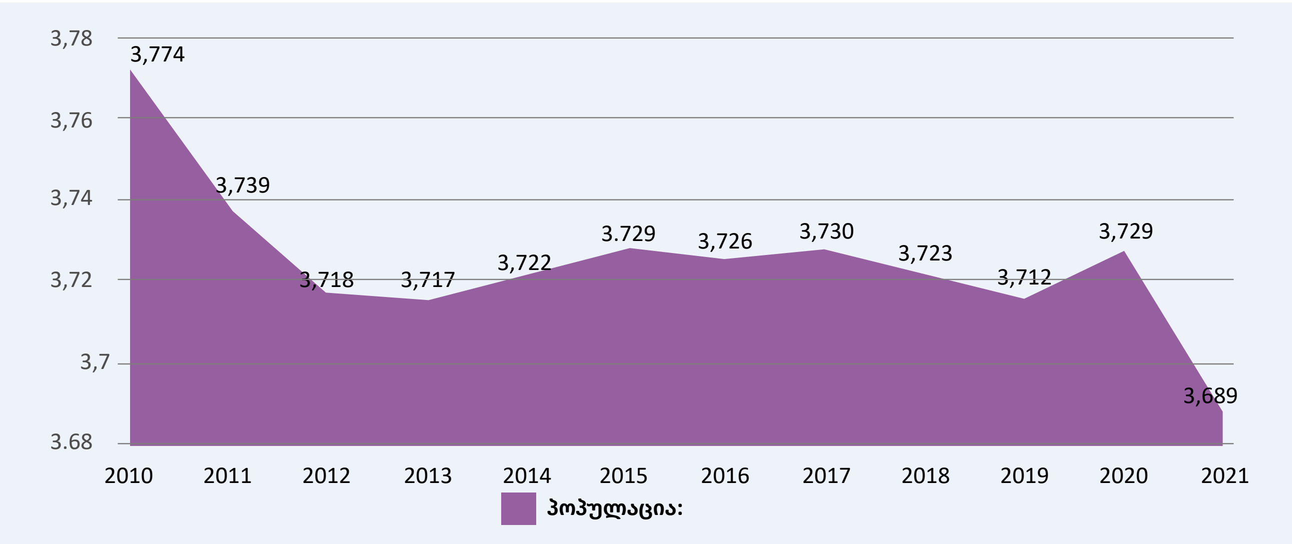
პარაბოლას ნაწილი მოთავსებულია I მეოთხედში ანუ $y > 0$-ზე.

სავარჯიშოები

1. გრაფიკიდან გამომდინარე დაადგინეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები:



2. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობა 2010-დან 2021 წლის ჩათვლით.



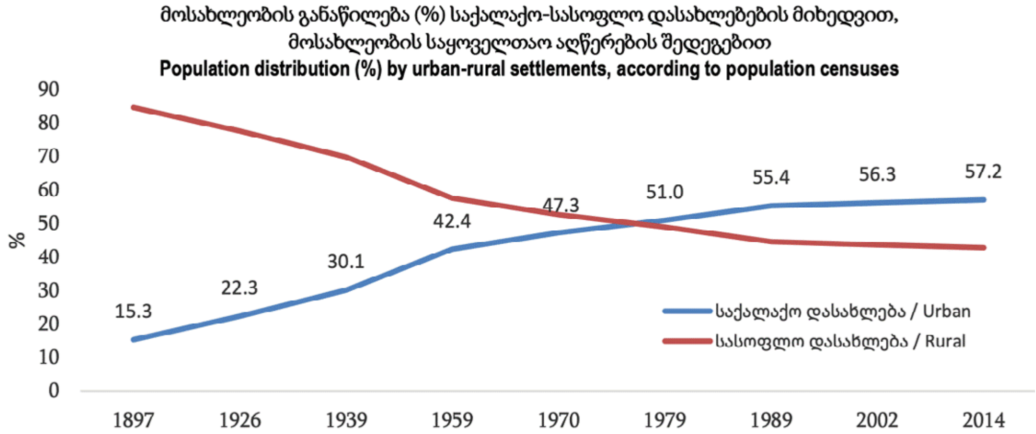
წყარო: www.Ceicdata.com
Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო Oy ღერძი მოსახლეობის რაოდენობას მილიონებში.

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- ამოწერეთ რამდენით იზრდებოდა ან მცირდებოდა მოსახლეობა ყოველწლიურად?

სავარჯიშოები

3. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის განაწილება პროცენტულად საქალაქო და სასოფლო დასახლებების მიხედვით 1897 წლიდან 2014 წლამდე საყოველთაო აღწერების შედეგებით.



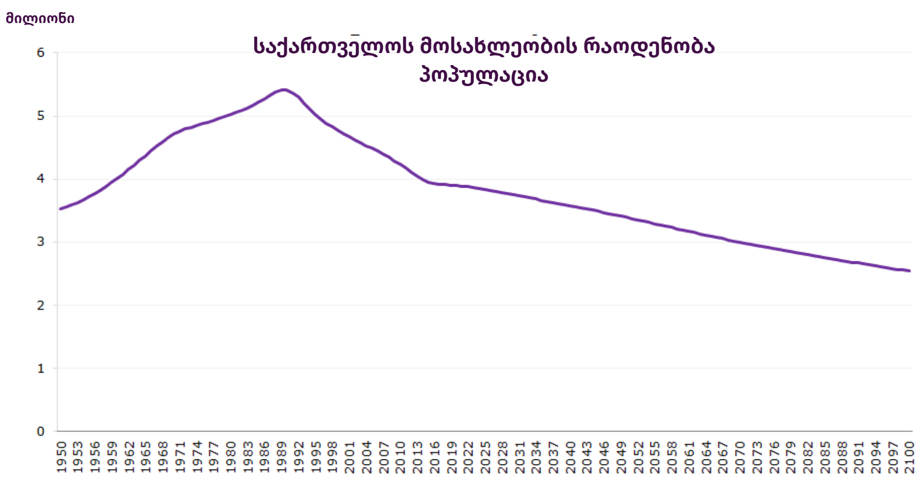
წყარო: 🔗 Geostat

Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო Oy ღერძი პროცენტულ მაჩვენებელს.

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- აღწერეთ დინამიკა;
- რომელ წლებში იყო საქალაქო დასახლების მკვეთრი ზრდა?
- რომელ წლებში იყო სასოფლო დასახლების მკვეთრი კლება?
- რა ხდებოდა 1897 წლიდან 1959 წლამდე?
- რა ხდებოდა 1989 წლიდან 2014 წლამდე?

4. გრაფიკით მოცემულია საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობის დინამიკა 1950 წლიდან 2022 წლამდე და შემდგომ მოცემულია პროგნოზი. რა იქნება საქართველოს მოსახლეობის რაოდენობა 2100 წლისთვის, თუ იმავე დინამიკით გაგრძელდება კლება?



სავარჯიშოები

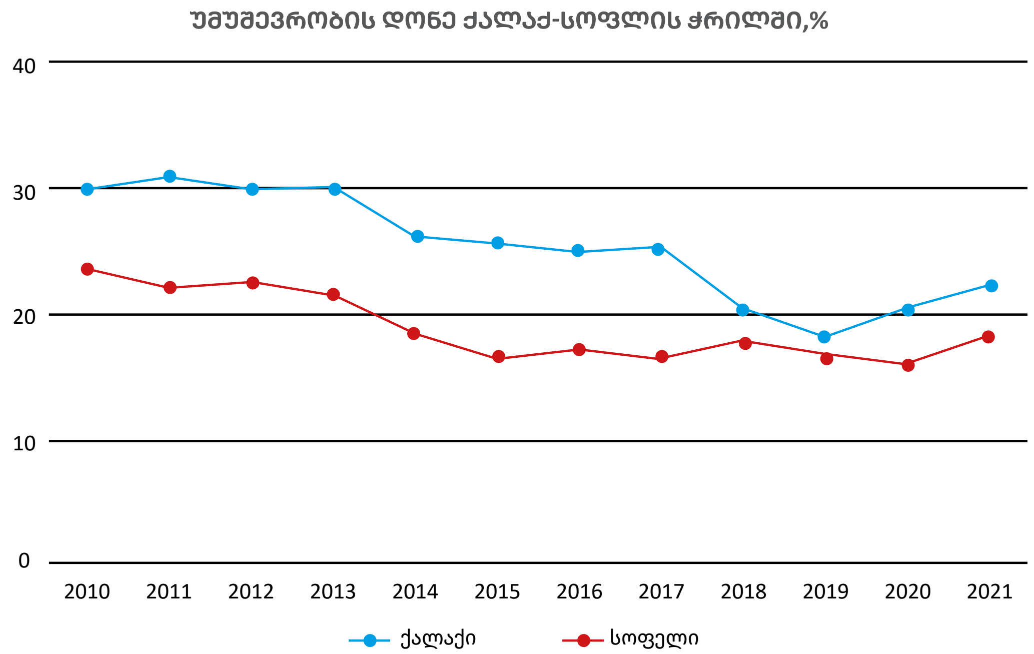
წყარო: THEGLOBALGRAPH.COM

Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო *Oy* ღერძი რაოდენობას მილიონებში.

