პროფესიული
უნარების
სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

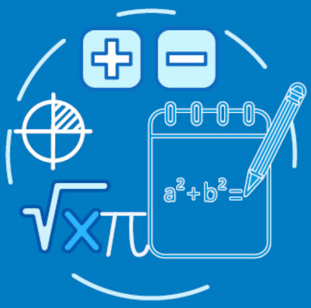
Swiss Agency for Development
and Cooperation SDC

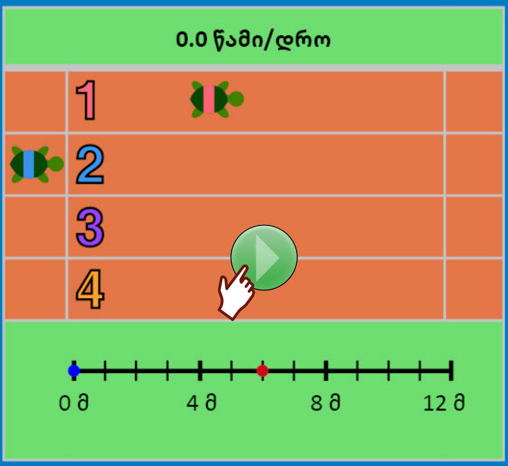
პროფესიული
უნარების
სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

IV. დავალების წარდგენა





ასევე გაეცანით დამხმარე ვიდეო გაკვეთილებს,დამხმარე სასწავლო რესურსებს:

www.math.ge

კომპლექსური დავალება

მარათონი – მოძრაობის აღწერა

დავალების და ახალი სასწავლო ერთეულის დაწყებამდე, დაფიქრდით და უპასუხეთ კითხვებს: – როგორ ფიქრობთ, რაზეა დამოკიდებული მოძრაობა? რა იწვევს მოძრაობას? – გამოთქვით ვარაუდი, ან ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზა: შეიძლება თუ არა მოძრაობის აღმწერი რაიმე ფორმულის, განტოლების ჩაწერა? – რას აქცევთ მოძრაობისას ყურადღებას, რა შეიძლება იყოს მოძრაობის აღმწერი ცვლადები?

დავალების შესრულებისას ჩვენ განვიხილავთ მოძრაობას სარბენ ბილიკზე, მარათონს. იმისათვის რომ დავალება მეტად აღქმადი და სახალისო იყოს, განვიხილოთ მორბენალი რამოდენიმე კუს შემთხვევა. დავალება იხილეთ ➡ **ბმულზე**

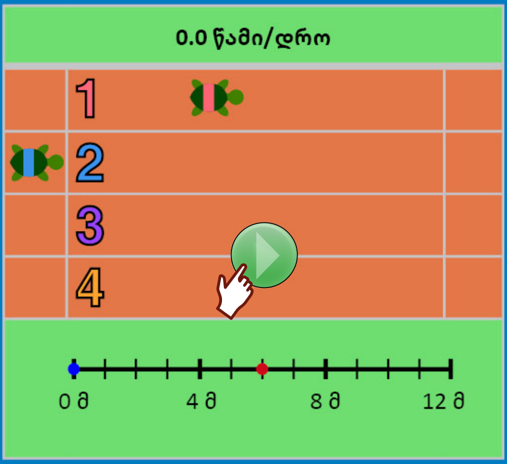
თქვენი დავალება

ჩვენ განვიხილავთ მოძრაობას სარბენ ბილიკზე, მარათონს. იმისათვის, რომ დავალება მეტად აღქმადი და სახალისო იყოს, განვიხილოთ მორბენალი რამოდენიმე კუს შემთხვევა. იხილეთ დავალება ბმულზე:

- უყურეთ სარბენ ბილიკზე მორბენალ რამდენიმე კუს და უპასუხეთ დავალებაში მოცემულ კითხვებს თანმიმდევრულად:
- ამოიწერეთ ინფორმაცია რა დროში რამდენ მეტრს გარბის თითოეული კუ.
- ინფორმაცია გამოსახეთ ცხრილით და აღწერეთ სიტუაცია ფორმულით; გააანალიზეთ როგორ არის დაკავშირებული განვლილი მანძილი დროსთან. (დავუშვათ თითოეული კუ მოძრაობს თანაბრად).
- წარმოდგინეთ მონაცემები საკოორდინატო სიბრტყეზე, გამოიკვლიეთ რისი ფორმა აქვს გრაფიკს.
- შეადარეთ თითოეული კუს სიჩქარე როგორც გრაფიკზე წარმოდგენილი ინფორმაციით, ასევე ფორმულით.

IV. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება



ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, ან შექმენით მსგავსი დავალება:

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

I. როგორ შეიძლება მოძრაობის აღწერა? როგორ შეიძლება მოძრაობის მათემატიკური მოდელის შექმნა?

II. როგორ ააგეთ კუს მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი? რომელი სიდიდე შეუსაბამეთ Ox ღერძს და რა Oy ღერძს? რომელია დამოუკიდებელი და რომელი დამოკიდებული ცვლადი?

III. თუ ორი კუს მოძრაობას აღვწერთ გრაფიკებით, როგორ შეგვიძლია დავადგინოთ რომელი კუ მოძრაობდა უფრო სწრაფად? პასუხი დაასაბუთეთ.

IV. თუ ერთმა კუმ დაიწყო მოძრაობა მეორე კუზე ადრე, რის მიხედვით შეგიძლიათ დაადგინოთ რა დროის შემდეგ შეძლებს დაწევას? რა უნდა გააკეთოს მეორე კუმ რომ დაეწიოს?

V. რეალურ ცხოვრებაში რა ტიპის მოძრაობის აღწერა შეგიძლიათ?

თემა 3. ფუნქცია, გრაფიკი, წრფივი ფუნქცია

ეს საინტერესოა!

აშშ-ს გლობალური სანავიგაციო სატელიტური სისტემა, რომელიც შედგება 28-32 სატელიტისაგან, გამოიყენება ადგილმდებარეობის განსაზღვრისათვის. მუშაობს ნებისმიერ ამინდში და მსოფლიოს ნებისმიერი ადგილის შესახებ შეუძლია ინფორმაციის მოწოდება.

სატელიტებიდან მოწოდებული ინფორმაციით დგება ქალაქის გეგმა.

3.1. საკოორდინატო სიბრტყე, კოორდინატი

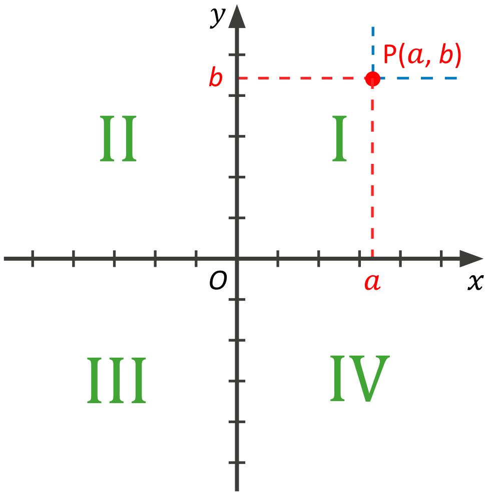
ყველას გვინახავს კომპასი და მასზე აღნიშნული მიმართულებები, ჩრდილოეთი, სამხრეთი, აღმოსავლეთი, დასავლეთი.

ვიცით, კახეთი აღმოსავლეთ საქართველოს ნაწილია, დასავლეთით არის იმერეთი, ჩრდილოეთით სვანეთი და ა.შ.

მოვახდინოთ კომპასისა და გეოგრაფიის მათემატიკური მოდელირება. უფრო გასაგებად რომ აღვწეროთ მათემატიკურად, დაგვჭირდებაა **საკოორდინატო სიბრტყე.**

ტერმინები

- **საკოორდინატო სიბრტყე –** შედგება ორი მართი კუთხით გადაკვეთილი წრფისაგან, რომელიც სიბრტყეს 4 ნაწილად ყოფენ, თითოეულ ნაწილს ჰქვია **მეოთხედი**.
- ორ წრფეს – **ღერძები**.
- ჰორიზონტალურ წრფეს ჰქვია – **Ox ღერძი.**
- ვერტიკალურ წრფეს – **Oy ღერძი.**
- წრფეების გადაკვეთის წერტილს კი **სათავე**.



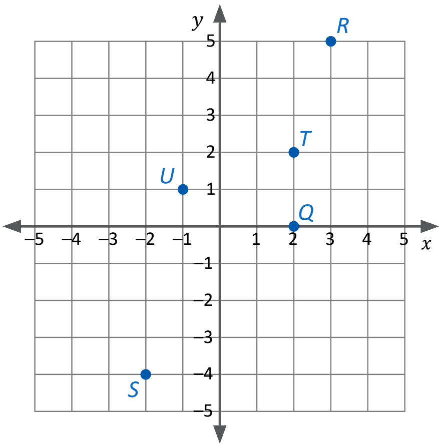
სიბრტყეზე მოცემულია A წერტილი კოორდინატებით (a,b)

- სათავიდან Ox ღერძის მიმართულებით მარჯვნივ აღინიშნება დადებითი რიცხვით.
- სათავიდან Ox ღერძის მიმართულებით მარცხნივ აღინიშნება უარყოფითი რიცხვით.
- სათავიდან Oy ღერძის ზემოთ – დადებითი რიცხვით.
- სათავიდან Oy ღერძის ქვემოთ უარყოფითი რიცხვით.
- წერტილისთვის სიბრტყეზე გვჭირდება ორი მონაცემი, ერთი – Ox ღერძისთვის, მეორე Oy ღერძისთვის. ე.ი გვჭირდება $(x;y)$ წყვილი ინფორმაცია
- **მოკლედ ამბობენ** $(x;y)$ **–კოორდინატები** ან $(x;y)$
- **წყვილი სათავე აღინიშნება წერტილით** (0; 0)

ნიმუში 1 – დაადგინეთ წერტილის კოორდინატები და შესაბამისი მეოთხედები:

$U(-1;\ 1)$ – II მეოთხედი
$S(-2;\ -4)$ – III მეოთხედი
$R(3;\ 5)$ – I მეოთხედი
$T(2;\ 2)$ – I მეოთხედი
$Q(2;\ 0)$ – x ღერძი

თუ წერტილი მდებარეობს x ღერძზე, მისი y კოორდინატი 0-ია და წერტილის კოორდინატი ჩაიწერება როგორც $(x;0)$. თუ წერტილი მდებარეობს y ღერძზე, მისი x კოორდინატი 0-ია და წერტილის კოორდინატი ჩაიწერება როგორც $(0;\ y)$



თუ ორი წერტილი $(x_1;\ y_1)$ $(x_2;\ y_2)$, მდებარეობს y ღერძის პარალელურ წრფეზე, მაშინ მათ შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $|y_2 - y_1|$

თუ ორი წერტილი $(x_1;\ y_1)$ $(x_2;\ y_2)$, მდებარეობს x ღერძის პარალელურ წრფეზე, მაშინ მათ შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით: $|y_2 - y_1|$

ნიმუში 2 – მანძილი ორ წერტილს შორის

S,U წეტილები x ღერძის პარალელურ წრფეზეა

$U(-1;\ 1),\ S(-4;\ 1)$

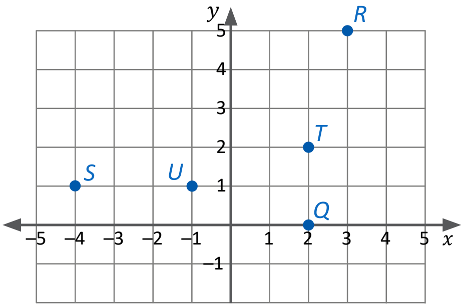
$SU = |-4-(-1)|=|-3|= 3$

$T;\ Q$ წერტილები y ღერძის პარალელურ წრფეზე

$T(2;\ 2),\ Q(2;\ 0)$

$TQ = |\ 0-2|$ ან $|2-0|=2$

რადგან მონაკვეთის სიგრძე დადებითი რიცხვია, ვპოულობთ კოორდინატების სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას (მოდულს).

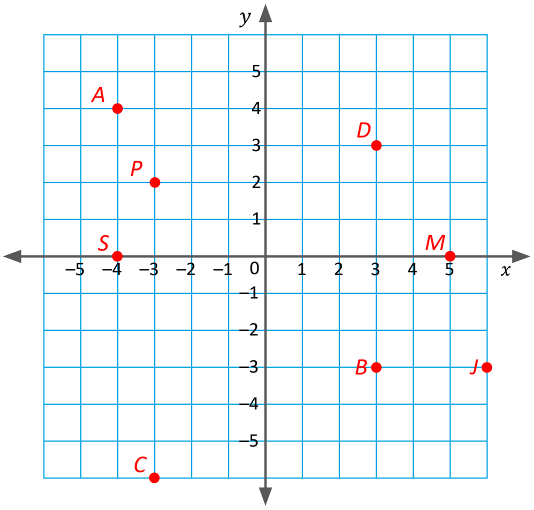


სავარჯიშოები

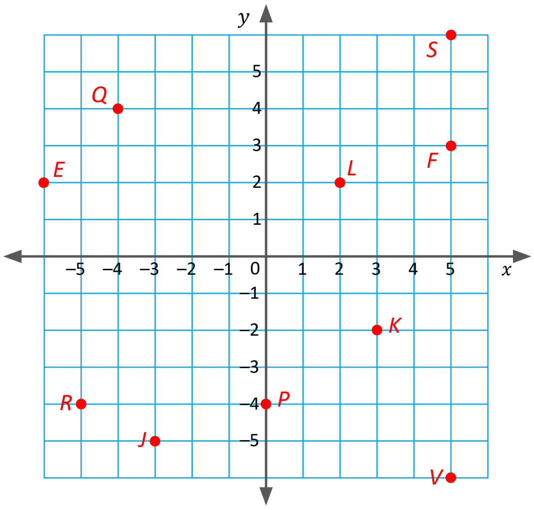
1. საკოორდინატო სიბრტყეზე მონიშნეთ შემდეგი წერტილები:

A(3; 5); B(–1; 3); C(0.4); D(–2; –5).

2. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ თითოეული წერტილის კოორდინატები:



3. ნახაზის მიხედვით ამოწერეთ თითოეული წერტილის კოორდინატები:



4. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი ა) A(5;2) და ბ) B(–3;2)

I. იპოვეთ მანძილი ამ ორ წერტილს შორის

II. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ ორ წერტილზე?

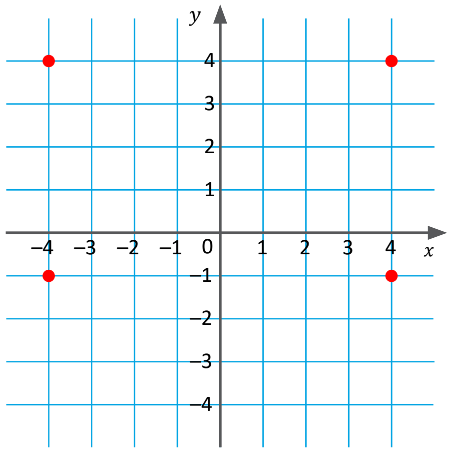
5. სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი M(5; 4) N(5:–3)

I. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის

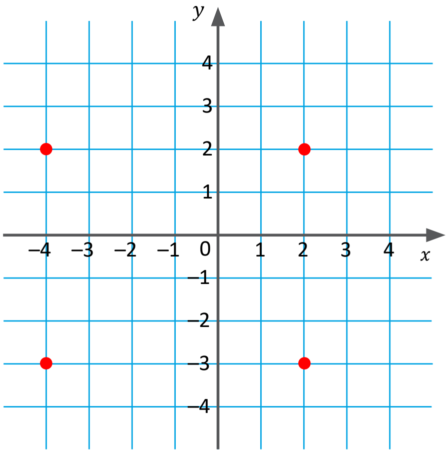
II. რა შეგიძლიათ თქვათ ამ ორ წერტილზე?

დაფიქრდით: თუ ორ წერტილს ერთნაირი X კოორდინატი აქვს და სხვადასხვა Y კოორდინატი, როგორი მდებარეობა აქვთ სიბრტყეზე ამ წერტილებს და დამატებით რისი თქმა შეგიძლიათ?

6. შეაერთეთ მოცემული 4 წერტილი და გამოიანგარიშეთ ფიგურის პერიმეტრი:



7. შეაერთეთ მოცემული 4 წერტილი და გამოიანგარიშეთ ფიგურის პერიმეტრი.



სავარჯიშოები

8. დახაზეთ სამკუთხედი, რომლის წვეროს კოორდინატები იქნება: T(–4;3); K(-2;–1) L(4;5) მოიფიქრეთ ამოცანა სადაც შეძლებთ კომპასის და საკოორდინატო სიბრტყის გამოყენებას.

9. იპოვეთ მანძილი შემდეგ ორ წერტილს შორის:

ა) M(–5;4) N(–10;4);
ბ) A(4;–7) B (–8;-7);
გ) T(0;–3) K(0;5);
დ) M(-5;–6) N(7;–6).

10. იპოვეთ წერტილი, (8;–4) წერტილიდან 5 ერთეულით მარჯვნივ და 4 ერთეულის ზემოთ.

11. იპოვეთ წერტილი, (–5.5; –2.5) წერტილიდან 3 ერთეულით მარცხნივ და 2 ერთეულით დაბლა.

12. სიბრტყეზე წერტილი გადაადგილდა 5 ერთეულით მარცხნივ, 4 ერთეულით ზემოთ და მისი კოორდინატებია (–7; 6). რა იყო წერტილის კოორდინატი გადაადგილებამდე?

13. სიბრტყეზე წერტილი გადაადგილდა 6 ერთეულით მარჯვნივ, 3 ერთეულით დაბლა და მისი კოორდინატებია (–5.5 ; 6.5). რა იყო წერტილის კოორდინატი გადაადგილებამდე?