გრაფიკიდან დაადგინეთ:

- რომელ წლებში იზრდებოდა საქართველოს მოსახლეობა და როდის მიაღწია მაქსიმალურ რაოდენობას მე-20 საუკუნეში? დაახლოებით რამდენით გაიზარდა აღნიშნულ პერიოდში?
- რომელი წლიდან დაიწყო კლება და დაახლოებით რამდენით შემცირდა მოსახლეობა 2022 წლამდე?

5. განვიხილოთ უმუშევრობის დონის აღმწერი გრაფიკები.



წყარო: GEOSTAT

Ox ღერძი გვიჩვენებს წლებს, ხოლო *Oy* ღერძი პროცენტულ მაჩვენებელს.

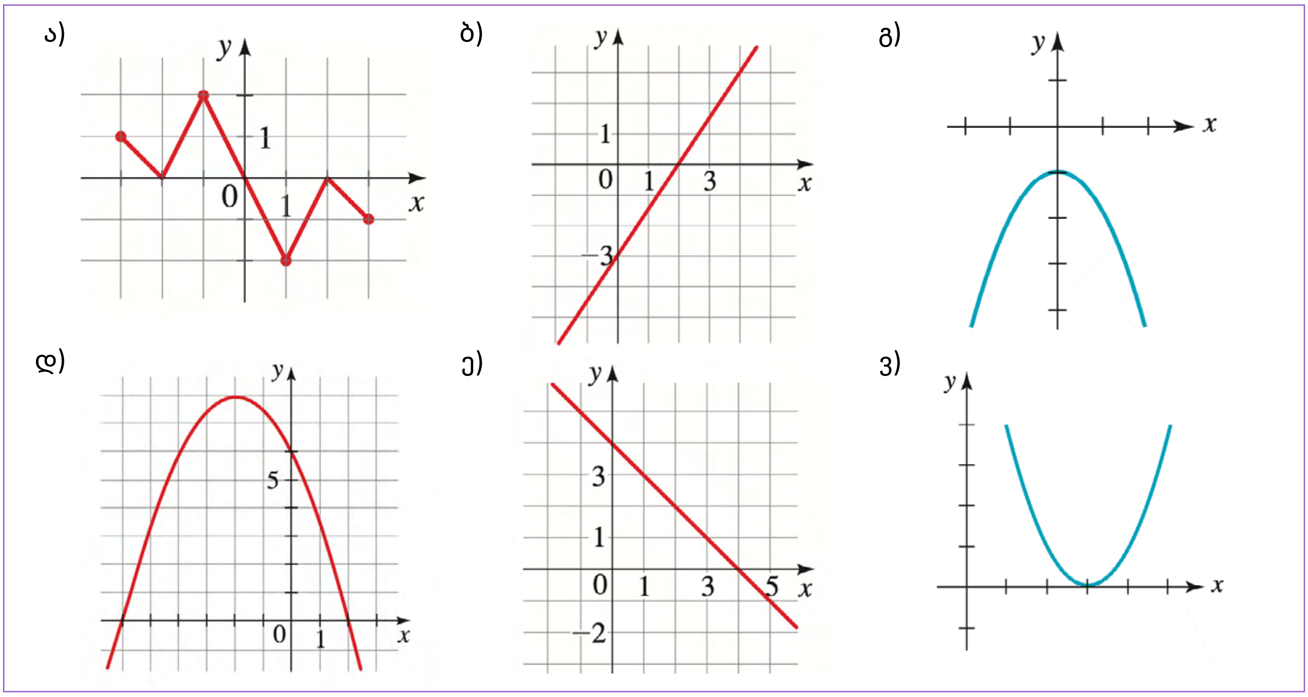
გრაფიკიდან ჩანს, რომ 2017 დან 2019-მდე ქალაქში უმუშევრობის დონე შემცირდა (აღინიშნება კლება).

- გააანალიზეთ თითოეული გრაფიკი, იმჯელეთ რომელ წლებში იყო უმუშევრობის დონის ზრდა? კლება?
- იფიქრეთ, რა გარემოებებს შეეძლო გამოეწვია უმუშევრობის დონის ზრდა 2019 წლიდან?
- მოიძიეთ ინფორმაცია, თუ როგორია დასაქმების ან უმუშევრობის დონე სხვა ქვეყნებში და გააანალიზეთ სიტუაცია.

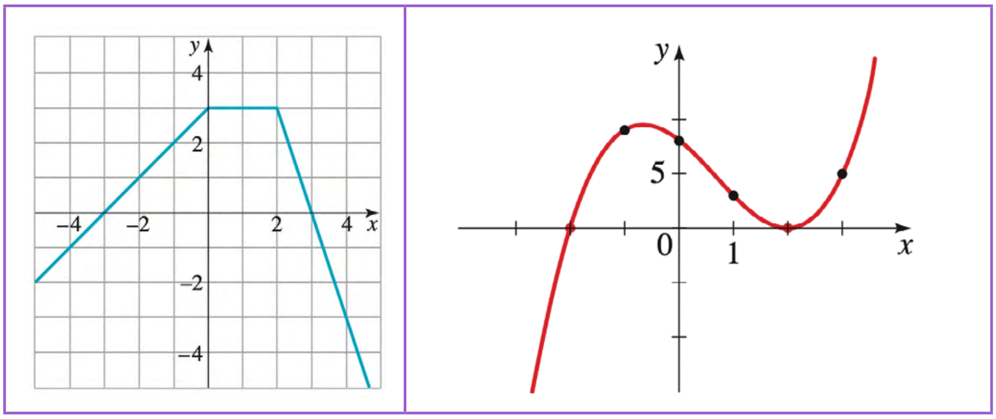
6. ინტერნეტის მეშვეობით მოიძიეთ ინფორმაცია თქვენთვის საინტერესო თემებზე და გააანალიზეთ გრაფიკულად მოცემული ინფორმაცია.

სავარჯიშოები

7. იპოვეთ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები (ამოწერეთ x-ის რა მნიშვნელობებისთვის არის ფუნქცია დადებითი და როდის უარყოფითი)



8. ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე, დაადგინეთ, როგორც ზდადობისა და კლებადობის შუალედები, ასევე ნიშანმუდმივობის შუალედები.



9. **გამოწვევა:** დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა/კლებადობის და ნიშანმუდმივობის შუალედები:

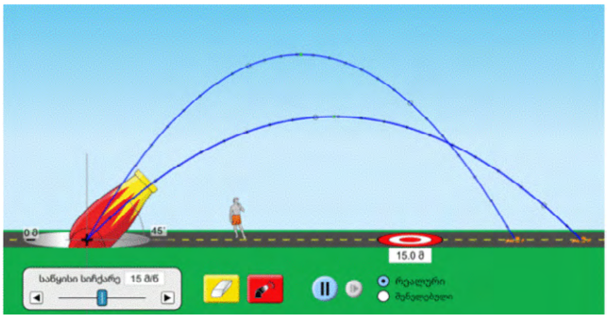
ა) $y = x^2 + 5x + 4$;
დ) $y = (x - 5)^2 + 4$;
ბ) $y = -2x^2 + 12x - 4$;
ე) $y = -(x + 3)^2 - 4$;
გ) $y = (x - 4)(x + 3)$;
ვ) $y = (2x + 10)(x - 1)$.

მითითება: გრაფიკები შეგიძლიათ ააგოთ რვეულში, ან ააგეთ ტექნოლოგიების გამოყენებით, შეინახეთ word-ის ფაილში და თითოეულს მიუთითეთ, როგორც ზრდადობა/კლებადობის, ასევე ნიშანმუდმივობის შუალედები და აღწერა.

6.6. კვადრატული უტოლობის ამოხსნა გრაფიკულად

როდესაც კუთხით ხდება სხეულის გასროლა, ჩვენ ვხედავთ რომ დროის რაღაც მომენტში სხეული ადის ზემოთ, შემდეგ კი ჩადის ქვემოთ.

? **საკვანძო კითხვა:** როგორ ხდება მოცემული სიტუაციის აღწერა მათემატიკურად?



ტელესკოლა

ვიცით, რომ:

$ax + b > 0$ ან $ax + b < 0$ უტოლობებს, სადაც x ცვლადია და a,b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობა ეწოდება.

ნიმუში 1:

- *დავუშვათ* $a > 0$, *განვიხილოთ უტოლობა* $2x + 4 > 0$,

  უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

  $$x > -2$$

- *დავუშვათ* $a < 0$, განვიხილოთ უტოლობა $-2x + 4 > 0$,

  უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

  $-2x > -4;\ \ x < 2$

  მითითება: როდესაც უტოლობის ორივემხარეს ვყოფთ უარყოფით რიცხვზე, უტოლობის ნიშანი იცვლება.

ნიმუშები

უტოლობის ამონახსნის შემდეგ, ამონახსნთა სიმრავლის წარმოდგენა შესაძლებელია რიცხვითი ღერძის მეშვეობით.

- როდესაც $x < -1$, პასუხს წარმოვადგენთ რიცხვით ღერძზე

- როდესაც $-1 \le x < 3$ პასუხს წარმოვადგენთ რიცხვით ღერძზე

ან ვწერთ $x \in [-1\,;\,3)$

−1 ეკუთხვნის სიმრავლეს შესაბამისად სხივზე არის გაფერადებული პატარა წრით, 3 არ ეკუთვნის, შესაბამისად, აღნიშნულია ცარიელი წრით.

კვადრატული უტოლობის კავშირი კვადრატულ ფუნქციასთან

$ax^2 + bx + c > 0$ ან $ax^2 + bx + c < 0$

უტოლობებს, სადაც x ცვლადია და a,b,c ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, სადაც $a \neq 0$ კვადრატული უტოლობა ეწოდება.
იმისათვის, რომ ამოვხსნათ კვადრატული უტოლობა, აუცილებელია (პროცედურა):

- უტოლობის ყველა წევრი უნდა იყოს ერთ მხარეს, ხოლო მეორე მხარეს 0.
- უნდა წარმოვადგინოთ ნამრავლად უტოლობის ერთ მხარეს მიღებული კვადრატული სამწევრი.
- ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის გამოსახულება 0-ის ტოლი.
- გადავიტანოთ მიღებული ფესვები რიცხვით ღერძზე და დავყოთ იგი ინტერვალებად.
- შევამოწმოთ უტოლობის მარცხენა მხარეს მყოფი გამოსახულების ნიშანი თითოეულ ინტერვალში.

შეხსენება:
იმისათვის, რომ $ax^2 + bx + c$ – სამწევრი, წარმოვადგინოთ ნამრავლად, უნდა ვიპოვოთ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვები x_1 და x_2 (თუ ისინი არსებობენ) და სამწევრი დავშალოთ ნამრავლად:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ჩვენ უკვე განვიხილეთ $y = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქცია.

- როდესაც გვინდა დავადგინოთ:

x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის ფუნქცია დადებითი, საჭიროა ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი რომლისთვისაც $y > 0$-ზე, ანუ

$ax^2 + bx + c > 0$; ვიღებთ კვადრატულ უტოლობას

- როდესაც გვინდა დავადგინოთ:

x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის ფუნქცია უარყოფითი, საჭიროა ვიპოვოთ Ox ღერძზე ყველა ის რიცხვი რომლისთვისაც $y < 0$-ზე, ანუ

$ax^2 + bx + c < 0$; ვიღებთ კვადრატულ უტოლობას

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ ვიპოვოთ ნიშანმუდმივობის შუალედები კვადრატული ფუნქციის გრაფიკზე.

მას შემდეგ, რაც დავაკავშირეთ კვადრატული უტოლობა კვადრატულ ფუნქციასთან, განვიხილოთ კვადრატული უტოლობის ამოხსნა გრაფიკული მეთოდით.

ნიმუში 1

ვიპოვოთ $x^2 - 4x + 3 > 0$ უტოლობის ამონახსნები:

მეთოდი 1:

გრაფიკული მეთოდი იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $x^2 - 4x + 3 > 0$ უტოლობის ამონახსენი.

უტოლობის ამოხსნისთვის დავიცვათ შემდეგი პროცედურა:

ნაბიჯი 1:

წარმოვადგინოთ, $x^2 - 4x + 3$ გამოსახულება ნამრავლის სახით:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

ნაბიჯი 2:

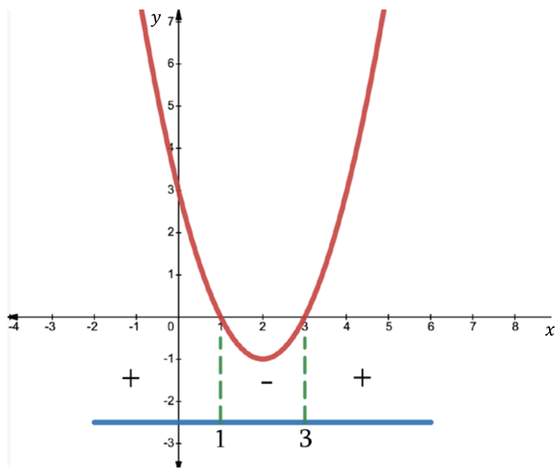
ავაგოთ $y = (x-1)(x-3)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ნაბიჯი 3:

გრაფიკის მიხედვით დავადგინოთ, როდის არის $(x-1)(x-3) > 0$ და ვიპოვოთ x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $y > 0$.

ნაბიჯი 4:

დავწეროთ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე.



ნახაზზე ჩანს, რა ინტერვალებად იყოფა Ox ღერძი და რა იქნება თითოეულ ინტერვალზე y-ის ნიშანი.

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

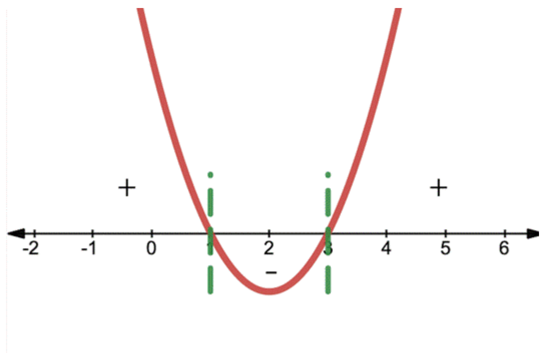
უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < 1 \text{ და } x > 3$$

რეკომენდაცია:

სიმარტივისთვის შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

- დავხაზოთ მხოლოდ Ox ღერძი.
- მოვნიშნოთ ფუნქციის ნულები (კვადრატული სამწევრის ნულები).
- დავყოთ ღერძი ინტერვალებად და დავხაზოთ გრაფიკი.
- Ox ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში $y > 0$ ხოლო ქვედა ნახევარსიბრტყეში $y < 0$.



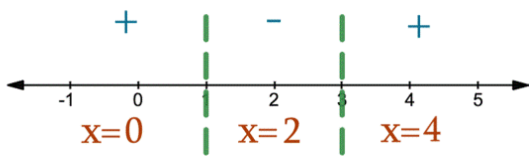
მეთოდი 2:

ინტერვალთა მეთოდი

როდესაც მოცემულია კვადრატული უტოლობა: $x^2 - 4x + 3 > 0$.

წარმოვადგინოთ, სამწევრი ნამრავლის სახით: $(x-1)(x-3) > 0$;

- გადავიტანოთ უტოლობის ნულები რიცხვით ღერძზე და დავყოთ ინტერვალებად;
- შევამოწმოთ უტოლობის მარცხენა მხარეს მყოფი გამოსახულების ნიშანი თითოეულ ინტერვალში, ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ ინტერვალიდან აღებული ნებისმიერი სატესტო რიცხვისთვის.



- თუ $x = 0$, მაშინ $(0-1)(0-3) > 0$
- თუ $x = 2$, მაშინ $(2-1)(2-3) < 0$
- თუ $x = 4$, მაშინ $(4-1)(4-3) > 0$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < 1 \text{ და } x > 3$$

ნიმუში 2

ვიპოვოთ $-2x^2 + 5x + 3 < 0$ უტოლობის ამონახსნები:

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $-2x^2 + 5x + 3 < 0$ უტოლობის ამონახსნი, ავაგოთ $y = -2x^2 + 5x + 3$

ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $y < 0$.