14. ორ წერტილს შორს მანძილი სიბრტყეზე 10 ერთეულია, იპოვეთ მეორე წერტილის კოორდინატები, თუ პირველი წერტილის კოორდინატებია (7;3) და ვიცით, რომ ეს ორი წერტილი მდებარეობს x ღერძის პარალელურ წრფეზე. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

15. ორ წერტილს შორის მანძილი 8 ერთეულია, იპოვეთ მეორე წერტილის კოორდინატები, თუ ვიცით პირველი წერტილის კოორდინატებია (–2.5;–1.5) და ორივე მდებარეობს y ღერძის პარალელურ წრფეზე. (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

გამოწვევა:

16. მოცემულია შემდეგი წერტილები A(–2; –4),B(5; –4), C(5; 3), D(–2; 3), გადაიტანეთ წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე, შეაერთეთ და იპოვეთ მიღებული ფიგურის პერიმეტრი.

17. **იმსჯელეთ:** რატომ არის სათავის კოორდინატები (0; 0)-ის ტოლი?

18. **იპოვეთ შეცდომა:** სტუდენტს უნდოდა სიბრტყეზე მოეძებნა წერტილი (–5; 3), რისთვისაც მან სათავიდან გადაზომა 5 ერთეული მარჯვნივ და 3 ერთეული ზემოთ. რა შეცდომა დაუშვა სტუდენტმა?

რეალური სიტუაციის მოდელირება:

19. **შეადგინეთ გეგმა.** ერთი და იმავე ადგილიდან, ველოსიპედებით სხვადასხვა მიმართულებით გავიდნენ ქეთი, ლანა და ირაკლი. ქეთიმ გაიარა აღმოსავლეთის მიმართულებით 5კმ, შემდეგ სამხრეთის მიმართულებით 4 კმ. ლანამ – დასავლეთის მიმართულებით 6 კმ, სამხრეთის მიმართულებით – 4 კმ. ირაკლიმ ჯერ ჩრდილოეთის მიმართულებით – 7კმ, აღმოსავლეთის მიმართულებით – 3 კმ.

ა) იპოვეთ თითოეული მეგობრის კოორდინატი სიბრტყეზე

ბ) შეგიძლიათ იპოვოთ მანძილი რომელიმე ორ მეგობარს შორის?

3.2. ᲒᲠᲐᲤᲘᲙᲘ

ციფრული მედია, სატელევიზიო საშუალებები, გაზეთები და ტელეგადაცემები ინფორმაციის გადმოსაცემად ხშირად იყენებენ გრაფიკებს, ცხრილებს, დიაგრამებს.

როდესაც ორ სიდიდეს შორის არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი დამოკიდებულება, ან ორი სიდიდე დაკავშირებულია ერთმანეთთან, აღნიშნული დამოკიდებულება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რამდენიმე სახით: სიტყვიერად, ცხრილის სახით, ანალიზურად (ფორმულა) ან გრაფიკის მეშვეობით.

? ᲡᲐᲙᲕᲐᲜᲫᲝ ᲙᲘᲗᲮᲕᲐ:

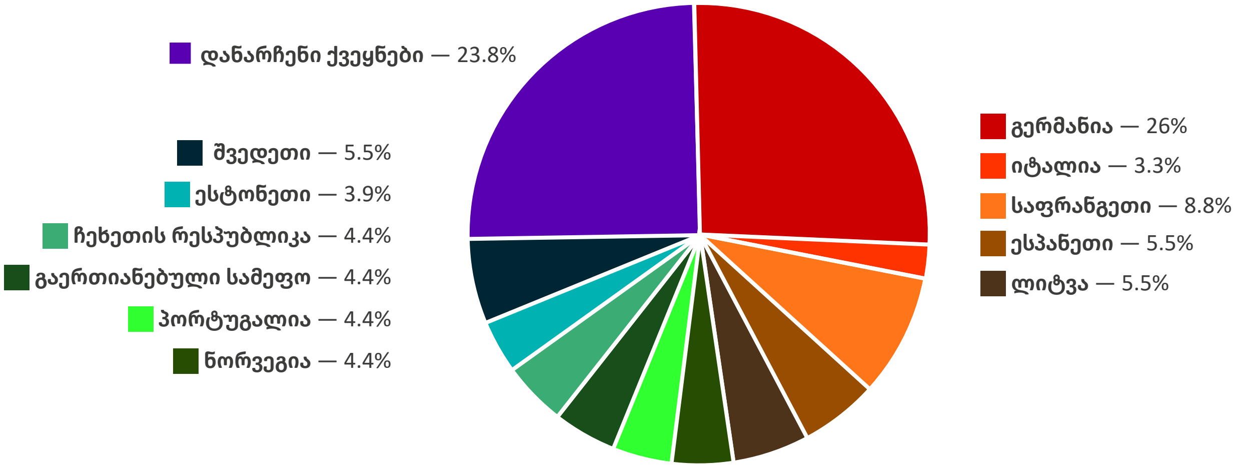
- *რა არის გრაფიკი? დიაგრამა?*

დიაგრამა წარმოადგენს სქემას, ნახაზს, ნახატს, რომლითაც მოცემულია გარკვეული ინფორმაცია.

გრაფიკი დიაგრამის ერთ-ერთი ფორმაა, რომელიც გვიჩვენებს ორ სხვადასხვა სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულებას. არსებობს სხვადასხვა ფორმის დიაგრამები და გრაფიკები.

ქვემოთ მოცემული წრიული დიაგრამა, გვაჩვენებს 2020/2021 სასწავლო წელს საზღვარგარეთ სასწავლებლად გაგზავნილი სტუდენტების რაოდენობას ქვეყნების მიხედვით.

ᲡᲐᲖᲦᲕᲐᲠᲒᲐᲠᲔᲗ ᲡᲐᲡᲬᲐᲕᲚᲔᲑᲚᲐᲓ ᲒᲐᲒᲖᲐᲕᲜᲘᲚᲘ ᲡᲢᲣᲓᲔᲜᲢᲔᲑᲘ ᲥᲕᲔᲧᲜᲔᲑᲘᲡ ᲛᲘᲮᲔᲓᲕᲘᲗ (%), 2020/2021 ᲡᲐᲡᲬᲐᲕᲚᲝ ᲬᲚᲘᲡ ᲓᲐᲡᲐᲬᲧᲘᲡᲘᲡᲗᲕᲘᲡ



თქვენი აზრით, წრიული დიაგრამის მიხედვით, რომელ ქვეყანაში გაგზავნეს ყველაზე მეტი სტუდენტი სასწავლებლად?

როგორ აიგო დიაგრამა?

100 % შეესაბამება საზღვარგარეთ წასული მოსწავლეების სრულ რაოდენობას. დაანგარიშებულია თითოეულ ქვეყანაში წასული მოსწავლეები საერთო მოსწავლეების რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ; წრე შეესაბამება 100%-ს, აღნიშნული მონაცემები გადატანილია წრეზე. ინფორმაცია აღებულია საქართველოს სტატისტიკის ეროვნული სააგენტოს ვებ-გვერდიდან 🔗 Juniors.Geostat.Ge

ინფორმაციასა და სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოსადგენად სიტუაციიდან გამომდინარე იყენებენ სხვადასხვა ტიპის გრაფიკებს და დიაგრამებს. გავეცნოთ რამდენიმე მათგანს და ვიმსჯელოთ გრაფიკის აგების გზებზე.

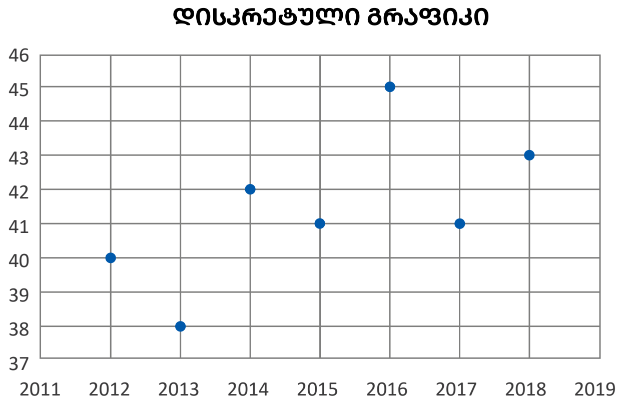
ნიმუში 1 – დისკრეტული გრაფიკი

2018 წლის ზაფხულში საქართველოში დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა – 43°C, როგორც ვიცით 2016 წლის ზაფხული უფრო ცხელი იყო.

ქვემოთ, ცხრილში მოცემულია ინფორმაცია, საქართველოში 7 წლის ყველაზე ცხელი დღეების შესახებ. ცხრილის ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია წლები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე კი წლის შესაბამისი მაქსიმალური ტემპერატურა.

წელი	ტემპერატურა
2012	40
2013	38
2014	42
2015	41
2016	45
2017	41
2018	43

დავაწყვილოთ მონაცემები (წელი; ტემპერატურა), საკოორდინატო სიბრტყეზე x-ღერძზე გადავზომოთ წლები, y ღერძზე კი ტემპერატურა. შემდეგ ჩვენ მიერ დაწყვილებულ ინფორმაციას შევუსაბამოთ წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე.



ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (წელი, ტემპერატურა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ დისკრეტული – წყვეტილი გრაფიკი.

ᲜᲘᲛᲣᲨᲘ 2 – უწყვეტი გრაფიკი

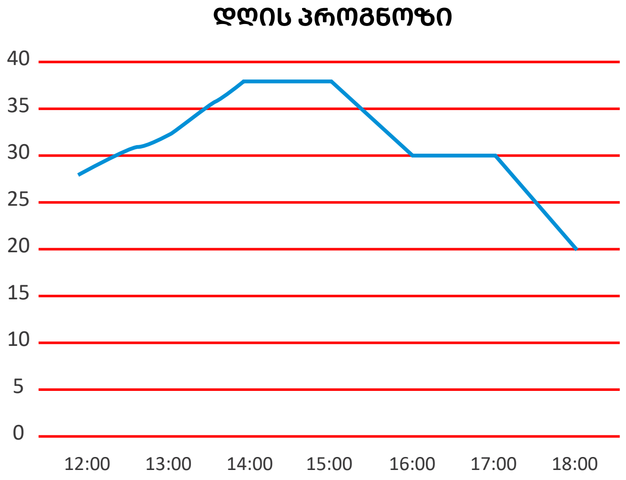
მობილურის აპლიკაციით ჩვენ შეგვიძლია ამინდის ყოველდღიური ან ყოველკვირეული პროგნოზის შემოწმება, ასევე შეგვიძლია საათობრივი პროგნოზის ნახვა.

განვიხილოთ დღის პროგნოზი:

ᲡᲐᲐᲗᲘ	ᲢᲔᲛᲞᲔᲠᲐᲢᲣᲠᲐ
12:00	28
13:00	32
14:00	38
15:00	38
16:00	30
17:00	30
18:00	20

გვაქვს ორი სხვადასხვა ტიპის ინფორმაცია, საათები და თითოეული საათისთვის შესაბამისი ტემპერატურა:

(სთ ; ტემპერატურა)



თუ ჩავთვლით რომ ტემპერატურა თანაბრად იზრდებოდა, შეგვიძლია შევაერთოთ წერტილები სიბრტყეზე და ვივარაუდოთ 12:00-დან 13:00 სთ-მდე შუალედში რა იქნებოდა ტემპერატურა ყოველი წუთისთვის.

გრაფიკის მიხედვით ვხედავთ, რომ დღის განმავლობაში ტემპერატურა იზრდებოდა, 14:00 დან 15:00-მდე და ტემპერატურა იყო მუდმივი. 15:00-დან დაიწყო კლება, 16:00-დან 17:00 სთ-მდე ისევ მუდმივი იყო, 17:00-დან კი დაიწყო კლება. შუადღისას დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა, დაახლოებით 38 გრადუსი.

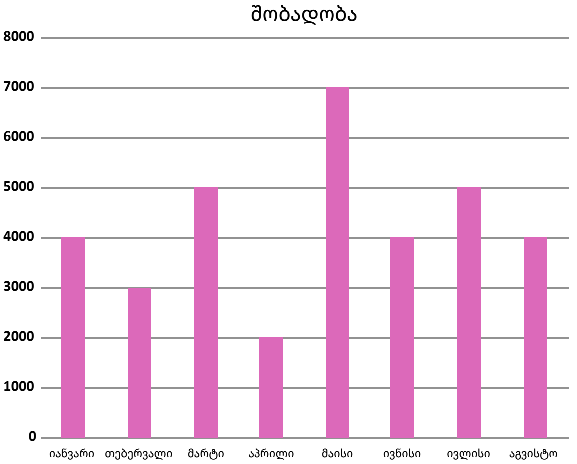
ᲜᲘᲛᲣᲨᲘ 3 – დიაგრამა (სვეტოვანი დიაგრამა)

ცხრილით მოცემული ინფორმაცია, გვიჩვენებს თუ რამდენი ახალშობილი დაიბადა თვეების მიხედვით.

თვე	შობადობა
იანვ	4000
თებ	3000
მარტი	5000
აპრ	2000
მაისი	7000
ინვ	3000
ივლ	5000
აგვ	4000

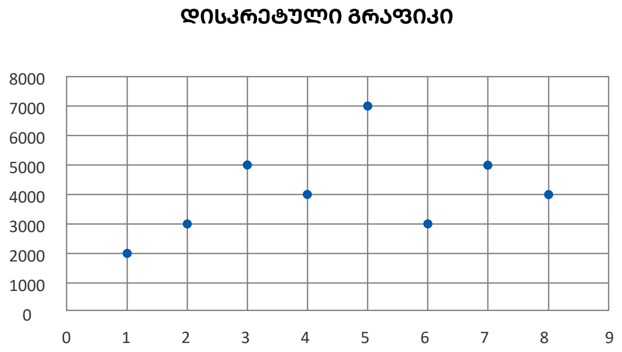
იმისათვის, რომ ინფორმაცია მეტად თვალსაჩინოდ იყოს მოწოდებული, ინფორმაცია წარმოვადგინოთ დიაგრამის მეშვეობით. კერძოს, სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით.

ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავიტანოთ თვეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადავიტანოთ რაოდენობები (ერთეულოვან მონაკვეთად ავიღოთ 1000).



ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (თვე, შობადობა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ **გრაფიკი**, გრაფიკის ფორმას ეწოდება **დიაგრამა** (სვეტოვანი დიაგრამა)

აღნიშნული სიტუაცია შეიძლება აღვწეროთ ასევე დისკრეტული გრაფიკით



როგორც ხედავთ, გრაფიკებით და დიაგრამებით შესაძლებელია ინფორმაციის თვალსაჩინოდ წარმოდგენა. ამისათვის საჭიროა ინფორმაციაში გამოვყოთ მონაცემები, დავადგინოთ მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი, შემდეგ ავაგოთ გრაფიკები ან დიაგრამები.

ᲡᲐᲓᲘᲡᲙᲣᲡᲘᲝ ᲙᲘᲗᲮᲕᲔᲑᲘ:

- მოცემულ დიაგრამებზე რატომ არ შეესაბამება სათავეს ყოველთვის წერტილი (0;0)?
- რატომ არის შესაძლებელი საკოორდინატო სიბრტყეზე საკოორდინატო ღერძებზე სხვადასხვა მასშტაბით ერთეულოვანი მონაკვეთის გადაზომვა?

სავარჯიშოები

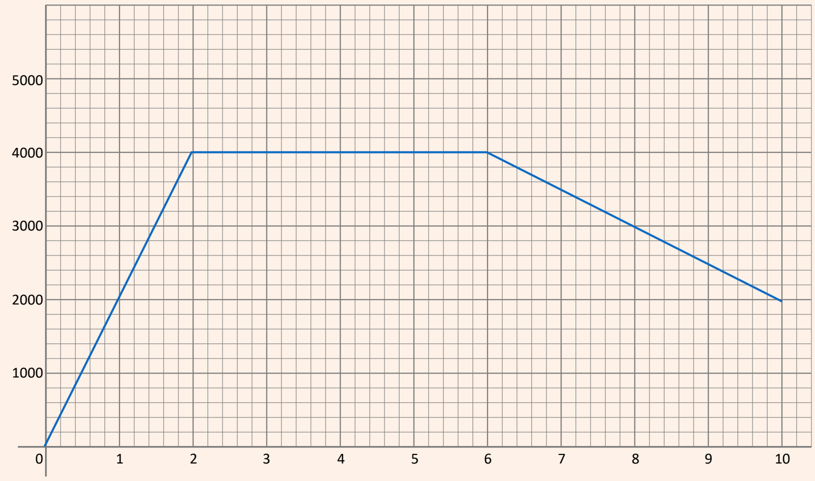
1. დღის 10:00 საათიდან 12:00 საათამდე ტემპერატურა გაიზარდა 20-გრადუსიდან 25 გრადუსამდე, 12:00 საათიდან 14:00 საათამდე 25-დან 30 გრადუსამდე, შემდეგ 3 სთ ტემპერატურა იყო იგივე. გრაფიკზე აღწერეთ მოცემული სიტუაცია.

2. გიორგი გავიდა სახლიდან და 3 სთ-ში გაიარა 5 კმ, შემდეგ გაჩერდა და ისვენებდა 2სთ. დასვენების შემდეგ განაგრძო გზა და გაიარა 4 კმ. დახატეთ გრაფიკი რომელიც აღწერს სიტუაციას.

3. ერთი მანქანა მოძრაობდა და ყოველ წთ-ში გადიოდა 2 კმ-ს, მეორე ყოველ წთ-ში 4 კმ-ს. დახაზეთ ორივე მანქანის მოძრაობის გრაფიკი ერთ სიბრტყეზე.

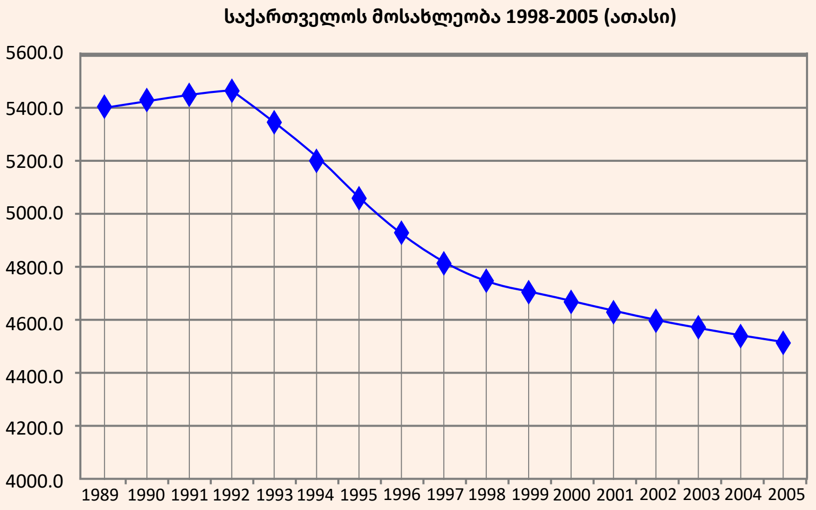
4. ნახაზზე მოცემულია სახლიდან გასული ადამიანის სახლიდან მისი დაშორების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია საათები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე მეტრები.