წარმოვადგინოთ, $-2x^2 + 5x + 3$ ნამრავლად და ვიპოვოთ ფუნქციის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

$y = 0,$ $\qquad -2x^2 + 5x + 3 = 0$

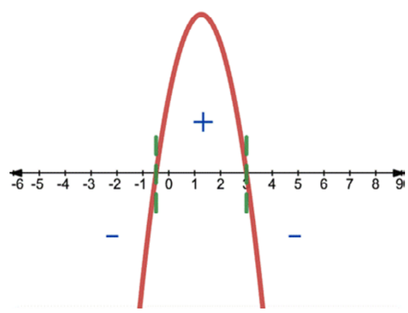
$$D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2 \cdot (-2)} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$x_2 = \frac{-5+7}{2 \cdot (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$-2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$$

- გადავიტანოთ რიცხვით ღერძზე წერტილები $-\frac{1}{2}$ და 3.
- ავაგოთ $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3)$ გრაფიკი.



- ვიპოვოთ, როდის არის $y < 0$-ზე:

$$-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) < 0$$

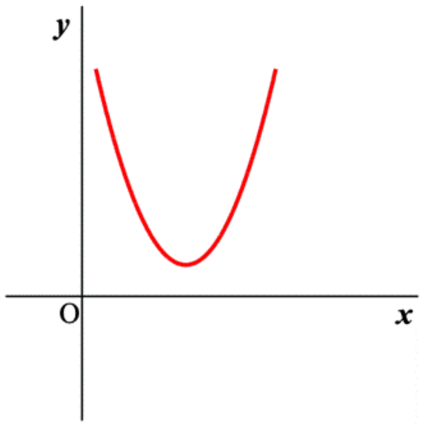
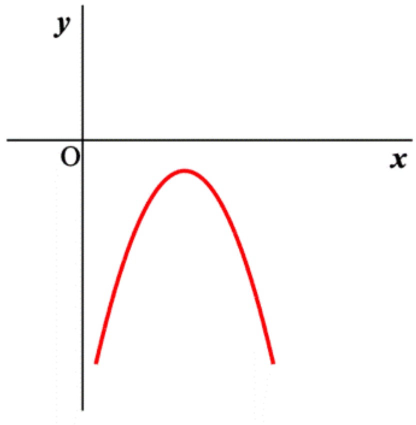
უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა:

$$x < -0.5 \text{ და } x > 3$$

მითითება: განიხილეთ უტოლობის ამოხსნის სხვა მეთოდი და გააანალიზეთ.

ნიმუში 3

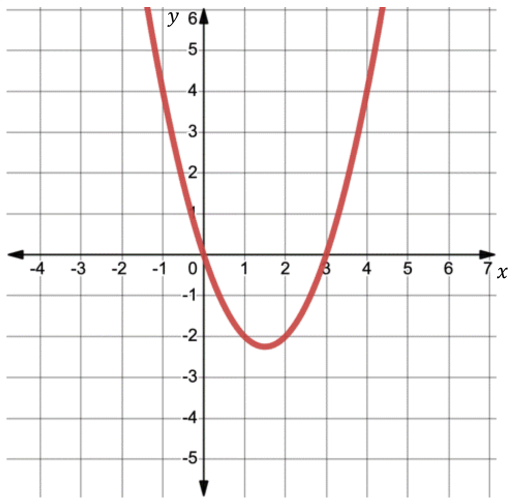
განვიხილოთ სიტუაცია როდესაც $D < 0$:

ა) როდესაც D < 0 და $a > 0$ პარაბოლა არ კვეთს Ox ღერძს x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის $y > 0$ 	ბ) როდესაც $D < 0$ და $a < 0$ პარაბოლა არ კვეთს Ox ღერძს x-ის ყველა მნიშვნელობისთვის $y < 0$ 

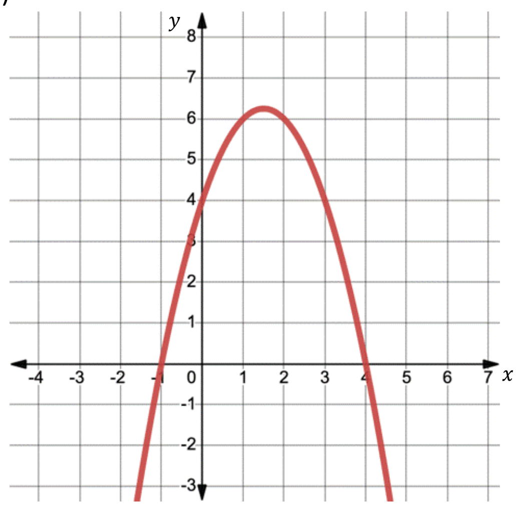
სავარჯიშოები

1. გრაფიკიდან გამომომდინარე დაადგინეთ, x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)>0$-ზე და x-ის რა მნიშვნელობისთვის არის $f(x)<0$.

ა)



ბ)



2. ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $(x-4)(x+3)<0$;
ბ) $(4x-8)(x+1)>0$;
გ) $(x+3)(x-4)>0$;
დ) $x^2-8x+16<0$;
ე) $-2x^2-8x>0$;
ვ) $x^2+4x+4<0$;
ზ) $x^2+7x+10<0$;
თ) x^2-$6x$ $+9\geq0$;
ი) $x^2+x+8>0$.

3. **გამოწვევა:** ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

ა) $2x^2+7x+5>0$;
ბ) $-2x^2+7x>5$;
გ) $x^2+2x+1\leq0$;
დ) $2x^2<8x$;
ე) $-x^2-x>x-8$;
ვ) $-4x^2+3x+1<0$.

წინარე მასალის გამეორება

4. იპოვეთ შემდეგი წრფივი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე:

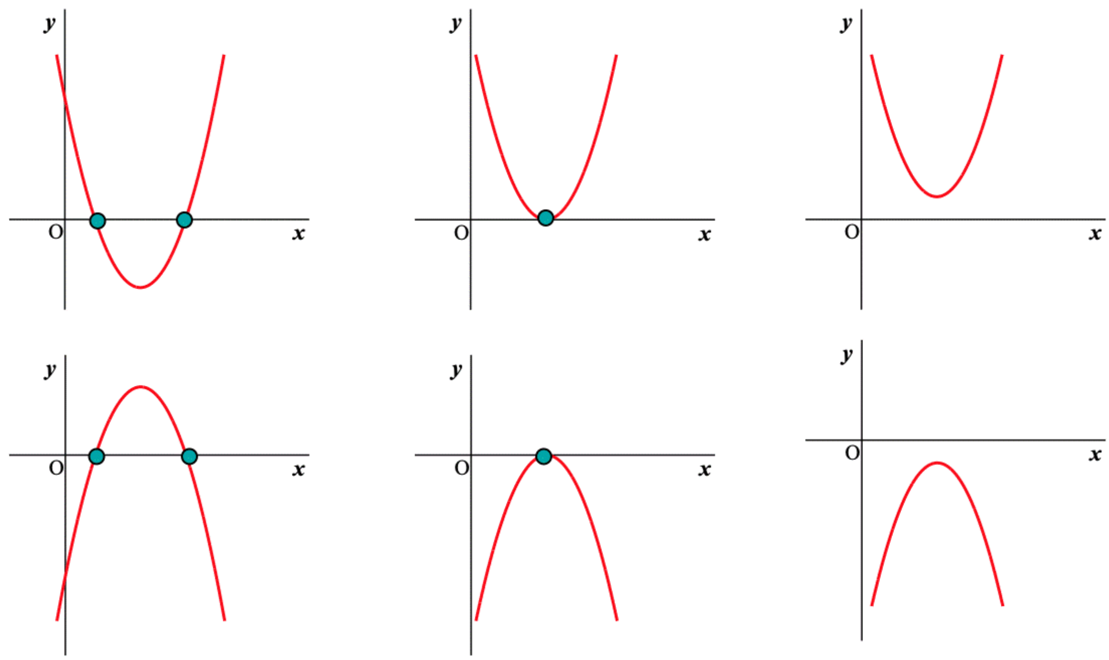
ა) $4x-8>2x$;
ბ) $-5(x-2)>8-2x$;
გ) $-12<2x-4$;
დ) $6(3-2x)<80-20x$.

ცოდნის შეჯამება

$y = ax^2 + bx + c$ იგივე $f(x) = ax^2 + bx + c$

ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$, ეწოდება კვადრატული ფუნქცია.

როდესაც $D > 0$ პარაბოლა Ox ღერძს კვეთს ორ წერტილში:	როდესაც $D = 0$ პარაბოლა Ox ღერძს ეხება ერთ წერტილში:	როდესაც $D < 0$ პარაბოლა Ox ღერძს არ კვეთს:
$D = b^2 - 4ac > 0$	$D = b^2 - 4ac = 0$	$D = b^2 - 4ac < 0$

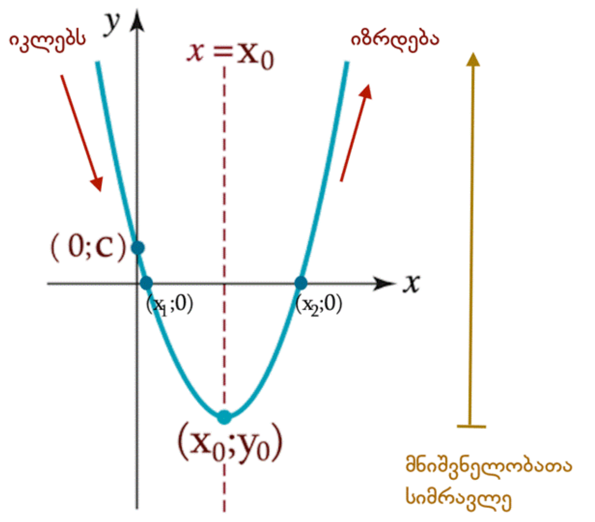


დამატებითი ვიდეო გაკვეთილები ტელესკოლიდან და მასალა EL.ge-დან.	აბიტურიენტების დრო: წრფივი ფუნქცია კვადრატული ფუნქცია კვადრატული ფუნქცია – ნაწილი 2 კვადრატული უტოლობა

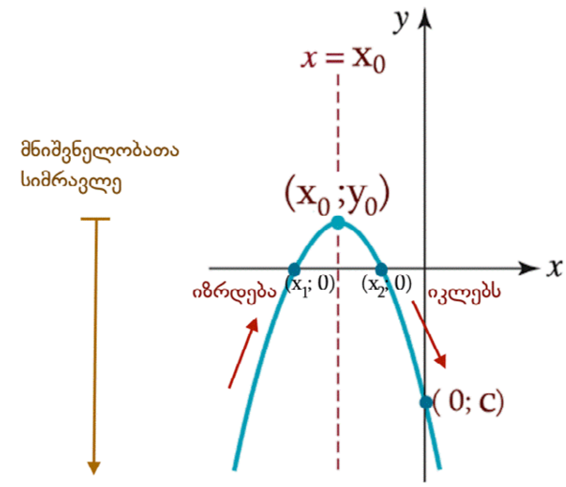
ცოდნის შეჯამება

კვადრატული ფუნქციის განტოლება (ფორმულა) შეიძლება ჩაიწეროს 3 ფორმით:

- $y = ax^2 + bx + c$ სტანდარტული ფორმა.
- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ წვეროს კოორდინატით.
- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ნამრავლის სახით (Ox ღერძთან კვეთის წერტილებით).



$$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$$



$$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$$

- გრაფიკი – პარაბოლა
- $a > 0$ პარაბოლას შტოები მიემართება ზევით
- წვეროს კოორდინატი
- $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0)$
- $x = x_0$-სიმეტრიის ღერძი
- $(x; 0),(x_2;0),(0;c)$

გრაფიკის მიერ ღერძების კვეთის წერტილების კოორდინატები:

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $E(f) = [y_0; +\infty)$
- კლებადობის შუალედი $(-\infty; x_0]$
- ზრდადობის შუალედი $[x_0; +\infty)$
- როდესაც $x < x_1$ და $x > x_2$, მაშინ $y > 0$
- როდესაც $x_1 < x < x_2$, მაშინ $y < 0$

- გრაფიკი – პარაბოლა
- $a < 0$ პარაბოლას შტოები მიემართება ქვევით
- წვეროს კოორდინატი
- $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = f(x_0)$
- $x = x_0$-სიმეტრიის ღერძი
- $(x_1;)\ 0),(x_2;0),(0;c)$

გრაფიკის მიერ ღერძების კვეთის წერტილების კოორდინატები:

- $D(f) = (-\infty; +\infty)$
- $E(f) = (-\infty; y_0]$
- ზრდადობის შუალედი $(-\infty; x_0]$
- კლებადობის შუალედი $[x_0; +\infty)$
- როდესაც $x < x_1$ და $x > x_2$, მაშინ $y < 0$
- როდესაც $x_1 < x < x_2$, მაშინ $y > 0$

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

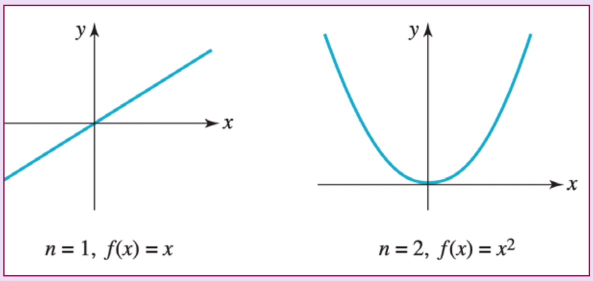
განვიხილოთ სხვადასხვა ფუნქცია და მათი გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით ახალ ფუნქციებს, კერძოდ $y = x^2$, $y = x^3$ და დავინახეთ, რომ გამომდინარე იქიდან, როგორ არის დამოკიდებული y ცვლადი x-ზე, გრაფიკის ფორმა იცვლება. ასევე ვიცით, რომ $y = x^2$ და $f(x) = x^2$ ერთი და იგივე ფუნქციებია (სხვადასხვა აღნიშვნებით).

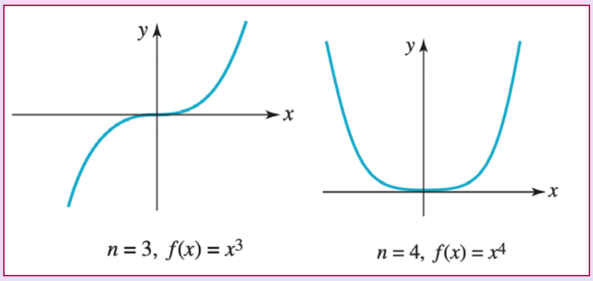
მიმდინარე გაკვეთილში გავეცნოთ $f(x) = x^n$, როდესაც $n = -1; \frac{1}{2}$; 1; 2; 3; 4, ფუნქციებს და მათ გარდაქმნებს.

იხ. გრაფიკები მარჯვენა სვეტში განვიხილოთ ფუნქციების გრაფიკები. გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ იცვლება n, ავაგოთ შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი და დავაკავშიროთ $f(x) = x^n$ ჩანაწერთან.

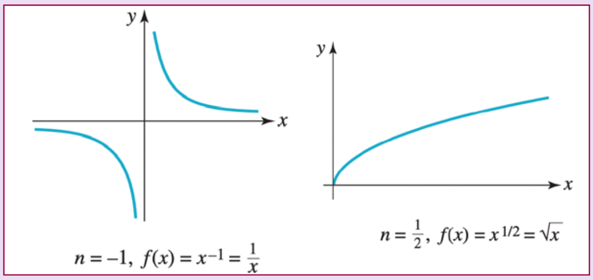
ა) $y = x$ ბ) $y = x^2$



გ) $y = x^3$ დ) $y = x^4$

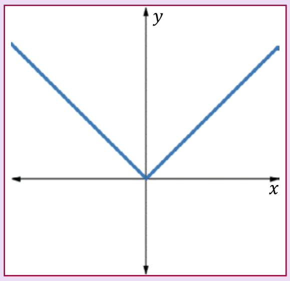


ე) $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ ვ) $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$



განვიხილოთ, ასევე $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი.