- იპოვეთ სიჩქარე გზის თითოეულ უბანზე;
- დროის რა მონაკვეთში იყო მანქანა გაჩერებული? დაასაბუთეთ.



5. მოცემულია საქართველოს დემოგრაფიული მდგომარეობის აღმწერი გრაფიკი. ამ გრაფიკის მიხედვით გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

- რომელ წლებში იზრდებოდა საქართველოს მოსახლეობა და რამდენით? (დაახლოებით)
- რომელი წლიდან დაიწყო მოსახლეობის რაოდენობამ კლება?
- რამდენი ადამიანი ცხოვრობდა საქართველოში 1989 წელს? 1997 წელს? 2002 წელს?
- რომელ წელს იყო საქართველოს მოსახლეობა ყველაზე მეტი? ყველაზე ნაკლები? რამდენი იყო მოსახლეობა ამ წლებში?



სავარჯიშოები

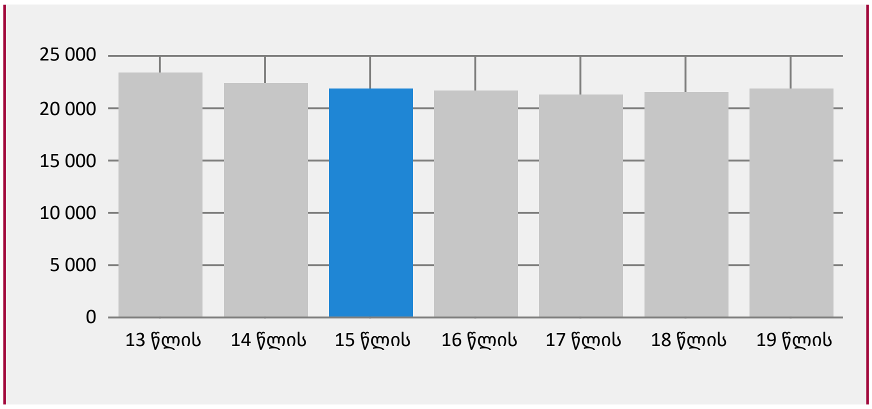
7. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 13 წლიდან 19 წლამდე რამდენი ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხე კითხვებს:

ა) მიახლოებით რამდენი 15 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

ბ) მიახლოებით რამდენი 17 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

გ) სულ რამდენი 13 წლიდან 19 წლამდე ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

ინფორმაცია
აღებულია
ვებ-გვერდიდან
www.juniors.geostat.ge



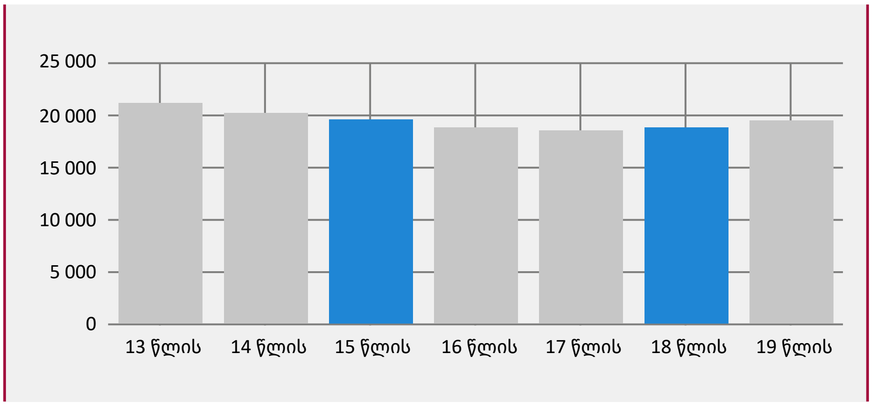
8. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია 13 წლიდან 19 წლამდე რამდენი გოგო ცხოვრობს საქართველოში. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხე კითხვებს:

ა) მიახლოებით რამდენი 18 წლის გოგო ცხოვრობს საქართველოში?

ბ) მიახლოებით რამდენი 14 წლის ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში?

გ) სულ რამდენი 13 წლიდან 19 წლამდე გოგო ცხოვრობს საქართველოში?

ინფორმაცია
აღებულია
ვებ-გვერდიდან
www.juniors.geostat.ge



9. მე-7 და მე-8 დავალებებიდან გამომდინარე შეადარეთ:

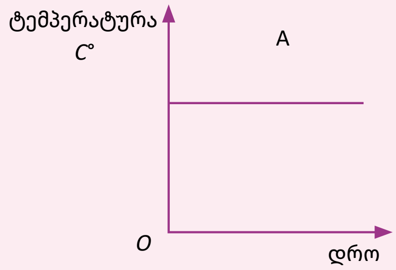
ა) 14 წლის ასაკის ბიჭი უფრო მეტი ცხოვრობს საქართველოში თუ გოგო?

ბ) 18 წლის ასაკის გოგო უფრო მეტი ცხოვრობს საქართველოში თუ ბიჭი?

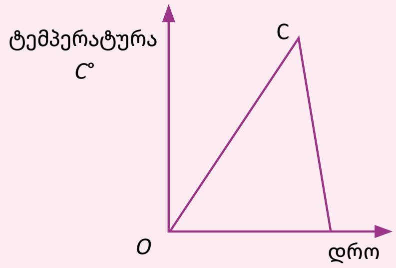
10. გრაფიკით მოცემულია ტემპერატურის დროზე დამოკიდებულება. აღწერეთ თითოეული გრაფიკი (საჭიროების შემთხვევაში შემოიტანეთ დამატებითი ინფორმაცია).

ᲡᲐᲕᲐᲠᲯᲘᲨᲝᲔᲑᲘ

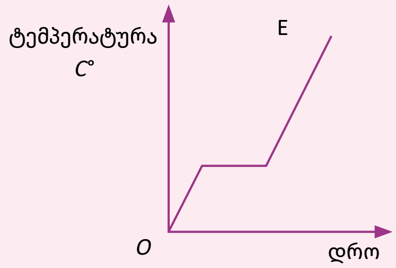
ა)



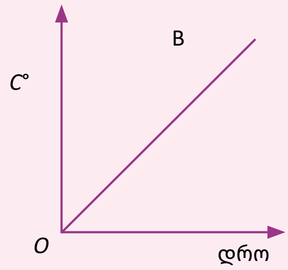
ბ)



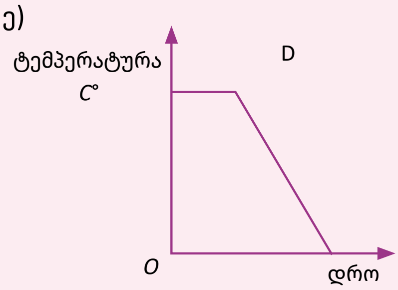
გ)



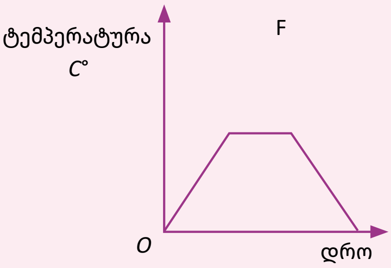
დ)



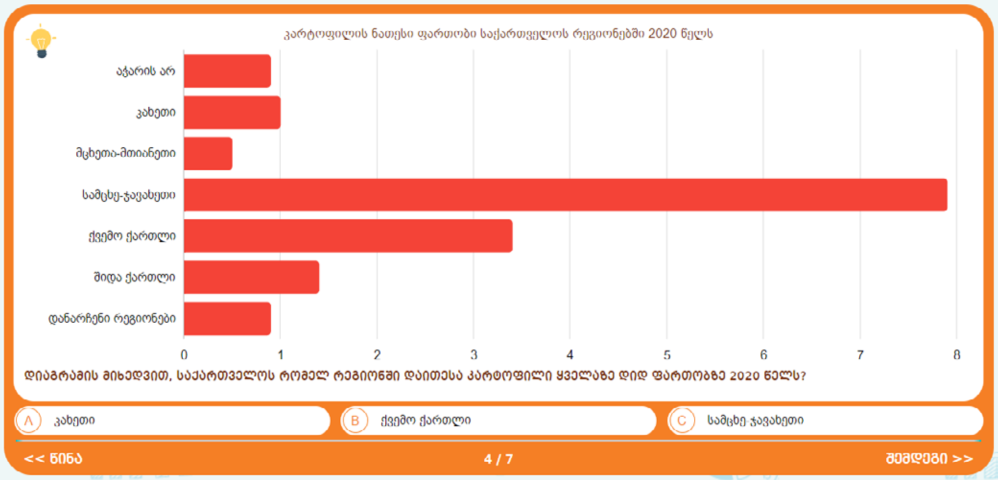
ე)



ვ)



11. კავშირი სტატისტიკასთან – ინტერაქტიული დავალება
შედით საიტზე 🔗 www.juniors.geostat.ge და უპასუხეთ კითხვებს:



ᲓᲘᲐᲒᲠᲐᲛᲘᲡ ᲛᲘᲮᲔᲓᲕᲘᲗ, ᲡᲐᲥᲐᲠᲗᲕᲔᲚᲝᲡ ᲠᲝᲛᲔᲚ ᲠᲔᲒᲘᲝᲜᲨᲘ ᲓᲐᲘᲗᲔᲡᲐ ᲙᲐᲠᲢᲝᲤᲘᲚᲘ ᲧᲕᲔᲚᲐᲖᲔ ᲓᲘᲓ ᲤᲐᲠᲗᲝᲑᲖᲔ 2020 ᲬᲔᲚᲡ?

Ⓐ კახეთი
Ⓑ ქვემო ქართლი
Ⓒ სამცხე-ჯავახეთი

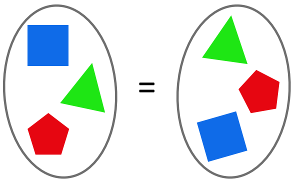
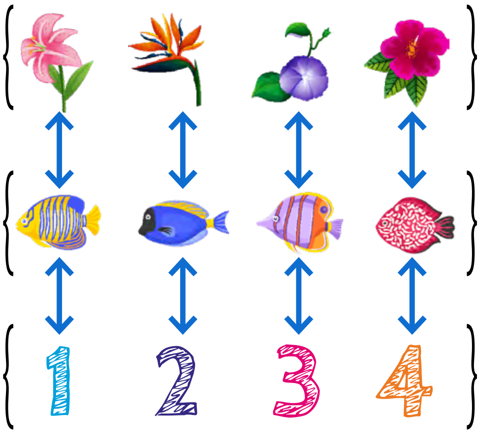
3.3. სიმრავლე, მოქმედებები სიმრავლეზე

სიმრავლე არის სიმბოლოების, საგნების, ობიექტების ერთობლიობა. სიმრავლე შეიძლება იყოს: ადამიანების, საგნების, ობიექტების, ცხოველების, კომპანიების და ა.შ.

სიმრავლე შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო.

საგნებს, ობიექტებს, სიმბოლოებს, რომელთა ერთობლიობაცაა სიმრავლე, **სიმრავლის ელემენტები** ეწოდება.

სიმრავლის აღნიშვნა	■ სიმრავლე აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: A, B, C... ■ სიმრავლის ელემენტებს ვწერთ ფიგურულ ფრჩხილებში { } ■ სიმრავლე შეიძლება იყოს მოცემული სიტყვიერად	მაგალითად, A არის ერთნიშნა დადებითი რიცხვების სიმრავლე A = {ერთნიშნა დადებითი რიცხვების სიმრავლე} A = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}
სიმბოლოების მნიშვნელობები	∈ – „ეკუთვნის“ ∉ – „არ ეკუთვნის“ n(A) – რამდენი ელემენტია სიმრავლეში	■ 1∈ A – ნიშნავს, 1 არის A სიმრავლის ელემენტი ■ 15 ∉ A – ნიშნავს, 15 არ არის A სიმრავლის ელემენტი ■ n(A) = 9, A სიმრავლეში 9 ელემენტია
ცარიელი სიმრავლე	■ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არცერთ ელემენტს, **ცარიელი სიმრავლე** ეწოდება.	∅ – ცარიელი სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო
უნივერსალური სიმრავლე	■ უნივერსალური სიმრავლე არის ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს განხილულ შემთხვევაში ყველა მოცემულ სიმრავლეს.	U – უნივერსალური სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო.

ტოლი სიმრავლეები	■ სიმრავლეებს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი ზუსტად ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგება.	**ტოლი სიმრავლეები** $A = \{1,2,3,4\}$ და $B = \{1,2,3,4\}$ $A = B$ 
ბიექცია	■ თუ ორ სიმრავლეში შეგვიძლია დავაწყვილოთ ელემენტები ისე, რომ არცერთი ელემენტი არ დარჩეს შესაბამისი წყვილის გარეშე, ვიტყვით, რომ ასეთ დაწყვილებას ჰქვია **ბიექცია**. სიმრავლიდან ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი მეორე სიმრავლიდან.	

სავარჯიშოები

1. გამოიყენეთ სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლოები და ჩაწერეთ შემდეგი სიმრავლეები:

ა) A არის 20-ზე ნაკლები ლუწი ნატურალური რიცხვების სიმრავლე;

ბ) B არის ნატურალური კენტი რიცხვების სიმრავლე 10-დან 24-მდე;

გ) C არის 40-ზე ნაკლები 5-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე;

დ) D არის 35-ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების სიმრავლე;

ე) E არის 90-ზე ნაკლები 8-ის ჯერადი რიცხვების სიმრავლე;

ვ) F არის 70-ზე ნაკლები იმ რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც 6-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევენ 3-ს;

ზ) G არის 30-ზე მეტი და 90-ზე ნაკლები იმ რიცხვების სიმრავლე, რომლებიც 3-ზე და 4-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევენ 2-ს;

თ) H არის წესიერი წილადების სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელია 9;

ი) M არის $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლები და $\frac{1}{3}$-ზე მეტი იმ წილადების სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელია 60;

კ) T არის 10-ზე მეტი ერთნიშნა რიცხვების სიმრავლე.

2. იპოვეთ თითოეული სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა:

ა) n**(A)**; ბ) n**(B)**; გ) n**(C)**; დ) n**(D)**; ე) n**(E)**; ვ) n**(F)**; ზ) n**(G)**; თ) n**(H)**; ი) n**(M)**; კ) n**(T)**.

სავარჯიშოები

3. მოცემულია სიმრავლე A = {2; 4; 5; 6; 10; 12; 14; 18; 22; 26; 28}. შესაბამისი სიმბოლოების გამოყენებით ჩაწერეთ:

ა) 5 ეკუთვნის A სიმრავლეს;

ბ) 14 ეკუთვნის A სიმრავლეს;

გ) 23 არ ეკუთვნის A სიმრავლეს;

დ) 17 არ ეკუთვნის A სიმრავლეს;

ე) სიმრავლე B = {5; 6; 12; 14} არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

გ) სიმრავლე C = {4; 10; 22; 26; 28} არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

დ) სიმრავლე D = {2; 9; 18; 22; 29} არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე;

ე) სიმრავლე E = {2; 9; 18; 22; 29} არ არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე.

4. მოცემულია M = {5;10;15;20;25; 30; 35; 40} და N = {10; 20; 30; 40; 50} ორი სიმრავლე. ქვემოთ მოცემული ჩანაწერებიდან რომელია სწორი და რომელი არასწორი?

ა) 5 ∈ N;

ბ) 20 ∉ N;

გ) 15 ∈ M;

დ) 40 ∉ N;

ე) 25 ∈ N;

ვ) 35 ∉ N;

ზ) 25 ∈ M;

თ) 50 ∉ M ;

ი) 35 ∉ M∩N;

კ) 45 ∈ M∩N;

ლ) 30 ∈ M∪N;

მ) 20 ∉ M∪N.

5. მოცემულია სიმრავლეები M = {3; 5; 11} და N = {12; 16; 24; 28}. დაწერეთ თითოეული სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე.

6. იპოვეთ A ∪ B ; n(A ∪ B) და A ∩ B , n(A ∩ B), თუ მოცემულია, რომ

ა) A = {1; 4; 9; 15} და B = {1; 5; 9; 13; 17} ;

ბ) A = {4; 7; 11; 16; 22} და B = {11; 22; 33; 44} ;

გ) A = {14; 16; 19; 21; 24; 30} და B = {12; 16; 19; 20; 24};

დ) A = {–12; –5; 0; 1; 7} და B = {–15;–5; 0; 5; 10};

ე) A = {a; b; c; d; e} და B = {b; d; e; k};

ვ) A = {c; e; h; k; 9; 17} და B = {e; f; h; 5; 9; 14; 19}.

3.4. ფუნქცია

გაკვეთილზე კლასში მოსწავლეები სხედან კონკრეტულ მაგიდასთან. კლასში არის მოსწავლეების სიმრავლე და მაგიდების სიმრავლე, როდესაც მოსწავლეებს აქვთ თავიანთი ადგილები, ე.ი. ყოველი მაგიდა დაკავშირებულია კონკრეტულ მოსწავლესთან, ყოველ მოსწავლეს შეესაბამება კონკრეტული მაგიდა.

განვიხილოთ მაგალითები და უფრო დეტალურად გავიგოთ რას ნიშნავს შესაბამისობა მათემატიკაში და როგორ არის შესაძლებელი მათი წარმოდგენა.

ინფორმაციის წარმოდგენა ცხრილით

თვე	შობადობა
იანვარი	4000
თებერვალი	3000
მარტი	5000
აპრილი	2000
მაისი	7000
ივნისი	3000
ივლისი	5000
აგვისტო	4000

ჩვენ შეგვიძლია დავაწყვილოთ ინფორმაცია და წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

(იანვარი; 4000), (თებერვალი; 3000)
(მარტი; 5000), (აპრილი; 2000)
(მაისი; 7000), (ივნისი; 3000)
(ივლისი; 5000), (აგვისტო; 4000)

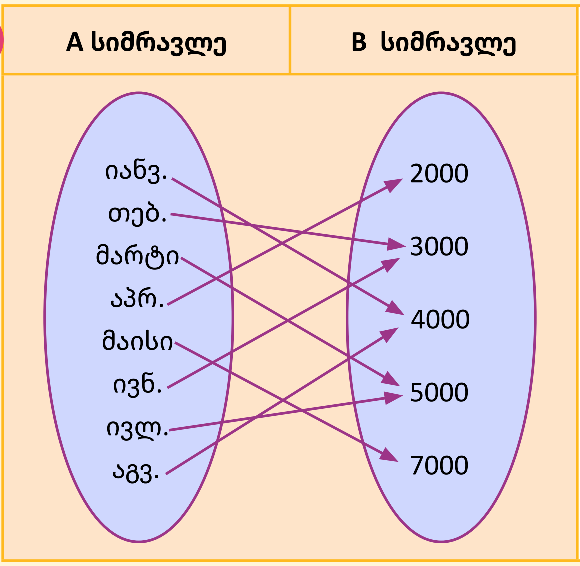
ზემოთ მოცემული მაგალითიდან გამომდინარე, დავუშვათ მოცემულია ორი სიმრავლე, ერთი სიმრავლის ელემენტები წარმოადგენენ თვეებს, ხოლო მეორე სიმრავლის ელემენტები რიცხვებს, უფრო კონკრეტულად

A = {იანვარი, თებერვალი, მარტი, აპრილი ,მაისი, ივნისი, ივლისი, აგვისტო}

B = {2000, 3000, 4000, 5000, 7000}

როგორც ვნახეთ, A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთი ელემენტი B სიმრავლიდან, ვიტყვით, რომ A და B სიმრავლეებს შორის დამყარდა შესაბამისობა.

აღნიშნული შესაბამისობა შეიძლება წარმოვადგინოთ, სხვა ფორმით: ➡



ვიტყვით, რომ A სიმრავლე ავსახეთ B სიმრავლეში.

A და B სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს მიმართება (A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ელემენტი)

თუ გავაანალიზებთ:

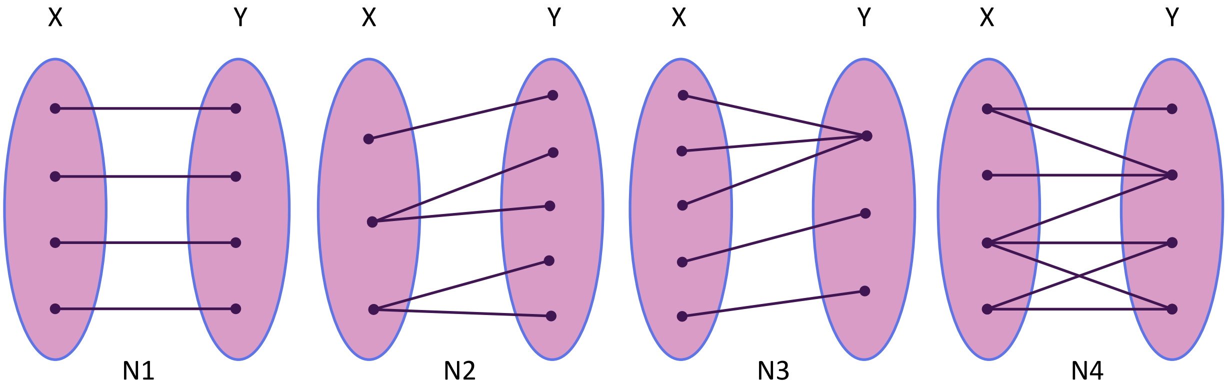
$n(A) = 8$ (A სიმრავლეში 8 ელემენტია)

$n(B) = 5$ (B სიმრავლეში 5 ელემენტია)

მაგ., 3000 შეესაბამება ორ თვეს, ისევე, როგორც 4000 და 5000.

ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა ტიპის მიმართებები (ელემენტებს შორის შესაბამისობები), განვიხილოთ 4 დიაგრამა.

მოცემულია ორი X და Y სიმრავლეები



N1 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი Y სიმრავლიდან.

N2 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის ერთ ელემენტს შეიძლება შეესაბამებოდეს Y სიმრავლიდან 1 ან 2 ელემენტი.

N3 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის სამ ელემენტს შეიძლება შეესაბამებოდეს Y სიმრავლიდან ერთი ელემენტი.

N4 – დიაგრამიდან გამომდინარე, X სიმრავლის და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა ტიპის შესაბამისობები.

ᲡᲐᲙᲕᲐᲜᲫᲝ ᲙᲘᲗᲮᲕᲐ: შეიძლება თუ არა, რომ თითოეულ დიაგრამას (შესაბამისობის ტიპს) ჰქონდეს სახელი?

ორი X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, ფუნქცია ეწოდება. **ფუნქცია** შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით;

N1 და N3 დიაგრამებით მოცემული შესაბამისობების გათვალისწინებით ვიტყვით, რომ N1 და N4 დიაგრამებით მოცემულია ფუნქცია.

X სიმრავლეს, ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება

Y სიმრავლეს – ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე

ფუნქცია მნიშვნელოვანი ცნებაა მათემატიკაში და მისი წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით: სიტყვიერად, ცხრილით, ფორმულით (ანალიზურად), დიაგრამით, ნახაზით, ნახატით.

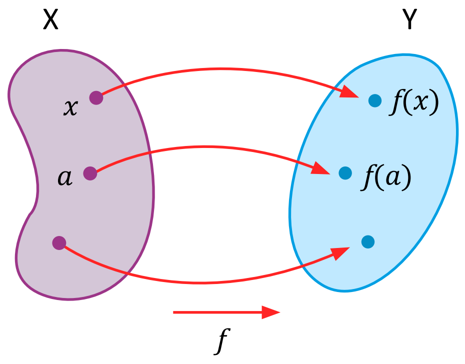
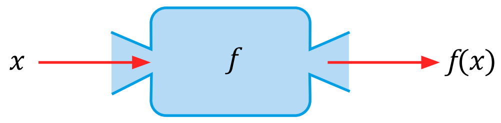
ფუნქცია, ფუნქციის აღნიშვნა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ფუნქცია ხშირად მოცემულია გარკვეული წესით;

როდესაც ორი X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის დგინდება შესაბამისობა f-წესით, ისე, რომ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან ერთადერთი ელემენტი, ვამბობთ, რომ მოცემულია ფუნქცია f-წესით, ვწერთ $y = f(x)$; სადაც $x \in X$ სიმრავლე წარმოადგენს განსაზღვრის არეს, ხოლო $y \in Y$ სიმრავლე წარმოადგენს მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

Y-სიმრავლის ელემენტები დამოკიდებულია X-სიმრავლის შესაბამის ელემენტებზე; ნებისმიერ ელემენტს X სიმრავლიდან ეწოდება **დამოუკიდებელი** ცვლადი, ხოლო Y სიმრავლიდან შესაბამის ელემენტს – **დამოკიდებული ცვლადი.**

▶ დიაგრამაზე მოცემულია f ფუნქცია

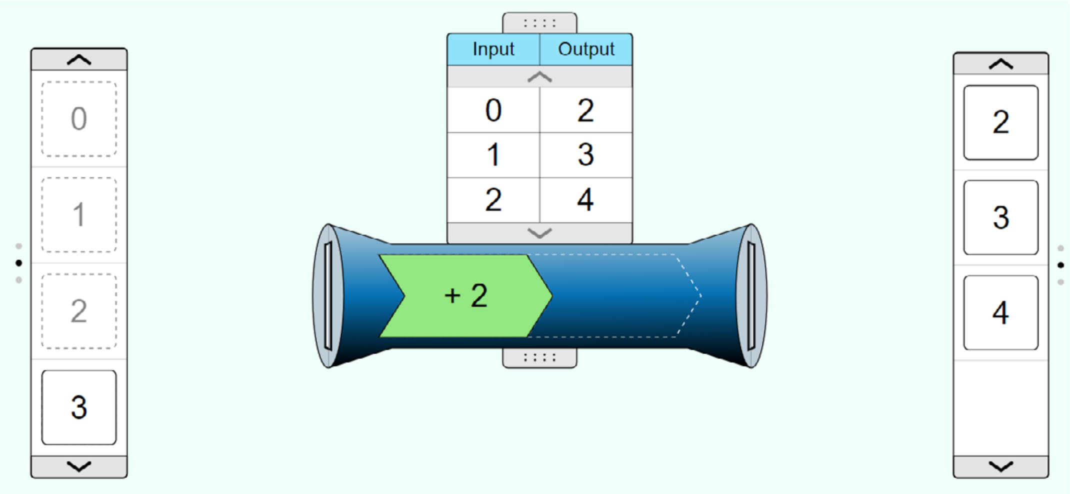
	 მოკლედ ვწერთ შემდეგნაირად: $f: X \rightarrow Y$ $y = f(x)$
X-სიმრავლის ყოველ x ელემენტზე, მოქმედებს f-წესი, რის შედეგადაც ვიღებთ შესაბამის y-ს	ვამბობთ, რომ მოხდა X-სიმრავლის ასახვა Y-სიმრავლეში

მითითება: ზოგადად განსაზღვრის არეს აღნიშნავენ სიმბოლოთი D, ხოლო მნიშვნელობათა არეს სიმბოლოთი E.

ნიმუში 1 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

იმისათვის, რომ მეტად აღქმადი იყოს ფუნქცია, ის დიაგრამის სახით წარმოდგენილია, როგორც გარკვეული მილი, ან დანადგარი, რომელიც მასში შემავალ ობიექტებზე გარკვეული წესით მოქმედებს (დიაგრამაზე მოცემულია წესი).

განვიხილოთ რიცხვითი ფუნქცია, დიაგრამიდან გამომდინარე მოცემულია წესი: განსაზღვრის არიდან აღებულ ნებისმიერ რიცხვს ემატება 2 და შეესაბამება 2-ით მეტი რიცხვი.



Input	Output
0	2
1	3
2	4

ყოველ ელემენტზე განსაზღვრის არიდან მოქმედებს *f*-წესი, რის შედეგადაც ვიღებთ შესაბამის *y*-ს, ვიღებთ $(x;y)$ – წერტილთა წყვილს.

ვწერთ $y = x + 2$ ან $f(x) = x + 2$;

როდესაც $x = 2$, ვიღებთ $f(2) = 2 + 2 = 4$;

y-ის მნიშვნელობა დამოკიდებულია *x*-ის მნიშვნელობაზე; ფუნქციით მოცემულია ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულება

იხილეთ სხვა ნიმუშები ბმულზე: 🔗 www.phet.colorado.edu

საკვანძო კითხვა: როგორ დავადგინოთ არის თუ არა ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის წარმოდგენილი შესაბამისობა ფუნქცია?

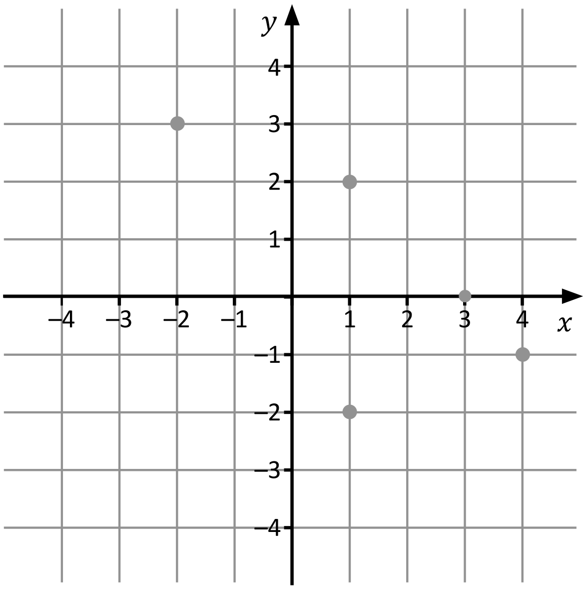
ნიმუში 2 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

ორ X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის შესაბამისობა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სხვადასხვა ფორმით: ცხრილით, წერტილთა წყვილებით $(x;y)$, წერტილებით საკოორდინატო სიბრტყეზე, გრაფიკით.

- *როგორ დავადგინოთ არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?*

x	y
–2	3
1	2
2	–2
3	0
4	–1

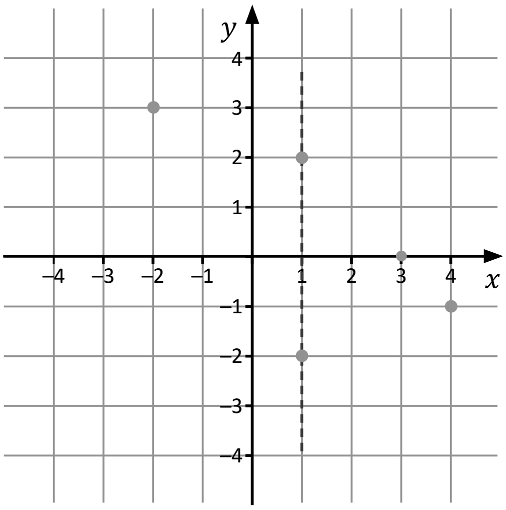
(–2; 3) (1; 2) (1; –2)
(3; 0) (4; –1)



განვიხილოთ ცხრილი:

- ცხრილით ნაჩვენებია, რომ X სიმრავლიდან ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლიდან გარკვეული ელემენტი;
- ცხრილში მოცემული ინფორმაცია დაორგანიზებულია და წარმოდგენილია, როგორც წერტილთა წყვილი;
- ინფორმაცია ასახულია (გადატანილი) საკოორდინატო სიბრტყეზე, რომელიც მეტად თვალსაჩინოა.

ფუნქციის განმარტების თანახმად, X სიმრავლიდან ერთ ელემენტს არ შეიძლება შეესაბამებოდეს ორი სხვადასხვა ელემენტი Y სიმრავლიდან. გრაფიკიდან მარტივად დასადგენია, რომ თუ რომელიმე ვერტიკალურ წრფეზე მდებარეობს შესაბამისობის ორი ან მეტი წერტილი, მაშინ ეს შესაბამისობა არაა ფუნქცია. ე.ი. მოცემული შესაბამისობა არ არის ფუნქცია.

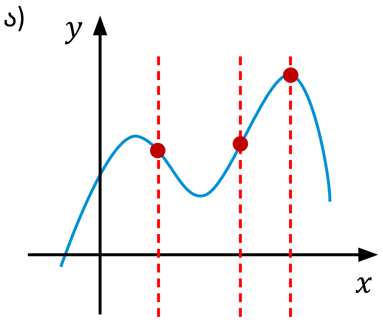


ნიმუში 3 – ფუნქციის წარმოდგენის თვალსაჩინო ნიმუში

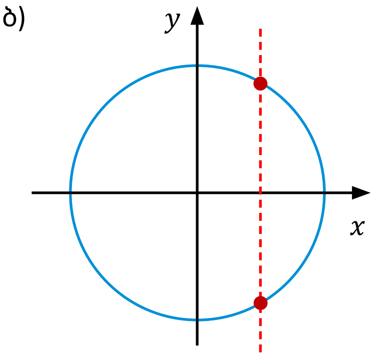
საკვანძო კითხვა: როდესაც შესაბამისობა მოცემულია გრაფიკით, როგორ დავადგინოთ არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქცია?

ქვემოთ მოცემულია ფუნქციის მაგალითები

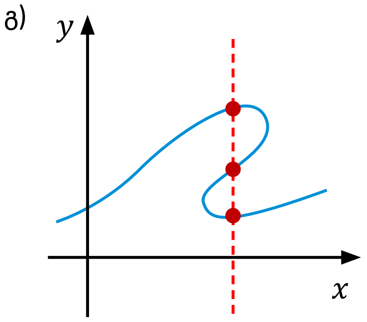
თუ გრაფიკს ვერტიკალურად დახაზული წრფე მხოლოდ ერთ წერტილში კვეთს, ვამბობთ, რომ მოცემულია ფუნქცია. თუ კვეთს ერთზე მეტ წერტილში, მაშინ არ არის ფუნქცია (თუ წრფე კვეთს ორ წერტილში, ე.ი. x-ცვლადის ერთი მნიშვნელობისთვის გვაქვს y-ცვლადის ორი მნიშვნელობა); აღნიშნულ მეთოდს ვერტიკალური წრფის ტესტი ეწოდება.