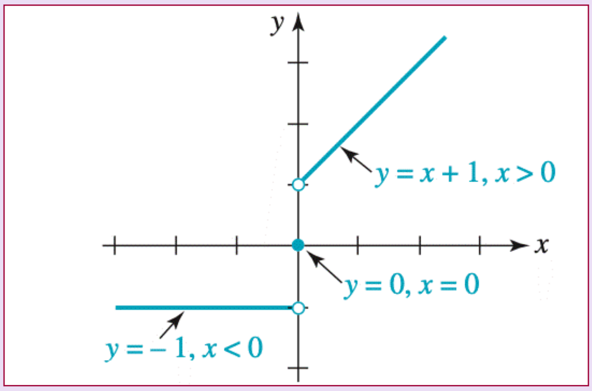
მოდულის შემცველი ფუნქცია $y = |x|$



უბან-უბან განსაზღვრული ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

განსაზღვრის არის სხვადასხვა ინტერვალზე $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია სხვადასხვა წესით.



მითითება:

[ტელესკოლა](#) 11:40-დან იხილეთ, როგორ ხდება ასეთი ფუნქციების აგება.

ფუნქციის კვლევა

ჩვენ უკვე გავეცანით კვადრატული ფუნქციის გარდაქმნებს, ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკზე გარდაქმნების წესი მოქმედებს იმავენაირად.

განვიხილოთ ნებისმიერი $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (სურ.1).

ვთქვათ, მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი:

- გადაიტანეთ გრაფიკი პარალელურად c – ერთეულით Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით (ზემოთ) (იხ.სურათი 2), ან c – ერთეულით ქვემოთ Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (ქვემოთ) (იხ.სურათი 3).
- გადაიტანეთ გრაფიკი პარალელურად c – ერთეულით Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით (მარჯვნივ) (იხ.სურათი 4), ან c – ერთეულით Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით (მარცხნივ) (იხ.სურათი 5).

პარალელური გადატანა

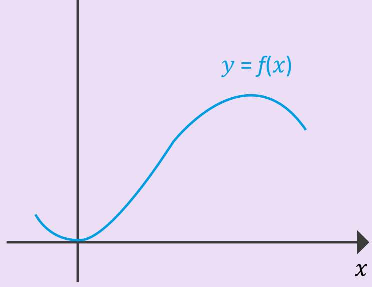
$y = f(x) + c$ (სურ.2,3) გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის მიმართულებით ზევით ან ქვევით, თუ $c > 0$, გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება ზევით c-ერთეულით, ხოლო თუ $c < 0$, გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება ქვემოთ c-ერთეულით.

$y = f(x + c)$ (სურ.4,5) გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ გრაფიკის პარალელური გადატანით Ox ღერძის მიმართულებით მარჯვნივ ან მარცხნივ.

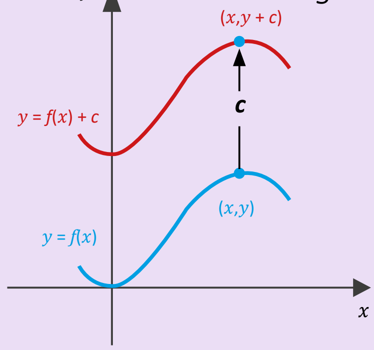
თუ $c > 0$ გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება მარცხნივ c-ერთეულით, თუ $c < 0$ გრაფიკის პარალელური გადატანა მოხდება მარჯვნივ c-ერთეულით.

მითითება: წერტილი გადაინაცვლებს შესაბამისად, თუმცა ფორმულაში c ჩაიწერება მოპირდაპირე ნიშნით.

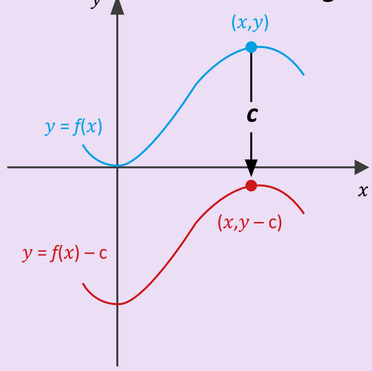
სურათი 1



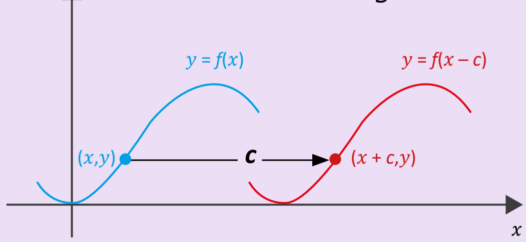
სურათი 2



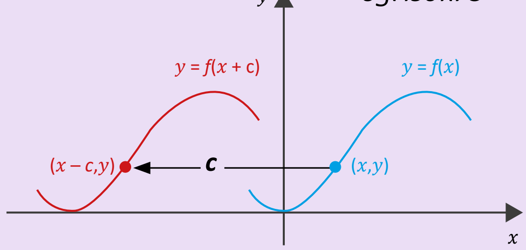
სურათი 3



სურათი 4



სურათი 5

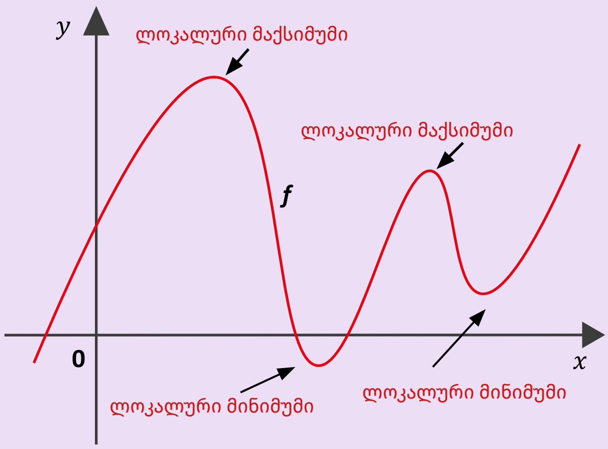


ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები

მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

მითითება:

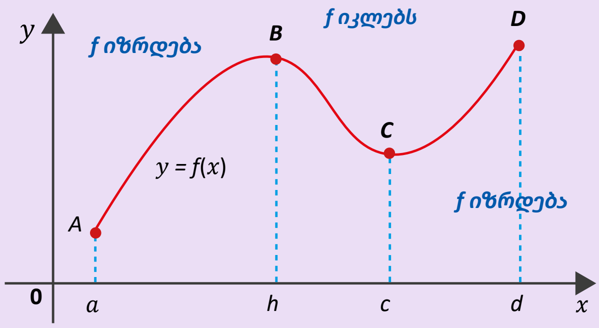
- ამოწერეთ ლოკალური მინიმუმის ან მაქსიმუმის წერტილის კოორდინატები.
- Ox ღერძზე მონიშნეთ ინტერვალები, რომლის მიხედვით შეძლებთ აღწეროთ, რომელ ინტერვალში იზრდება ან იკლებს ფუნქცია.



- როდესაც $x \in (a;b)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება
- როდესაც $x \in (b;c)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება
- როდესაც $x \in (c;d)$, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება

იგივე შეგვიძლია ჩავწეროთ უტოლობის გამოყენებით:

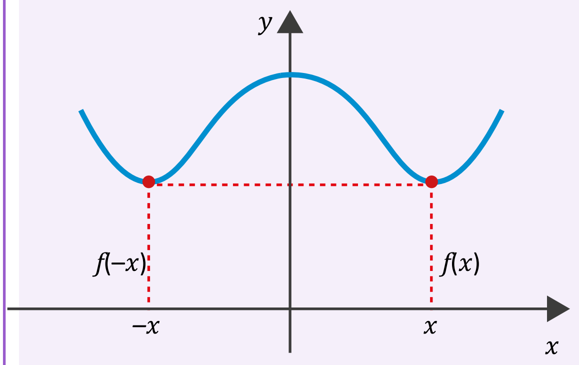
- როდესაც $a < x < b$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება (გრაფიკი მიმართულია ზემოთ)
- როდესაც $b < x < c$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია მცირდება (გრაფიკი მიმართულია ქვემოთ)
- როდესაც $c < x < d$ მაშინ $y = f(x)$ ფუნქცია იზრდება (გრაფიკი მიმართულია ზემოთ)

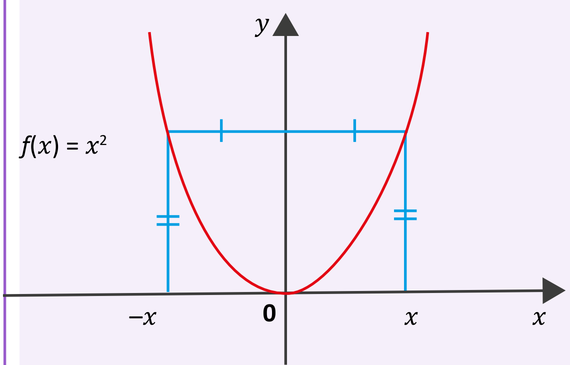


მითითება: ჩაწერეთ თქვენთვის მოსახერხებელი აღნიშვნებით.