ა) ფუნქცია



ბ) არ არის ფუნქცია



გ) არ არის ფუნქცია

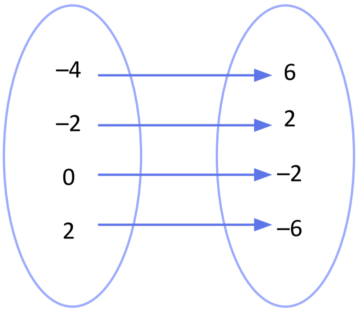
სიტყვიერად: ფუნქცია გვიჩვენებს ორ X და Y სიმრავლის ელემენტებს შორის ისეთ შესაბამისობას, როდესაც ყოველ x ელემენტს (ცვლადს) X სიმრავლიდან, შეესაბამება ერთი y ელემენტი (ცვლადი) Y სიმრავლიდან. ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რაიმე წესით;

ცხრილით

x	y
–4	6
–2	2
0	–2
2	–6

განსაზღვრის არე: {–4,–2, 0, 2}
მნიშვნელობათა სიმრავლე: {6, 2, –2, –6}

დიაგრამით

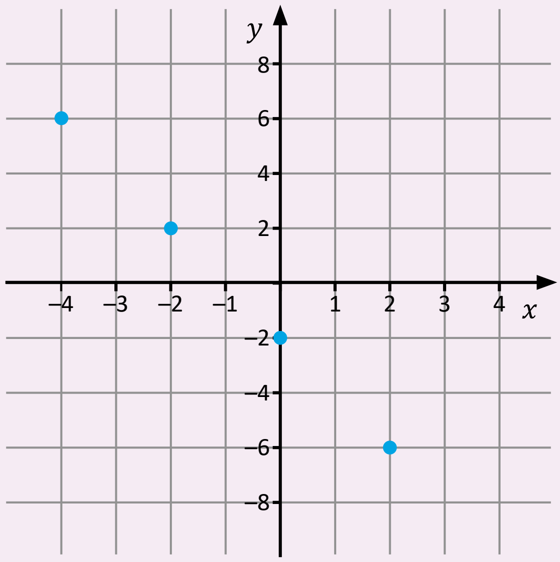


გაგრძელება

წერტილთა წყვილით

(–4; 6), (–2; 2), (0; –2), (2; –6)

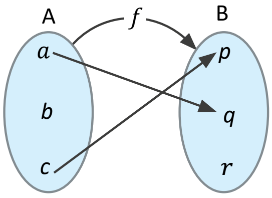
გრაფიკით



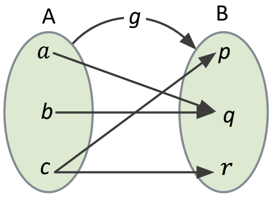
სავარჯიშოები

1. დაადგინეთ, ქვემოთ წარმოდგენილი დიაგრამებიდან რომელზეა მოცემული ფუნქცია? დიაგრამებიდან ამოწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

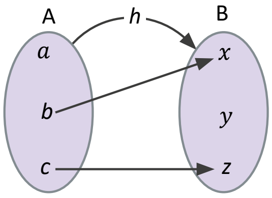
ა)



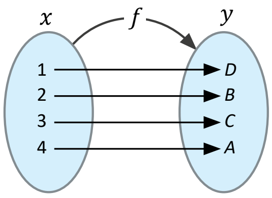
ბ)



გ)

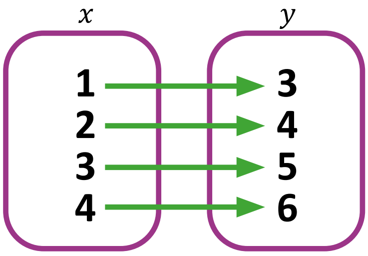
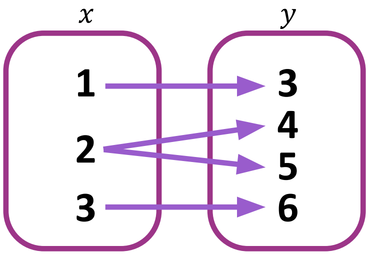


დ)



2. მოცემულია ორი რიცხვითი სიმრავლე X და Y

ა) ამოწერე თითოეული სიმრავლის ელემენტები;
ბ) ამოწერე დაკავშირებული (x,y) წყვილი;
გ) იმსჯელე, რომელი წარმოადგენს ფუნქციას და რომელი არა.

I ნიმუში	**II ნიმუში**
	

სავარჯიშოები

3. მოცემული წერტილთა წყვილები დააორგანიზეთ დიაგრამებით, ასევე გადაიტანეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და დაადგინეთ, რომელი შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას. ამოწერეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა) (2; 7); (–1; –5); (-3 ; 6); (–1; 8); (4; 6); (0; –5);

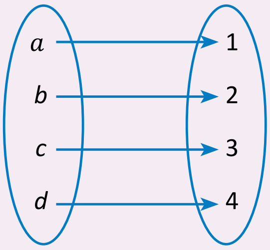
ბ) (1; 4) ; (0; –3); (2; 9); (1; –3) ; (–1; 9); (0; 8);

გ) (–3; 1,5) ; (–2 ; –6); (4; 0); (3; 1,5); (–2; 0); (1; 7);

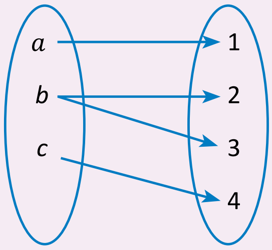
დ) (4; –8) ; (1,3; –7); (4 ; 6,5); (–5 ; 9) ; (1,3; –6); (0; –3); (4; 6,5) ; (–2; 0).

4. ქვემოთ მოცემული დიაგრამებიდან რომელი წარმოადგენს ფუნქციას? პასუხი დაასაბუთეთ.

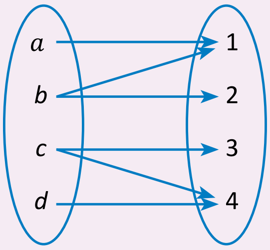
ა)



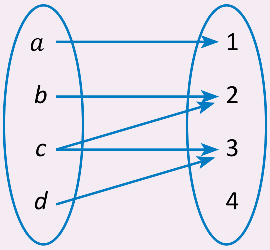
ბ)



გ)

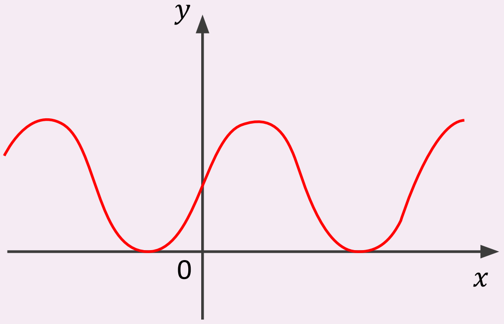


დ)

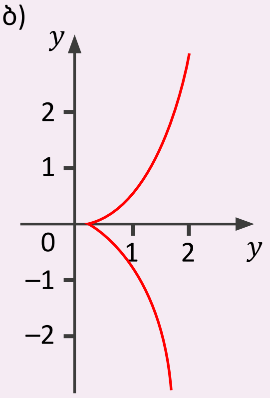


5. ვერტიკალური წრფის ტესტით შეამოწმეთ, რომელი გრაფიკით არის მოცემული ფუნქცია:

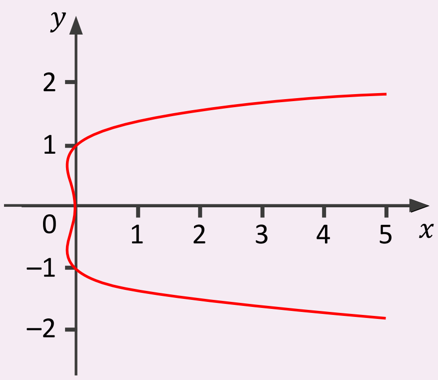
ა)



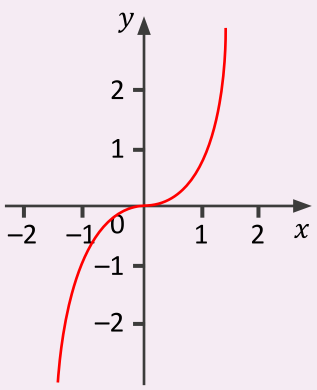
ბ)



გ)



დ)



სავარჯიშოები

6. მთასვლელთა ჯგუფი გაემართა ძირითადი ბანაკიდან მწვერვალის დასალაშქრად. ჯგუფის ხელმძღვანელი ყოველ ორ საათში ინიშნავდა ბანაკიდან მათ დაშორებას სიმაღლის მიხედვით. ცხრილში მოცემულია პირველ 12 საათში ჩანიშნული მონაცემები.

დრო (სთ)	2	4	6	8	10	12
სიმაღლე (მეტრი)	60	100	130	180	210	210

თქვენი დავალება:

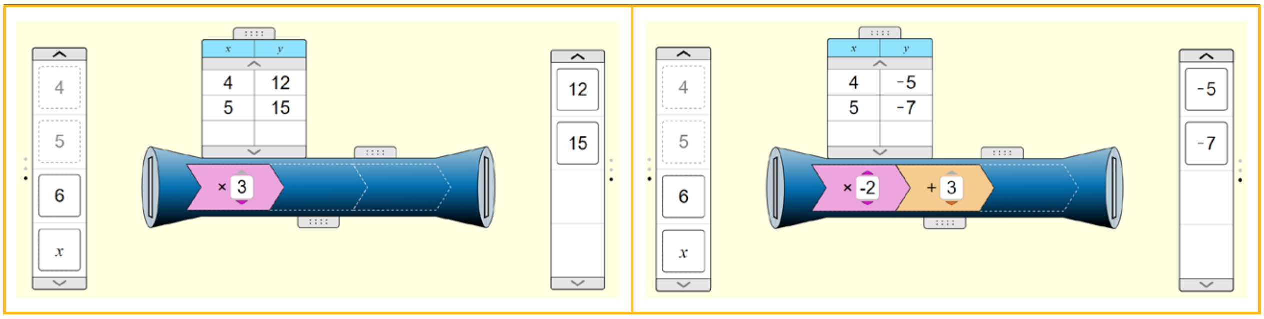
ა) ჩამოწერეთ შესაბამისობის წყვილები და გამოსახეთ ისინი საკოორდინატო სიბრტყეზე;

ბ) მიღებული წერტილები შეაერთეთ მონაკვეთებით და მიიღეთ ფუნქციის გრაფიკი;

გ) გრაფიკის მიხედვით დაადგინეთ დაახლოებით რა სიმაღლეზე იქნებოდა ჯგუფი ბანაკიდან 5 სთ-ზე? 9 სთ-ზე? 11 სთ-ზე?

7. მოცემულია ფუნქცია თვალსაჩინო ნიმუშით:

I. დაადგინეთ რა წესი მოქმედებს თითოეულ რიცხვზე;
II. ჩაწერეთ შესაბამისი გამოსახულება;
III. იპოვეთ $f(2)$; $f(6)$; $f(-2)$; $f(-5)$.



x	y
4	12
5	15

x	y
4	-5
5	-7

8. შედით ვებ-გვერდზე Phet.colorado.edu ფუნქციები, შეადგინეთ მე-7 დავალების მსგავსი დავალებები და შეასრულეთ.

3.5. ფუნქციის მოცემის ხერხები, წრფივი ფუნქცია

3.5.1 სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა სიტყვიერად, ცხრილით, ანალიზურად (ფორმულით), გრაფიკულად.

> კონკრეტული მაგალითის ნიმუშზე განვიხილოთ, თუ როგორ ხდება ინფორმაციის წარმოდგენა სხვადასხვა ფორმით. ასევე, განვიხილოთ რას ნიშნავს სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება (სიმრავლის ელემენტებს შორის დამოკიდებულება).

განვიხილოთ მოძრაობის აღწერა

წინარე მასალის გამეორება

ვიცით, რომ ორ ცვლადს შორის დამოკიდებულებას, როდესაც ერთი ცვლადის რამდენიმეჯერ გაზრდით (ან შემცირებით) მეორე ცვლადიც იმდენჯერ იზრდება (ან მცირდება), **პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება** ეწოდება.

პირდაპირპროპორციის დროს მუდმივია ორი შესაბამისი ცვლადის შეფარდება.

სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების წარმოდგენა შესაძლებელია:

1. სიტყვიერად;
2. ცხრილის მეშვეობით;
3. ანალიზურად (ფორმულით, განტოლებით);
4. გრაფიკის მეშვეობით.

▶ **განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა:**

დავუშვათ ვიცით, რომ მანქანა მოძრაობს 120 კმ/სთ სიჩქარით, როგორ შეიძლება მოცემული სიტუაციის აღწერა სხვადასხვა მეთოდით.

1. **სიტყვიერი აღწერა:** მანქანა მოძრაობს თანაბრად და ყოველ ერთ საათში გადის 120 კმ-ს.
2. დავაორგანიზოთ **ინფორმაცია ცხრილის** მეშვეობით.

დრო (სთ)	1	2	5	10
გავლილი გზა (კმ)	120	240	600	1200

3. **სიტუაციის ფორმულირება (მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა)**

ზემოთ მოცემული მაგალითიდან გამომდინარე, დახარჯულ დროსა და, შესაბამისად, გავლილ მანძილს შორის დამოკიდებულება პირველში აღწერილია სიტყვიერად, ხოლო მეორეში ინფორმაცია დაორგანიზებულია ცხრილში.

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ სიჩქარე გვიჩვენებს განვლილი მანძილის შეფარდებას შესაბამის დახარჯულ დროსთან. მოკლედ, თანაბარი მოძრაობის დროს სიჩქარე გვიჩვენებს, თუ რამდენ მანძილს გადის მანქანა დროის ერთეულში.

გაგრძელება

დროის 5-ჯერ გაზრდით, გავლილი მანძილი 5-ჯერ გაიზარდა.

ცხრილიდან ჩანს, რომ მანძილისა და დროის ფარდობა $\frac{\text{გავლილი მანძილი}}{\text{დრო}}$ მუდმივია, ე.ი. სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია.

ვიცით, რომ

გავლილი მანძილი = სიჩქარე · დროზე

მოვახდინოთ **სიტუაციის ფორმულირება:** ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ

- გავლილი მანძილი აღინიშნება სიმბოლოთი – S
- სიჩქარე აღინიშნება სიმბოლოთი – v
- დრო აღინიშნება სიმბოლოთი – t

$$S = v \cdot t$$

მინიშნება: სიტუაციის ფორმულირებისას, მათემატიკური მოდელის ჩასაწერად მათემატიკაში ვიყენებთ სიმბოლოებს (უმეტესად ლათინურ ასო-ბგერებს).

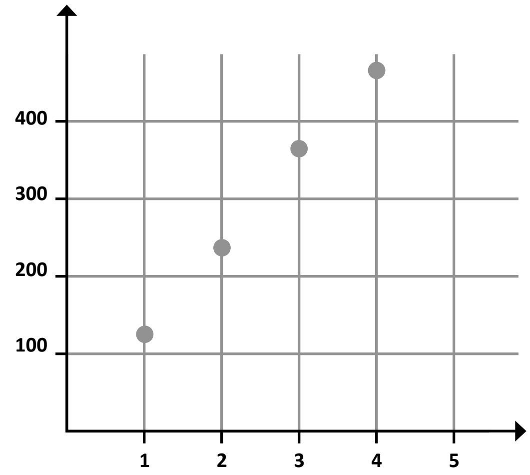
4. სიტუაციის გრაფიკული წარმოდგენა

მანქანა ყოველ ერთ საათში გადის 120 კმ-ს.

დრო (სთ)	გავლილი მანძილი (კმ)	(დრო; გავლილი მანძილი) (კოორდინატი)
1	120	(1 ; 120)
2	240	(2 ; 240)
3	360	(3 ; 360)
4	480	(4 ; 480)

გადავიტანოთ მონაცემები (დრო, გავლილი მანძილი) საკოორდინატო სიბრტყეზე. x ღერძს შევუსაბამოთ დრო, ხოლო y ღერძს გავლილი მანძილი. ვიცით, რომ:

- გავლილი მანძილი = სიჩქარე · დროზე
- სიჩქარე 120 კმ/სთ მუდმივია



გრაფიკის აგება

გავლილი მანძილი = 120 · დროზე

აღნიშნული დამოკიდებულება ცვლადებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$S = 120 \cdot t$$

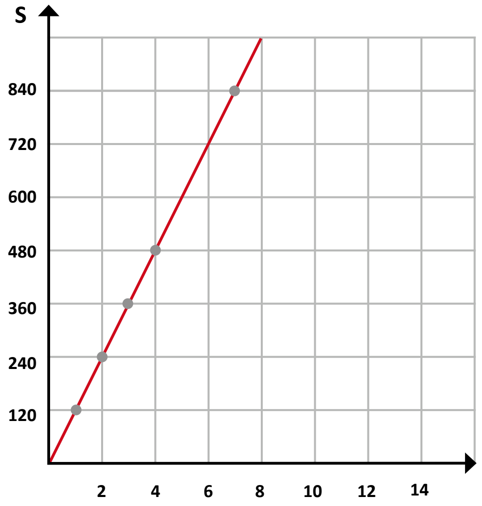
თუ ზემოთმოყვანილ გამოსახულებას ჩავწერთ x-ის და y-ის მეშვეობით მივიღებთ:

$$y = 120 \cdot x$$

მივიღეთ ორცვლადიანი განტოლება

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების ზოგადი სახეა $y = k \cdot x$,

- სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია და იგი მუდმივია.



გაგრძელება

წრფივი თანაბარი მოძრაობის დროს *k*-შეესაბამება სიჩქარეს, რომელიც არ იცვლება.	მას შემდეგ, რაც საკოორდინატო სიბრტყეზე გადავიტანთ წყვილებს (დრო, გავლილი მანძილი), დავინახავთ, რომ ყველა წერტილი მდებარეობს ერთ წრფეზე. შესაბამისად ვიტყვით, რომ **პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი არის წრფე.**

თუ წრფეზე ავიღებთ ნებისმიერ წერტილს და შევამოწმებთ ის დააკმაყოფილებს ფორმულას.

- რას ნიშნავს გრაფიკიდან აღებული წერტილის კოორდინატები დააკმაყოფილებს ფორმულას? მაგალითად განვიხილოთ წერტილი (7; 840), რომელიც მდებარეობს გრაფიკზე. ჩავსვათ მოცემული მონაცემები ფორმულაში

$$S = 120 \cdot t$$

$$120 \cdot 7 = 840$$

ე.ი. წრფიდან აღებული ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს ფორმულას.

? საკვანძო კითხვა:

- *რას ნიშნავს, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი არის ყოველთვის წრფე?*

ორი *X* და *Y* სიმრავლეებს შორის დამოკიდებულებას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს (x ელემენტს) შეესაბამება *Y* სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი (y ელემენტი), **ფუნქცია** ეწოდება.

ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს: სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ფორმულით/განტოლებით, გრაფიკის მეშვეობით.

$y = k \cdot x$ ფორმულით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება. პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევაა. ვამბობთ, y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.

მინიშნება: წრფივი ფუნქციისთვის k მუდმივს ეწოდება დახრილობა ან კუთხური კოეფიციენტი.

X სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.
Y სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ნებისმიერ x ელემენტს *X*-სიმრავლიდან დამოუკიდებელი ცვლადი ეწოდება; ხოლო ნებისმიერ y *ელემენტს* Y-სიმრავლიდან – დამოკიდებული ცვლადი.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითიდან გამომდინარე, როდესაც მანქანა მოძრაობს თანაბრად, გავლილ მანძილსა და დახარჯულ დროს შორის არსებობს ფუნქციური დამოკიდებულება.