ლუწი და კენტი ფუნქციები

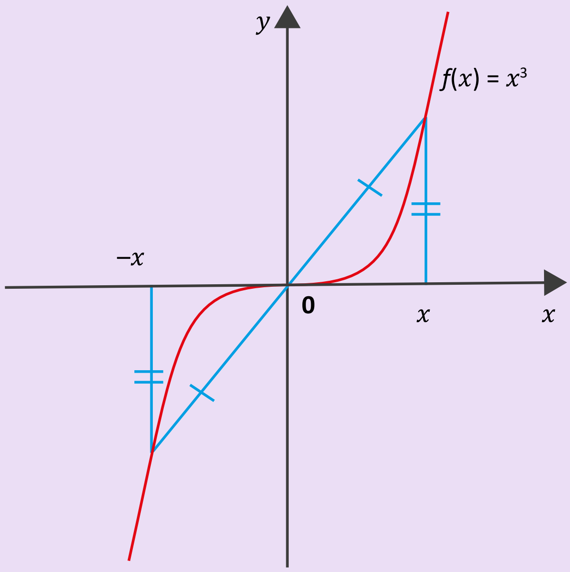
$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიის ღერძია Oy ღერძი.





გრაფიკიდან აღებული ყოველი x და მისი მოპირდაპირე $-x$ წერტილი თანაბრად არის დაშორებული Oy ღერძიდან.

$y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკი სათავის მიმართ სიმეტრიულია:



- თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(x) = f(-x)$ ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია;

  ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ.

- თუ განსაზღვრის არიდან ყოველ x და $-x$ რიცხვები აკმაყოფილებენ პირობას $f(-x) = -f(x)$, ფუნქციას ეწოდება კენტი ფუნქცია.

  კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია სათავის მიმართ.

1. დავადგინოთ $f(x) = x^2 + 2$ ფუნქცია კენტია, ლუწი თუ არცერთი?
   ადვილი შემოწმება: ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 1 და -1
   $f(1) = 1^2 + 2 = 3$; $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ ე.ი. $f(1) = f(-1)$
   ფუნქცია ლუწია
2. დავადგინოთ $f(x) = x^3 - 2x$ ფუნქცია კენტია, ლუწი თუ არცერთი?
   ადვილი შემოწმება: ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 1 და -1
   $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$; $f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 1$
   $f(-1) = -f(1)$ ფუნქცია კენტია

ნიმუში 1

განვიხილოთ უკუპროპორციული ფუნქციის გრაფიკი და მისი გარდაქმნა

ა) განვიხილოთ $y = \frac{1}{x}$ უკუპროპორციულობის ფუნქცია (ნახაზი 1), რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა 0-სა.

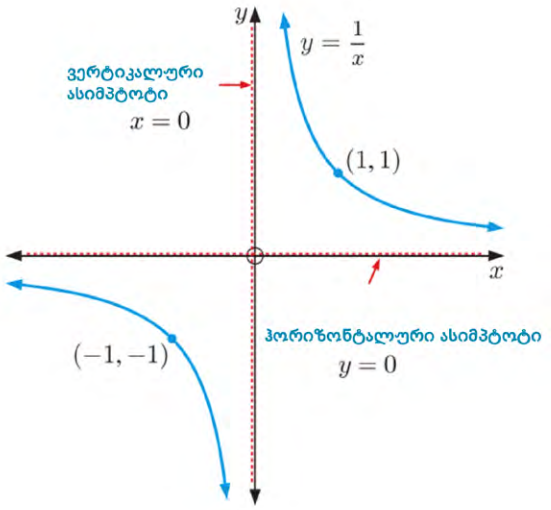
ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

გრაფიკი მდებარეობს I და III მეოთხედებში.

გამომდინარე იქიდან, რომ $x = 0$ – ვის ფუნქცია განსაზღვრული არ არის, გრაფიკი არ კვეთს Oy ღერძს. ანალოგიურად არ კვეთს ფუნქცია Ox ღერძსაც.

ტელესკოლა 8:40-უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

ნახაზი 1



ბ) ავაგოთ $y = \frac{1}{x-1} + 2$ ფუნქციის გრაფიკი.

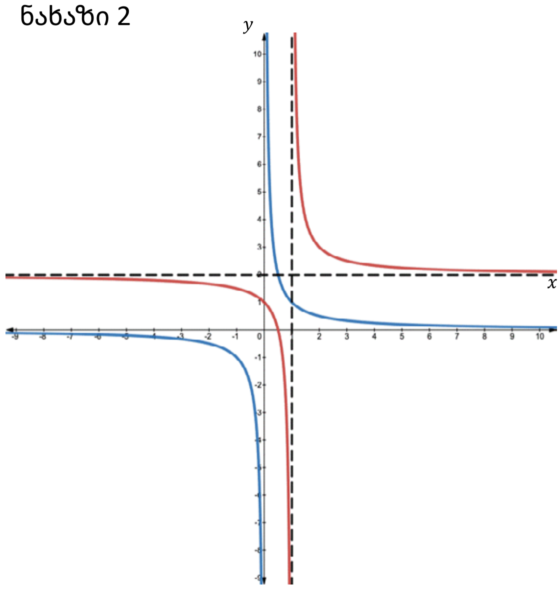
ფუნქციის (ნახაზი 2) განსაზღვრის არეა ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, გარდა 1-სა; $x - 1 \neq 0$.

ე.ი. $x \neq 1$;

მოცემული ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის გასწვრივ 2 ერთეულით ზევით და შემდეგ Ox ღერძის გასწვრივ 1 ერთეულით მარჯვნივ. შესაბამისად მიიღება, რომ $y \neq 2$.

როგორც ხედავთ ასიმპტოტებია ვერტიკალური $x = 1$ წრფე და ჰორიზონტალური $y = 2$ წრფე.

ნახაზი 2



სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. **ინსტრუქცია:** შედით საიტზე Desmos ან Symbolab. ააგეთ გრაფიკები. იმსჯელეთ და აღწერეთ გარდაქმნის წესი ქვემოთ მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის.

მითითება: მას შემდეგ რაც ააგებთ გრაფიკს, შეინახეთ თქვენ მიერ შესრულებული ნახაზი, გადაიტანეთ Word-ის ფაილში და თან დაურთეთ აღწერა. ასევე თითოეული შემთხვევისთვის ამოიწერეთ წვეროს კოორდინატი.

ა) ააგეთ $y=|x|+1$; $y=|x|+4$; $y=|x|-3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ბ) ააგეთ $y=-|x|$; $y=-|x|+2$; $y=-|x|-1$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გ) ააგეთ $y=|x+3|$; $y=|x-1|$; $y=|x+4|-2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=|x|$ ფუნქციის გრაფიკთან.

დ) ააგეთ $y=x^3+3$; $y=x^3+5$; $y=x^3-2$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ე) ააგეთ $y=(x-1)^3$; $y=(x-2)^3$; $y=(x+4)^3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ვ) ააგეთ $y=x^3+4$; $y=(x-1)^3+2$; $y=(x+2)^3-4$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ზ) ააგეთ $y=\sqrt{x}+1$; $y=\sqrt{x}+2$; $y=\sqrt{x}-3$ ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

თ) ააგეთ $y=\sqrt{x-1}$; $y=\sqrt{x-1}+1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, უნდა ვიპოვოთ რა რიცხვებისთვის არსებობს ფესქვეშა გამოსახულება, ანუ უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $x-1\geq 0$.

ი) ააგეთ $y=\sqrt{x+5}$; $y=\sqrt{x+5}+2$; $y=\sqrt{x+5}-4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y=\sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

გამოწვევა: მოცემულ შემთხვევაში დაადგინეთ თითოეული ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე

სავარჯიშოები

მითითება: იმისათვის, რომ დავადგინოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე, უნდა ვიპოვოთ რა რიცხვებისთვის არსებობს ფესვქვეშა გამოსახულება, ანუ უნდა ამოვხსნათ უტოლობა $x + 5 \geq 0$

კ) ააგეთ $y = -x^3 + 1$; $y = -x^3 + 3$; $y = -x^3 - 2$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = -x^3$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ლ) ააგეთ $y = \frac{1}{x} + 1$; $y = \frac{1}{x} + 2$; $y = \frac{1}{x} - 4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

მ) ააგეთ $y = \frac{1}{x+2}$; $y = \frac{1}{x-4}$; $y = \frac{1}{x+5} - 4$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

ნ) ააგეთ $y = -\frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x-4} + 1$. ფუნქციათა გრაფიკები და აღწერეთ წესი, რომელიც დააკავშირებს თითოეულ გრაფიკს $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკთან.