- ერთმანეთთან დაკავშირებულია ორი სიმრავლის ელემენტები, დრო და გავლილი მანძილი, ვიცით, რომ სიჩქარე მუდმივი სიდიდეა.
- დროის ცვლილებით იცვლება გავლილი მანძილიც, დრო და გზა ცვლადი სიდიდეებია.
- დრო, მოცემულ სიტუაციაში, წარმოადგენს დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო გავლილი მანძილი დროზე დამოკიდებულ ცვლადს.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია, არის წრფივი ფუნქციის კერძო სახე

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება წრფივი ფუნქციის ერთ-ერთი გამოვლენაა, კერძო შემთხვევა, რომელზეც უფრო დეტალურად ვისაუბრებთ შემდეგ პარაგრაფში.

? **საკვანძო კითხვა:** რატომ ეწოდება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება?

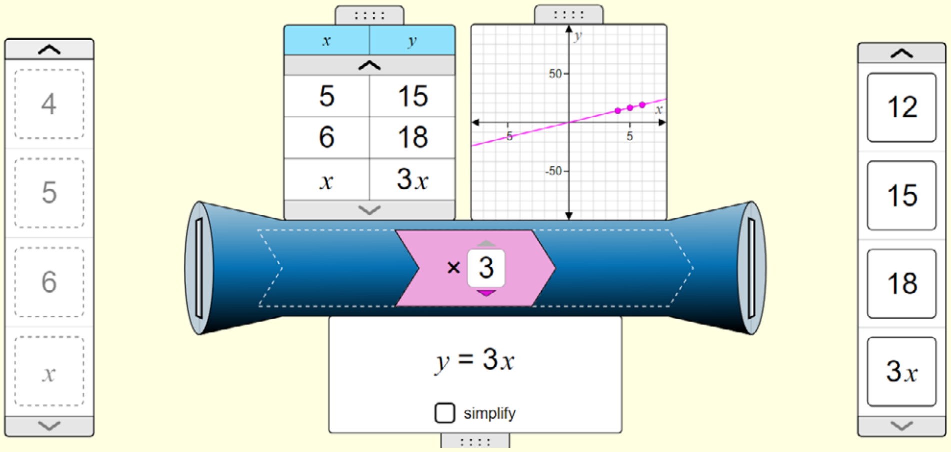
ნიმუში 1

როგორც ვიცით, რომ ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს დამოკიდებულება, რომლის წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა ფორმით.

განვიხილოთ ორი სიმრავლე, რომელთა ელემენტებს წარმოადგენენ რიცხვები.

განვიხილოთ შემთხვევა, ვხედავთ, რომ ყოველი ელემენტი განსაზღვრის არიდან მრავლდება 3-ზე და შეესაბამება მასზე 3-ჯერ მეტი ელემენტი.

$y = 3x$ ან $f(x) = 3x$



x	y
5	15
6	18
x	$3x$

იხილეთ სხვა ნიმუშები ბმულზე: 🔗 Phet.Colorado.Edu

ნიმუში 2 – კავშირი რეალურ სიტუაციასთან

მოსწავლე აკეთებს დანაზოგს და მას ბანკში მოსწავლის ანგარიშზე ყოველ თვე შეაქვს 20 ლარი, რამდენი ლარი ექნება მოსწავლეს 2,3,4 თვის შემდეგ?

დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა, ასევე წარმოადგინეთ სიტუაცია გრაფიკულად.

საკითხის გააზრება: როგორც ვხედავთ, თვეების გასვლის შემდეგ ანაბარზე თანხა იზრდება, თვესა და ანაბარზე დაგროვებულ თანხას შორის არსებობს დამოკიდებულება.

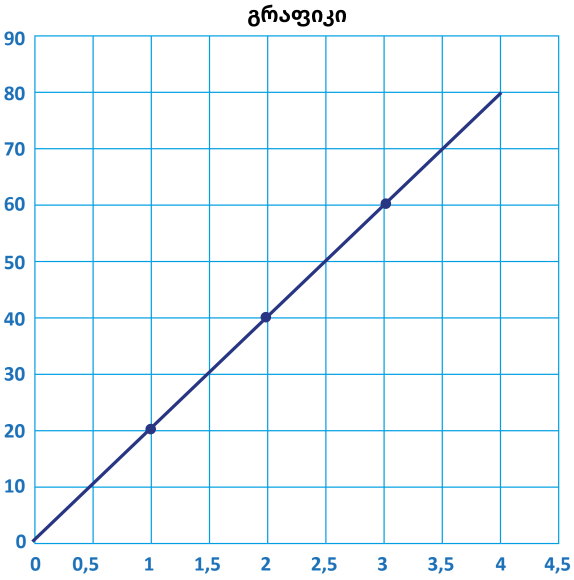
თვე	თანხა ანაბარზე
1	$1 \cdot 20 = 20$
2	$2 \cdot 20 = 40$
3	$3 \cdot 20 = 60$
4	$4 \cdot 20 = 80$

გადავიტანოთ მონაცემები (თვე, თანხა ანაბარზე) საკოორდინატო სიბრტყეზე. დავინახავთ:

- დაგროვებული თანხა = ყოველთვიურ შენატანი · თვეების რაოდენობაზე
- ყოველ თვე მოსწავლე ზოგავს 20 ლარს
- დაგროვებული თანხა = 20 · თვეების რაოდენობაზე

  $y = 20 \cdot x$, იგივე $y = 20x$
- იტყვიან, რომ თვეებსა და ანაბარზე შეგროვებულ თანხას შორის არის **პირდაპირპროპორციული** დამოკიდებულება.

k – მუდმივია



(0;0) გვიჩვენებს, რომ ანაბრის გახსნის დროს მოსწავლეს ანგარიშზე თანხა არ ჰქონდა.

მინიშნება: გამომდინარე იქიდან, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებების გრაფიკი არის წრფე, ხშირად პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება ეწოდება.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი ყოველთვის გადის სათავეზე.

საკითხის განზოგადება:

წარმოვიდგინოთ სიტუაცია, მოსწავლეს თანხის შეგროვებამდე ანაბარზე ჰქონდა თანხა 40 ლარის ოდენობით. ყოველ თვე ის ამატებდა 20 ლარს.

რით განსხვავდება აღნიშნული სიტუაცია წინა სიტუაციისგან?

გაგრძელება

თვე	შეტანილი თანხა	თანხა ანაბარზე
1	$1 \cdot 20 = 20$	$1 \cdot 20 +$ **40** $= 60$
2	$2 \cdot 20 = 40$	$2 \cdot 20 +$ **40** $= 80$
3	$3 \cdot 20 = 60$	$3 \cdot 20 +$ **40** $= 100$
4	$4 \cdot 20 = 80$	$4 \cdot 20 +$ **40** $= 120$
....		
x	$x \cdot 20$	$x \cdot 20 +$ **40**

თუ შევადარებთ ინფორმაციას, პირველ შემთხვევაში სიდიდეებს შორის არსებობს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, მეორე შემთხვევაში აღარ, იმიტომ რომ y-ის შეფარდება x-თან მუდმივი აღარაა.

$$\frac{60}{1} \neq \frac{80}{2} \neq \frac{100}{3}$$

მოვახდინოთ ახალი სიტუაციის ფორმულირება:

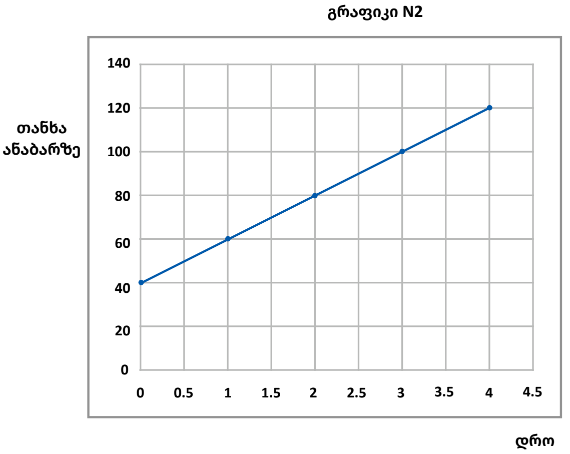
როგორც ვხედავთ წინა სიტუაციიდან განსხვავებით აქ დასაწყისში ანაბარზე იყო 40 ლარი.

თუ ანაბარზე დაგროვებული თანხას აღვნიშნავთ y-ით, x თვის შემდეგ ანაბარზე იქნება:

$y = 20 \cdot x + 40$

$y = 20 \cdot x + 40$ მოცემულ ჩანაწერი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას

მინიშნება: დეტალურად წრფივ ფუნქციებზე ვისაუბრებთ შემდეგ პარაგრაფში.



გამომდინარე იქიდან, რომ ანაბარზე თანხის დაგროვებამდე მოსწავლეს ჰქონდა 40 ლარი, გრაფიკის საწყისი წერტილია (0;40).

ისევე როგორც წინა შემთხვევაში მოცემული სიტუაციის გრაფიკიც წარმოადგენს წრფეს, რომელიც არ გადის სათავეზე; ორივე შემთხვევაში y დამოკიდებულია x-ზე წრფივად.

მოცემულია წრფივი დამოკიდებულება, აღნიშნულ წრფივ დამოკიდებულებას წრფივი ფუნქცია ეწოდება.

მოცემულ შემთხვევაში ფუნქციის განსაზღვრის არე არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეა, რადგან თვეები ვერ იქნება უარყოფითი.

მნიშვნელობათა სიმრავლე, პირველ შემთხვევაში არის არაუარყოფითი რიცხვები, ხოლო მეორე შემთხვევაში $y \geq 40$.

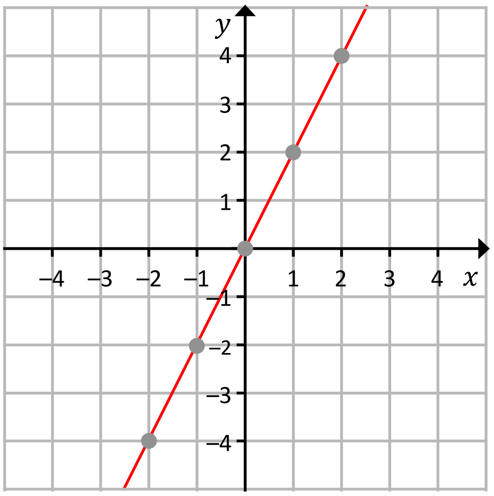
!! ყურადღება მიაქციეთ: პირდაპირპროპორციულობის გრაფიკი არის წრფე, პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია არის წრფივი ფუნქციის კერძო შემთხვევა.

ნიმუში 3 – პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია

განვიხილოთ $y = 2x$ და $y = -2x$ წრფივი დამოკიდებულება

ა) $y = 2x$

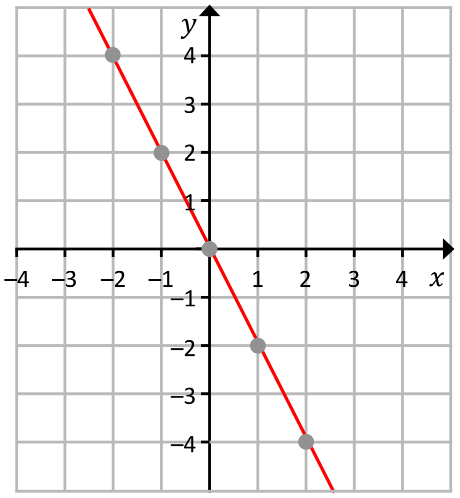
x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4



$y = kx$ ფუნქციის გრაფიკია წრფე, როდესაც $k > 0$-ზე წრფე გადის სათავეზე და მდებარეობს I და III მეოთხედებში

ბ) $y = -2x$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	0	−2	−4



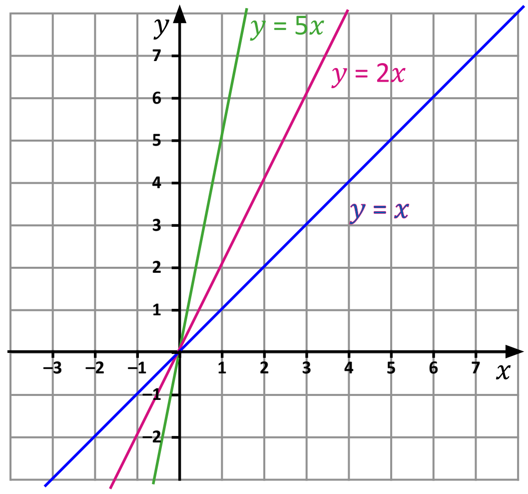
$y = kx$ ფუნქციის გრაფიკია წრფე, როდესაც $k < 0$-ზე წრფე გადის სათავეზე და მდებარეობს II და IV მეოთხედებში

გარდაქმნები

ავაგოთ $y = x$; $y = 2x$; $y = 5x$ პირდაპირპროპორციული ფუნქციის გრაფიკები და გამოვიკვლიოთ, რა გავლენა აქვს k-ს ცვლილებას გრაფიკზე

დიაგრამაზე ვხედავთ სამივე ფუქნციის გრაფიკს

x	$y = x$	$y = 2x$	$y = 5x$
0	0	0	0
1	1	2	5
2	2	4	10



აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება და განვიხილოთ თითოეული ფუნქციის მონაცემები ცალ-ცალკე

შემთხვევა 1: $y = x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

+1 +1 +1

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 1-ით ზრდას

შემთხვევა 2: $y = 2x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

+2 +2 +2

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 2-ით ზრდას

შემთხვევა 3: $y = 5x$

+1 +1 +1

x	0	1	2	3
y	0	5	10	15

+5 +5 +5

x ცვლადის 1-ით ზრდა, იწვევს y ცვლადის 5-ით ზრდას

როგორც ვხედავთ, k გავლენას ახდენს y-ის ცვლილებაზე.

ასევე, k გავლენას ახდენს გრაფიკის დახრის კუთხეზე Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

როდესაც k>0-ზე, რაც უფრო იზრდება k კოეფიციენტი, კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის იზრდება.

3.5.2 პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება – თეორიული ნაწილი

ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ როდესაც ორ სიდიდეს შორის არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, აღნიშნული დამოკიდებულების წარმოდგენა შესაძლებელია სიტყვიერად, ცხრილის მეშვეობით, ანალიზურად (ფორმულით, განტოლებით) და გრაფიკულად.

- $y = k \cdot x$ პირდაპირპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება, სადაც k-მუდმივია და ეწოდება პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი;
- როდესაც რეალურ პროცესებს აღვწერთ და ვაკეთებთ მათემატიკურ ფორმულირებას (ვწერთ ფორმულას), x და y ცვლადები შეესაბამება სხვადასხვა სიდიდეს დამოკიდებულებას ეწოდება წრფივი დამოკიდებულება (ცვლად სიდიდეებს, რომლებიც დამოკიდებულია ერთმანეთზე), ხოლო k – რიცხვია;
- გამომდინარე იქიდან, რომ y ცვლადის მნიშვნელობა დამოკიდებულია x ცვლადის მნიშვნელობაზე, x-ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი, ხოლო, y-ს ეწოდება დამოკიდებული ცვლადი. k-ს მუდმივი (ხშირად სამეცნიერო საგნებში, k-ს ეწოდება პარამეტრი, კონტროლირებადი პარამეტრი).
- მათემატიკაში k-გვიჩვენებს ასევე რამდენადაა დახრილი წრფე x ღერძის დადებით მიმართულებასთან. ამიტომ მას ეწოდება დახრილობა, ასევე კუთხური კოეფიციენტი. იმისათვის, რომ უკეთ გავიაზროთ k-ს მნიშვნელობა შემდეგ პარაგრაფებში განვიხილავთ მაგალითებს.

პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას:

- თუ $k > 0$-ზე, წრფე გადის I და III მეოთხედებში.
- ხოლო თუ $k < 0$-ზე წრფე გადის II და IV მეოთხედებში.
- ორივე შემთხვევაში წრფე გადის სათავეზე.
- რადგან გეომეტრიიდან ვიცით, რომ ორ წერტილზე ერთადერთი წრფის გავლება შეიძლება, გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ 2 წერტილის კოორდინატი.

ნიმუში 4 – პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების დადგენა

ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რითაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ არის თუ არა ცვლადებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.

ა)

x	2	4	6	8
y	5	10	15	20

ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას ცვლადებს შორის ფარდობა უნდა იყოს მუდმივი.

$$k = \frac{y}{x}$$

მინიშნება: გამომდინარე იქიდან, რომ როდესაც $x = 0$, მაშინ $y = 0$, აღნიშნულ წყვილს ზოგადად გამოსახულებაში არ ვსვამთ.

შევამოწმოთ:

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = 2.5$$

k =2.5 – ე.ი. ცვლადებს შორის დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციულია.

ბ)

x	2	3	4	5
y	10	15	25	30

ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებისას ცვლადებს შორის ფარდობა უნდა იყოს მუდმივი.

$$k = \frac{y}{x}$$

$$\frac{10}{2} = \frac{15}{3} \neq \frac{25}{4} \neq \frac{30}{5}$$

K არ არის მუდმივი

ე.ი. ცვლადებს შორის დამოკიდებულება არ არის პირდაპირპროპორციული.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია მაგალითები, შეამოწმეთ რომელი წარმოადგენს პირდაპირპროპორციულ (წრფივ) დამოკიდებულებას და იპოვეთ k პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ა)

x	3	5	7
y	27	45	63

დ)

x	2	8	10
y	9	36	45

ბ)

x	–2	–4	–8
y	8	–16	32

ე)

x	0	5	10
y	5	10	15

გ)

წონა	10	12	15
ფასი	30	36	60

ვ)

x	–3	–5	–10
y	–4.5	–7.5	–15

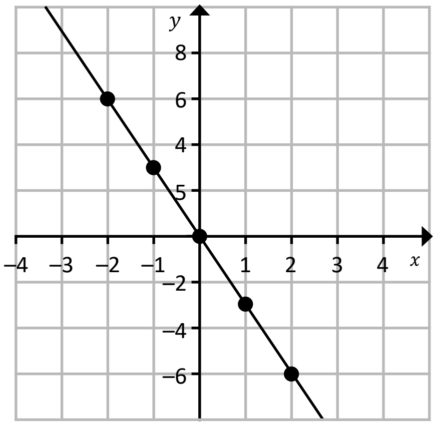
2. ააგეთ შემდეგი წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი:

ა) $y = 3x$;   ბ) $y = 5x$;   გ) $y = -2.5x$.

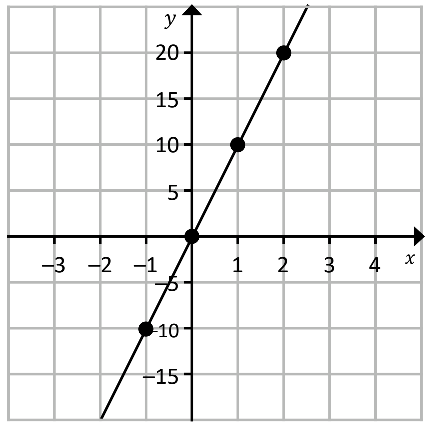
3. ააგეთ შემდეგი პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების გრაფიკი $y = -4x$.

4. მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე იპოვეთ K პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ა)



ბ)



5. დაწერეთ წრფივი დამოკიდებულების ფორმულა Y = KX, თუ ვიცით, რომ მოცემულ დამოკიდებულებას ეკუთვნის შემდეგი რიცხვთა წყვილი **მინიშნება:** იპოვეთ k თითოეული წერტილისთვის.

ა) (4;12);   ბ) (-5;10);   გ) (4; 2);   დ) (-4;-30).

6. ააგეთ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი, თუ ვიცით, რომ პირდაპირპორპორციულობის კოეფიციენტი უდრის:

ა) –4;   ბ) –6;   გ) 3.5;   დ) –1.5.

7. თუ y პირდაპირპროპორციულადაა დამოკიდებული x ცვლადზე და ვიცით, რომ $y = 12$, მაშინ, როცა $x = 5$. რა იქნება y, როცა $x = 2.5$?

8. რამდენჯერ გაიზრდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგრძეს გავზრდით: ა) 8-ჯერ? ბ) 10-ჯერ? გ) 2.5-ჯერ? დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და პასუხი დაასაბუთეთ.

9. რამდენჯერ შემცირდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგანეს შევამცირებთ ა) 2-ჯერ? ბ) 4.5-ჯერ? გ) 3-ჯერ? დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და პასუხი დაასაბუთეთ.

10. STEM **კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან.** გახსენით ბმული და გაეცით პასუხი 🔗 DESMOS – მარათონი პირველიდან მე-7 გვერდის ჩათვლით მოცემულ კითხვებს.

11. **ფინანსური ამოცანა:** ქეთიმ გადაწყვიტა გაეკეთებინა დანაზოგი, ის ყოველთვე ანაბარზე ინახავდა 25 ლარს. რა თანხა ექნება ანაბრაზე ქეთის 8 წლის, 12 წლის, 16 წლის შემდეგ?

ა) დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება;

ბ) წარმოადგინეთ სიტუაციის შესაბამისი გრაფიკი.

რთული ნიმუში:

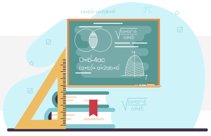
12. **ფინანსური ამოცანა** გენოს ანაბარზე ჰქონდა 200 ლარი, ის ყოველთვე ანაბრიდან ხარჯავდა 20 ლარს.

ა) ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება;

ბ) წარმოადგინეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გრაფიკი.

რთული ნიმუში:

13. **აღმოაჩინე შეცდომა:** ზურამ გადაწყვიტა ანაბარზე თანხის დაგროვება, დანაზოგის გაკეთებამდე მას ანაბარზე ჰქონდა 160 ლარი, ის ყოველთვე ანაბარზე ამატებდა 30 ლარს. იმისათვის, რომ სცოდნოდა თუ რამდენი ლარი ექნებოდა ყოველთვე ანგარიშზე, ზურამ გადაწყვიტა მოცემული სიტუაციის ფორმულირება და დაწერა გამოსახულება: $y = 160 \cdot x + 20$, სადაც y-ით აღნიშნა ანაბარზე დადებული თანხის რაოდენობა, x-ით თვეების რაოდენობა. რა შეცდომა დაუშვა ზურამ? დაეხმარეთ ზურას ჩაწეროს სწორი გამოსახულება და ააგოს შესაბამისი გრაფიკი.



■ კვლევითი აქტივობა: MATH Lab

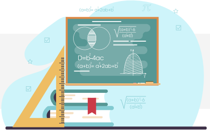
14. შედით ვებ-გვერდზე 🔗 GEOGEBRA, ამოირჩიეთ, Start Calculator. გამოჩნდება ველი, სადაც შეძლებთ აკრიფოთ $y = x$ წრფივი დამოკიდებულება, გრაფიკული კალკულატორი ააგებს გრაფიკს.

მოცემული ვებ-გვერდის დახმარებით ააგეთ:

ა) $y = 2x$; $y = 3x$; $y = 5x$ გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

ბ) $y = 0.1x$; $y = 0.5x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

სავარჯიშოები



■ კვლევითი აქტივობა: MATH Lab

15. შედით ვებ-გვერდზე 🔗 GEOGEBRA, ამოირჩიეთ, Start Calculator. გამოჩნდება ველი სადაც შეძლებთ ააგოთ $y = -x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი. მოცემული ვებ-გვერდის დახმარებით ააგეთ:

ა) $y = -2x$; $y = -3x$; $y = -5x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.	ბ) $y = -0.2x$; $y = -0.9x$ წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოიკვლიეთ, რა გავლენა აქვს პირდაპირპროპორციული კოეფიციენტის ცვლას გრაფიკზე.

16. **კრიტიკული აზროვნება:** თუ პირდაპირპროფორციულ დამოკიდებულებაში x ის მნიშვნელობას გავზრდით 5-ჯერ, რამდენჯერ გაიზრდება y-ს მნიშვნელობა? დაასაბუთეთ პასუხი.

17. **გამოწვევა:** თუ გრაფიკი არის წრფე მაგრამ არ გადის სათავეზე, რატომ არ იქნება დამოკიდებულება პირდაპირპროპორციული?

3.6. დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

საკვანძო კითხვა: რატომ ეწოდება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას წრფივი დამოკიდებულება?

ჩვენთვის ცნობილი, იტალიაში მდებარე პიზის კოშკი ვერტიკალური მდგომარეობიდან გადახრილია და უამრავი ტურისტის თუ არქიტექტორის შესწავლის საგანია საუკუნეების განმავლობაში.

დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი, ზომავს რამდენად დახრილია ესა თუ ის ობიექტი ზედაპირთან მიმართებით.

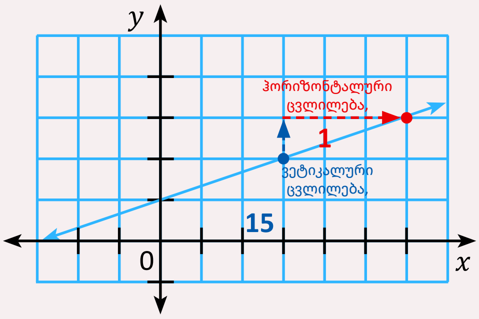
დახრილობა გვიჩვენებს ვერტიკალური ცვლილების ფარდობას ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან.

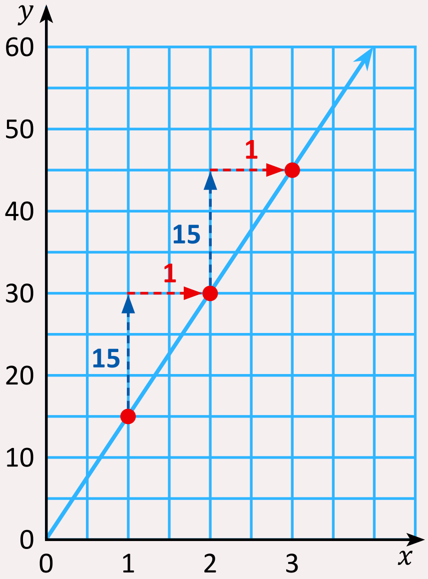
თუ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ნებისმიერი წრფე, მაშინ შეგვიძლია დავადგინოთ რამდენად დახრილია ეს წრფე. ამისათვის საჭიროა წრფეზე მოვნიშნოთ ორი წერტილი, დავადგინოთ შესაბამისი ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ცვლილება, ხოლო შემდეგ ვერტიკალური ცვლილება შევაფარდოთ ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან, ე.ი.

$$k = \frac{\text{ვერტიკალური ცვლილება}}{\text{ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან}}$$

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

ნებისმიერი წრფის შემთხვევაში k-ს ეწოდება დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი.





$$k = \frac{15}{1} = 15$$

არსებითად გასააზრებელი:

k – კოეფიციენტი გვიჩვენებს, x – ცვლადის ერთით გაზრდით, რამდენით იზრდება (ან მცირდება) y ცვლადი.

კუთხური კოეფიციენტი გვიჩვენებს ასევე ერთეულოვან ცვლილებას.

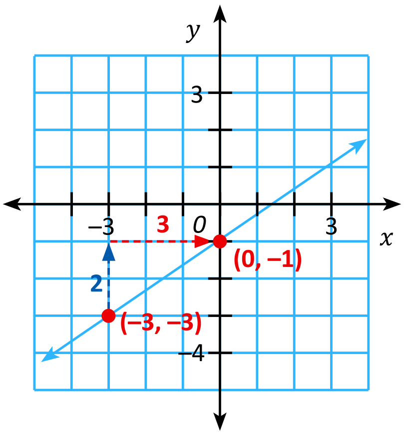
ნიმუში 1 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა) ჩვენ ვიცით, რომ

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში

$$k = \frac{2}{3}$$

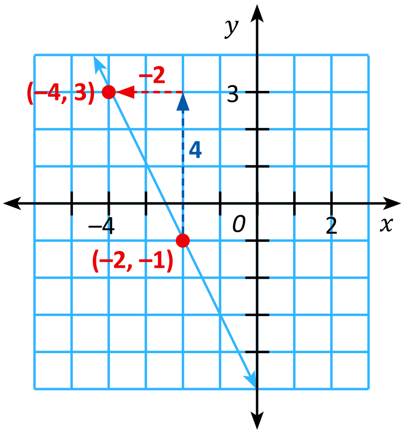


ბ) ჩვენ ვიცით, რომ

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

მოცემული წრფის შემთხვევაში

$$k = \frac{4}{-2} = -2$$



იმისათვის რომ ვიპოვოთ დახრილობა, იგივე კუთხური კოეფიციენტი k, საკმარისია ვიცოდეთ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი ორი წერტილის კოორდინატი, $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$ შემდეგ

$$k = \frac{\text{ვერტიკალური ცვლილება}}{\text{ჰორიზონტალურ ცვლილებასთან}}$$

$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ნიმუში 2 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ *k*-დახრილობა

ა) ვიცით, რომ

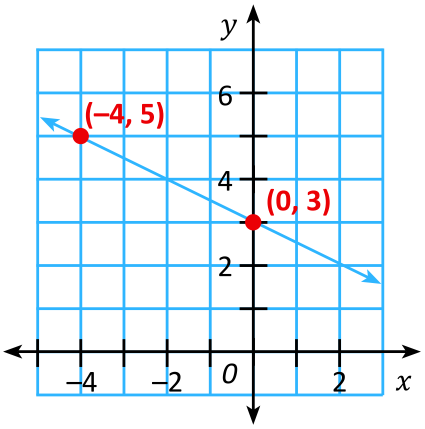
$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

თუ სიბრტყეზე მოცემულია წრფე და ავიღებთ ნებისმიერ ორ წერტილს კოორდინატებით $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

მოცემული წრფის შეემთხვევაში ავიღოთ ორი წერტილი, (0 ; 3) და (-4 ; 5), მაშინ მივიღებთ, რომ

$$k = \frac{5-3}{-4-0} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$



ნიმუში 3 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ *k*-დახრილობა

ა) ვიცით, რომ

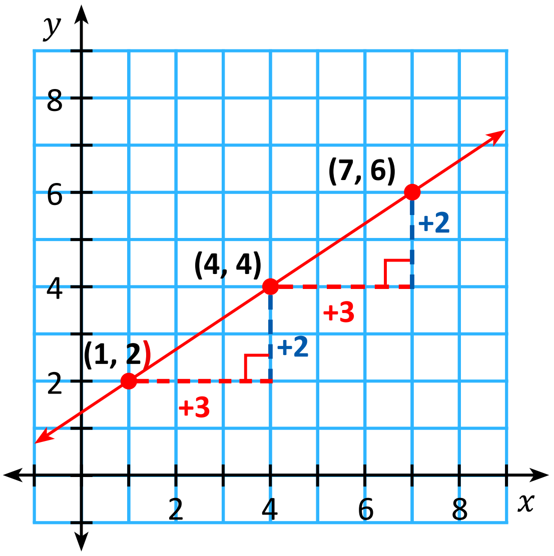
$$k = \frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

თუ სიბრტყეზე მოცემულია წრფე, და ამ წრფიდან ავიღებთ ნებისმიერ ორ წერტილს კოორდინატებით $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$ დახრილობა გამოითვლება ფორმულით;

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

მოცემული წრფის შეემთხვევაში ავიღოთ ორი წერტილი, (1; 2) და (4; 4), მაშინ მივიღებთ, რომ

$$k = \frac{2}{3}$$



ნიმუში 4

როგორც ვიცით, რომ ფუნქცია შეიძლება იყოს მოცემული, როგორც გრაფიკის მეშვეობით, ასევე განტოლებით.
როგორ ვიპოვოთ დახრილობა სხვადასხვა ფორმით მოცემული წრფის განტოლებიდან?

შეგახსენებთ, რომ როდესაც განტოლება შეიცავს ორ ცვლადს, რომელთა უმაღლესი ხარისხია ერთი, განტოლებას ეწოდება ორცვლადიანი წრფივი განტოლება.

ა) განვიხილოთ ტოლობა, რომელიც შეიცავს ორ ცვლადს: $4x + 2y = 0$;
წარმოვადგინოთ y ცვლადი, x-ის მეშვეობით (ეკვივალენტური ფორმით)

$$4x + 2y=0$$

$$2y = -4x$$

$$y = -2x$$

$y = -2x$ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა.
$y = -2x$ და $4x + 2y = 0$ ეკვივალენტური გამოსახულებებია, ე.ი. მოცემული განტოლება შეესაბამება პირდაპიპროპორციული დამოკიდებულებას.

y და x ცვლადებს შორის არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება.
$k = -2$, რომელიც შეესაბამება პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას (ასევე გვიჩვენებს დახრილობას).

ბ) განვიხილოთ გამოსახულება

$$4x + 2y = 8$$

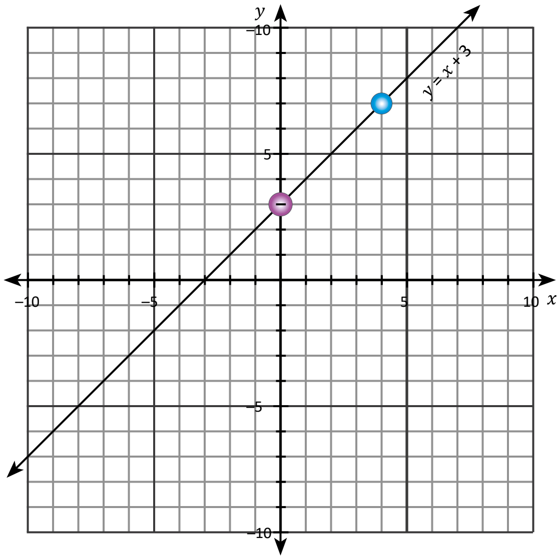
$$2y = -4x + 8$$

$$y = -2x + 4$$

მოცემულ გამოსახულებაში $k = -2$, აღნიშნული გამოსახულება არ არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, (თუმცა წრფივი ფუნქციაა).

ბ) სიბრტყეზე მოცემულია წრფე, დაადგინეთ მოცემული წრფე შეესაბამება თუ არა პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებას?

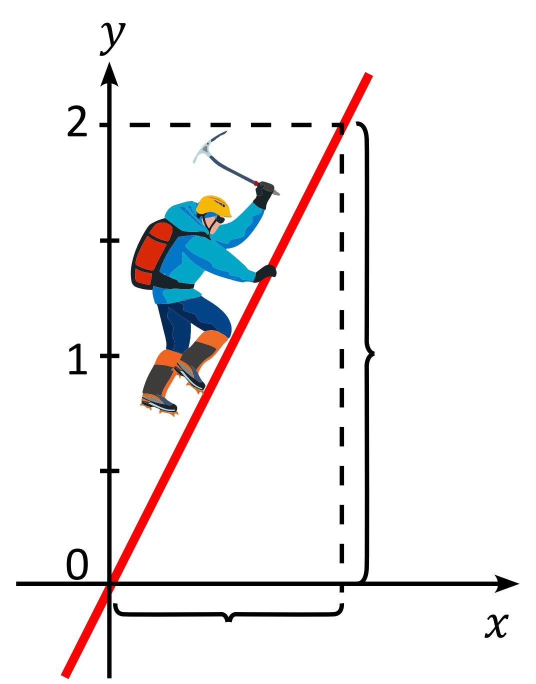
პასუხი: ჩვენ ვიცით, რომ პირდაპირპროპორციულობის ფუნქციის გრაფიკი არის წრფე, რომელიც გადის სათავეზე, რადგან მოცემული წრფე არ გადის სათავეზე, შესაბამისად, აღნიშნული წრფე არ შეესაბამება პირდაპიპროპოციულ დამოკიდებულებას. თუმცა არის წრფივი ფუნქცია.



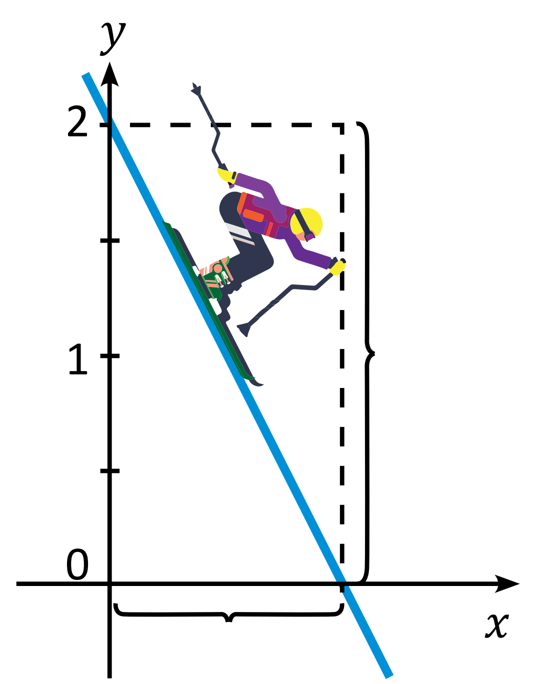
სავარჯიშოები

1. მოცემული ნახატის მიხედვით, იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი), იმსჯელეთ რა შემთხვევაშია კუთხური კოეფიციენტი დადებითი და რა შემთხვევაში უარყოფითი? რას გვიჩვენებს კუთხური კოეფიციენტის ნიშანი?