2. დაადგინეთ ლუწია თუ კენტი შემდეგი ფუნქციები:

ა) $f(x) = x^2 - 4$; გ) $f(x) = -2x^2 - 1$; ე) $f(x) = x^3 + 2x$;

ბ) $f(x) = x^2 + 4x$; დ) $f(x) = x^3 + 5$; ვ) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$.

3. დაადგინეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე:

ა) $y = \sqrt{x} + 2$; გ) $y = \sqrt{3 - x} + 2$; ე) $y = \frac{1}{x+3} + 1$;

ბ) $y = \sqrt{x+1} - 3$; დ) $y = \frac{1}{x-2}$; ვ) $y = \frac{1}{5x} - 1$.

4. **გამოწვევა:** ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები:

ა)
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$$

ბ)
$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$

მათემატიკის მოყვარულთათვის

მოცემული თავის ფარგლებში ჩვენ ხშირად განვიხილეთ ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებული იყო მაქსიმალური ფართობის ან მოცულობის პოვნასთან.

განვიხილოთ მოცემული ამოცანის ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი.

გავიხსენოთ ამოცანის პირობა

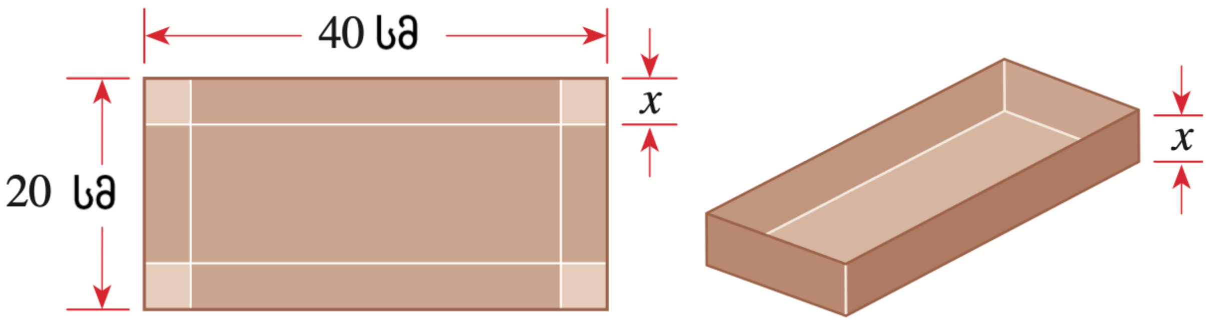
სტუდენტს აქვს მართკუთხედის ფორმის სქელი ფურცელი, რომლის სიგრძე და სიგანე, შესაბამისად, 40 სმ და 20 სმ-ია. მას სურს გააკეთოს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთი, რომელსაც ექნება მაქსიმალური მოცულობა.

სტუდენტმა დაადგინა, რომ თუ გვერდებზე ჩამოაჭრის კვადრატის ფორმის ნაწილს, ასე მიიღებს მაქსიმალური მოცულობის ყუთს.

საკვანძო კითხვა:

რა ზომის კვადრატები უნდა ჩამოჭრას ოთხივე კუთხიდან, რომ მისგან დამზადდეს მაქსიმალური ტევადობის თავღია ყუთის ფორმის საცავი?

[იხილეთ სიმულაცია]



მსჯელობა:

დავუშვათ, მართკუთხედის ფორმის ფურცელს უნდა ჩამოჭრას x სმ-გვერდის მქონე კვადრატი, რის შემდეგაც მართკუთხედის სიგრძე და სიგანე გახდება შემდეგი:

მართკუთხედის სიგრძე – $(40 - 2x)$

მართკუთხედის სიგანე – $(20 - 2x)$

მას შემდეგ რაც გავაკეთებთ ყუთს, ყუთის სიმაღლე იქნება x სმ-ის ტოლი, ხოლო ყუთის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$V = 2x(40 - 2x)(20 - 2x) = 8x^3 - 240x^2 + 1600x$

შევიდეთ ვებგვერდზე 🔗 Desmos და ავაგოთ გრაფიკი.

განვიხილოთ ნახ 1:

$y = 2x(40 - 2x)(20 - 2x)$ ფუნქციის აგების შემდეგ მივიღებთ კუბური ფუნქციის გრაფიკს, რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე მოცულობა ვერ იქნება უარყოფითი და მართკუთხედს ვერ ჩამოვაჭრით გვერდს, რომელიც მეტია ან ტოლი 10-ის:

$$20 - 2x > 0$$
$$-2x > -20$$
$$x < 10$$

რადგან გვერდს ვერ ჩამოვაჭრით მასზე დიდ მონაკვეთს. შესაბამისად, ჩვენ მიერ განხილული ფუნქციის განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს (0;10) (დაზუსტება – იხ. ნახაზი 2).

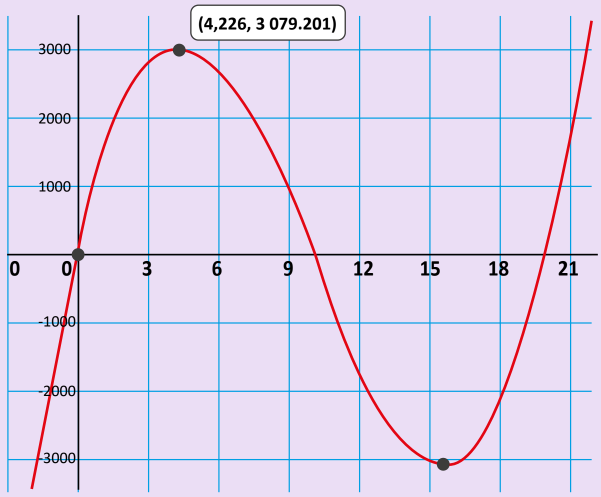
აღნიშნულ გრაფიკზე, ყოველი წერტილის კოორდინატები შეესაბამება ინფორმაციას:

(კვადრატის გვერდი, მოცულობა)

რადგან *Ox* ღერძს შეესაბამებოდა კვადრატის გვერდის სიგრძე, ხოლო *Oy* ღერძს მოცულობა.

გრაფიკიდან გამომდინარე, მისი ექსტრემუმის წერტილია (4.226; 3079.201) ე.ი. როდესაც ჩამოჭრილი კვადრატის გვერდი იქნება დაახლოებით 4.226 სმ-ის ტოლი, მიღებული ყუთის მოცულობა იქნება 3079.201 სმ^3.

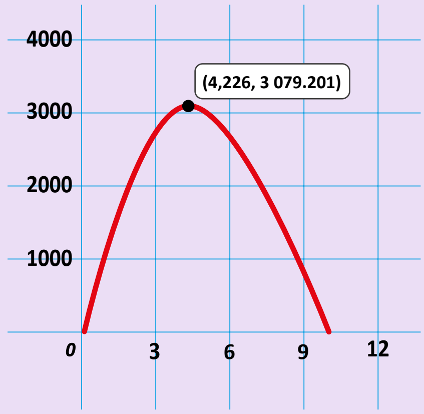
ნახაზი 1



$y = 2x(40 - 2x)(20 - 2x)$, რომლის განსაზღვრის არეა ინტერვალი (0;10)

$0 < x < 10$

ნახაზი 2



კანონზომიერების აღმოჩენა და ფორმულირება*

მათემატიკაში მნიშვნელოვანია კანონზომიერების აღმოჩენა და მისი ფორმულირება, როდესაც მოცემულია ფუნქცია ფორმულით, თანამედროვეობაში ტექნოლოგიების დახმარებით მარტივდება ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკის აგება, რაც ათწლეულების წინ გამოწვევას წარმოადგენდა

როდესაც მეცნიერები აკვირდებიან რაიმე მოვლენას, ისინი აგროვებენ მონაცემებს. მონაცემების ანალიზის დროს უმნიშვნელოვანესია მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების დადგენა. თუ მკვლევრებმა მოახერხეს და შეძლეს კანონზომიერების აღმოჩენა და ფორმულირება, შემდეგ შესაძლებელი ხდება გარკვეული პროგნოზების გაკეთება.