ნახაზი 1

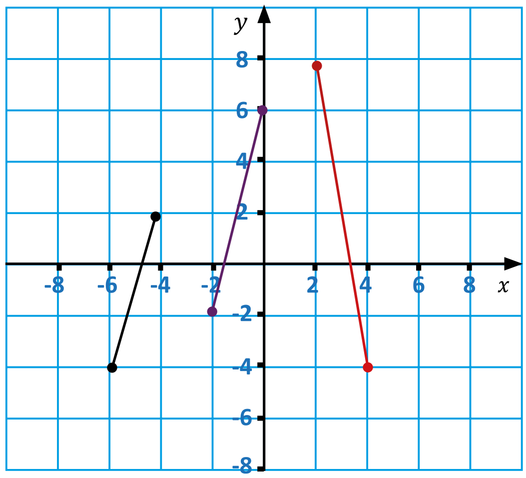


ნახაზი 2

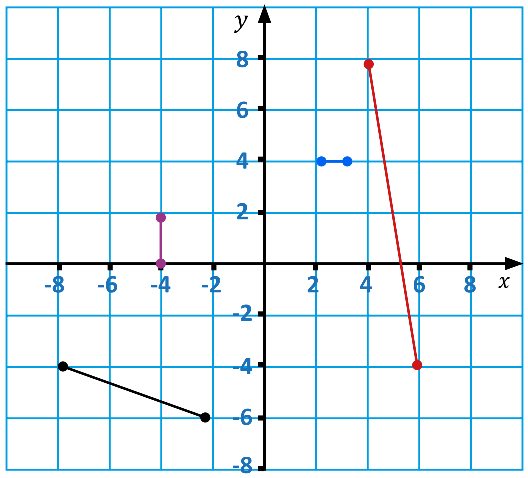


2. იპოვეთ მოცემული მონაკვეთების დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა)



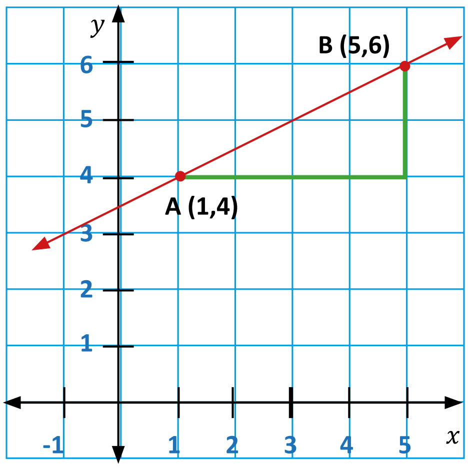
ბ)



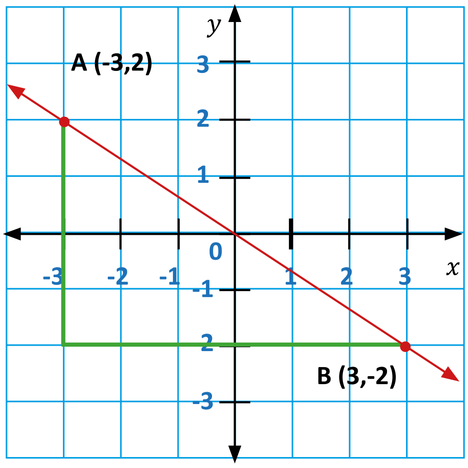
სავარჯიშოები

3. ქვემოთ მოცემული ნახაზებიდან გამომდინარე იპოვეთ თითოეული წრფის დახრილობა და ჩაწერეთ შესაბამისი განტოლება.

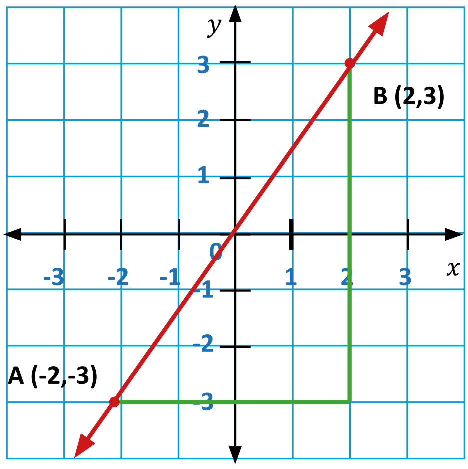
ა)



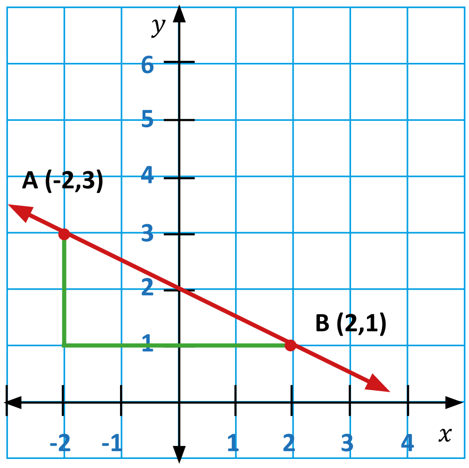
გ)



ბ)



დ)



4. **დაფიქრდი და დაასაბუთე:** რა შემთხვევაშია დახრილობა დადებითი და რა შემთხვევაში უარყოფითი? მოიყვანეთ რამდენიმე მაგალითი.

5. იპოვეთ კუთხური კოეფიციენტი (დახრილობა), თუ ვიცით რომ წრფე გადის შემდეგ ორ წერტილზე:

ა) (2; 5) და (4; 10);
ბ) (–5; 6) და (10; 6);
გ) (–1;4) და (1;12);
დ) (4; 3) და (4;10);
ე) (–2; –4) და (–6; –10);
ვ) (0; 3) და (–1; 6);
ზ) (1,5; 10) და (5,5; 12);
თ) (–5; 0) და (2,5; 7,5);
ი) (0; 0) და (3; –1).

სავარჯიშოები

6. დაადგინეთ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

ა) $3x - y = 0$; გ) $5x + 2y = 0$; ე) $7y - 3x = 0$;

ბ) $-4x - y = 0$; დ) $2{,}5x - 5y = 0$; ვ) $-1{,}3x + 4{,}2y = 0$.

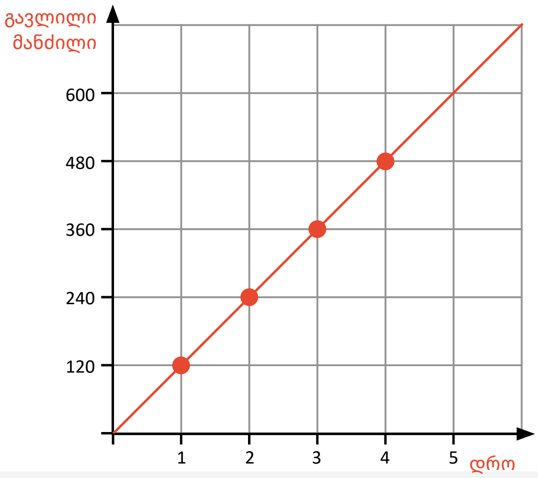
7. დაადგინეთ წრფივი დამოკიდებულების კუთხური კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

ა) $4x + 8y = 1$; გ) $-2x + 8y = 12$; ე) $-4x - y = 2$;

ბ) $5x - 2y = 7$; დ) $3x - 7y = -2$; ვ) $-1{,}5x - 6y = -10$.

8. გრაფიკზე მოცემულია ინფორმაცია:

- იპოვეთ მანქანის სიჩქარე;
- ჩაწერეთ შესაბამისი გამოსახულება;
- რას შეესაბამება კუთხური კოეფიციენტი?



9. დაადგინეთ, რომელია პირდაპირპროპროციული დამოკიდებულება, იპოვეთ პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი შემდეგი ტოლობებიდან:

ა) $3x - y = 0$; გ) $5x + 2y = 0$; ე) $7y - 3x = 0$;

ბ) $4x + 8y = 1$; დ) $-2x + 8y = 12$; ვ) $-4x - y = 2$.

ჯგუფური სამუშაო

10. მანქანა 1 წმ-ში გადის 6 მეტრს, ავტობუსი 4 მეტრს.

- დაწერეთ ტოლობა, რომელიც აღწერს მანქანის გადაადგილების დამოკიდებულებას დროზე. x-ით აღნიშნეთ დრო, y-ით განვლილი გზა.
- დაწერეთ ტოლობა, რომელიც აღწერს ავტობუსის გადაადგილების დამოკიდებულებას დროზე. x-ით აღნიშნეთ დრო, y-ით განვლილი გზა.
- ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ ორივე გრაფიკი და შეადარეთ.

3.7. წრფივი ფუნქცია

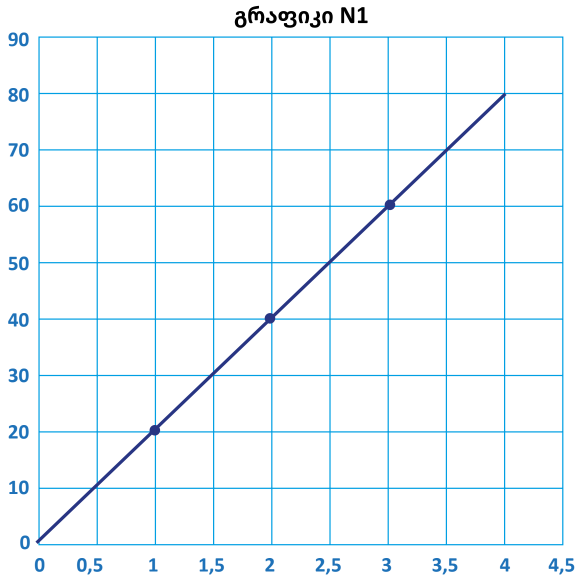
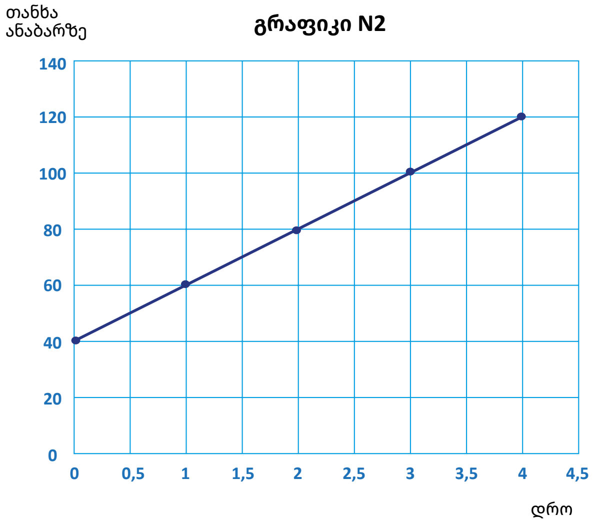
საკვანძო კითხვა:

- *შესაძლებელია თუ არა ანაბარზე თანხის დადების და სარგებლის დარიცხვის ვიზუალური წარმოდგენა?*

ნიმუში 1 – გრაფიკიდან გამომდინარე ვიპოვოთ k-დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

წინა პარაგრაფში განხილული იყო ორი შემთხვევა. ერთ შემთხვევაში მოსწავლემ გახსნა ანაბარი და ანაბარზე ყოველთვე დებდა 20 ლარს; მეორე შემთხვევაში მოსწავლეს ჰქონდა ანგარიშზე დანაზოგი 40 ლარის ოდენობით და ყოველთვე ანაბარზე დებდა 20-ლარს.

ჩვენ ავაგეთ ორივე შემთხვევის გრაფიკი და ჩავწერეთ სიტუაციის მათემატიკური მოდელი (ფორმულა/განტოლება).

შემთხვევა 1:	შემთხვევა 2:
	
$y = 20 \cdot x$	$y = 20 \cdot x + 40$

x – შეესაბამება თვეების რაოდენობას;

y – შეესაბამება ანგარიშზე არსებულ თანხას;

20 – ყოველთვიურ შენატანს, რომელიც არ იცვლება, მუდმივია;

40 – კი არის პირველადი მონაცემი, რა თანხა იყო ანგარიშზე.

გაგრძელება

მოცემულ ნიმუშში, მოცემულია წესი, რა წესითაც y დამოკიდებულია x-ზე.

$$y = 20 \cdot x + 40$$

დამოკიდებული ცვლადი

დამოუკიდებელი ცვლადი

- **განსაზღვის არე** – რიცხვები, რომელიც შეიძლება ჩავსვათ x-ის ნაცვლად, არაუარყოფითი რიცხვებია (0 და დადებითი რიცხვები);
- **მნიშვნელობათა სიმრავლე** – რიცხვები რომელიც შეესაბამება y-ს, პირველ მაგალითში იწყება 0-დან, ხოლო მეორე მაგალითში 40-დან.

როგორც ვხედავთ, ორივე შემთხვევაში გრაფიკი წრფეა.

ორი X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როდესაც X სიმრავლის ყოველ ელემენტს განსაზღვრის არიდან (x ელემენტს) შეესაბამება Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი (y ელემენტი) მნიშვნელობათა არიდან, **ფუნქცია** ეწოდება.

X-სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება,
Y-სიმრავლეს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ნებისმიერ x ელემენტს X-სიმრავლიდან დამოუკიდებელი ცვლადი ეწოდება; ხოლო ნებისმიერ y ელემენტს Y-სიმრავლიდან დამოკიდებული ცვლადი.

$$y = kx + b$$

აღნიშნული წესით მოცემულ ფუნქციას, სადაც k და **b** ნამდვილი რიცხვებია, **წრფივი ფუნქცია** ეწოდება. ვამბობთ, რომ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით/განტოლებით. ფუნქციის მოცემის აღნიშნულ ხერხს ეწოდება ანალიზური ხერხი;

- k-ს ეწოდება დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი), ხოლო **b** – გვიჩვენებს y ღერძთან გადაკვეთის წერტილს (0; b)
- წრფივი ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ვწერთ $x \in$ R
- წრფივი ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ვწერთ $y \in$ R

მინიშნება: განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე ზუსტდება, როდესაც ხდება რეალური მოვლენის აღწერა ან ამოცანის პირობიდან გამომდინარე.

$$y = kx$$

$y = kx + b$ წრფივ ფუნქციაში, როდესაც **$b = 0$**-ს ვიღებთ $y = kx$ ფუნქციას, ვიტყვით, რომ $y = kx$ წარმოადგენს $y = kx + b$ ფუნქციის კერძო შემთხვევას.

$$y = b$$

$y = kx + b$ წრფივ ფუნქციაში, თუ $k = 0$, ვიღებთ $y = b$ მუდმივ ფუნქციას.

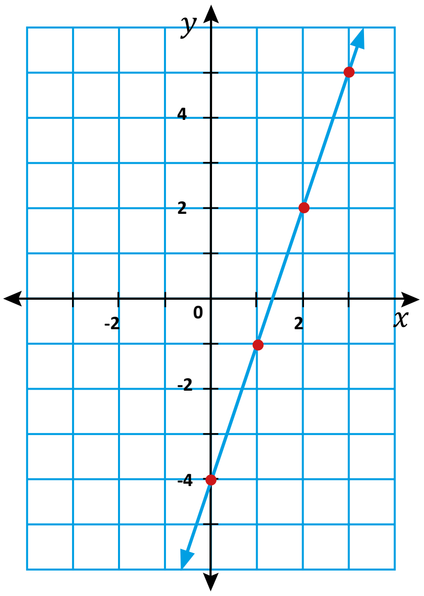
ნიმუში 2 – ავაგოთ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი

ა) ავაგოთ მოცემული წრფივი ფუნქციის გრაფიკი $y = 3x - 4$

დამოუკიდებელი ცვლადი	გამოთვლის პროცესი	დამოკიდებული ცვლადი	წერტილთა წყვილები
x	$3x - 4$	y	$(x; y)$
0	$3 \cdot 0 - 4$	–4	(0; –4)
1	$3 \cdot 1 - 4$	–1	(1; –1)
2	$3 \cdot 2 - 4$	2	(2; 2)
3	$3 \cdot 3 - 4$	5	(3; 5)

დავაჯგუფოთ მონაცემები და გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე (0; –4), (1; –1), (2; 2), (3; 5)

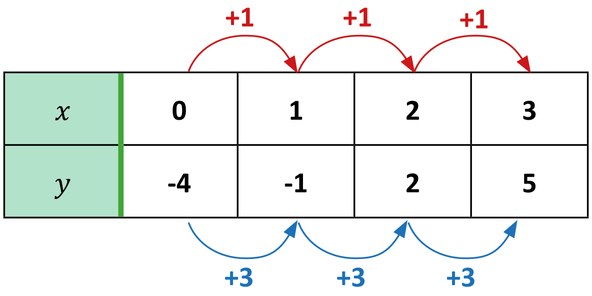
$y = 3x - 4$ ფუნქციის გრაფიკი წრფეა, ყველა წერტილის გადატანით და შეერთებით მიიღება წრფე, მოცემულ წრფეზე მდებარეობს ყველა რიცხვითი წყვილი რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციის გამოსახულებას.



$y = kx + b$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას ორცვლადიან წრფივ განტოლებასაც ეძახიან

ბ) აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება

დავაკვირდებით $y = 3x - 4$ ფუნქციის წყვილებს



x	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**-4**	**-1**	**2**	**5**

როდესაც ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია თუ დამოუკიდებელი ცვლადის ერთი და იგივე რიცხვით ზრდა იწვევს დამოკიდებული ცვლადის ერთი და იგივე რიცხვით ზრდას, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ რომ მოცემულია **წრფივი ფუნქცია.**

ცხრილზე დაკვირვებით ვხედავთ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის (x-ცვლადის) ერთით გაზრდა, იწვევს y ცვლადის 3-ით გაზრდას.

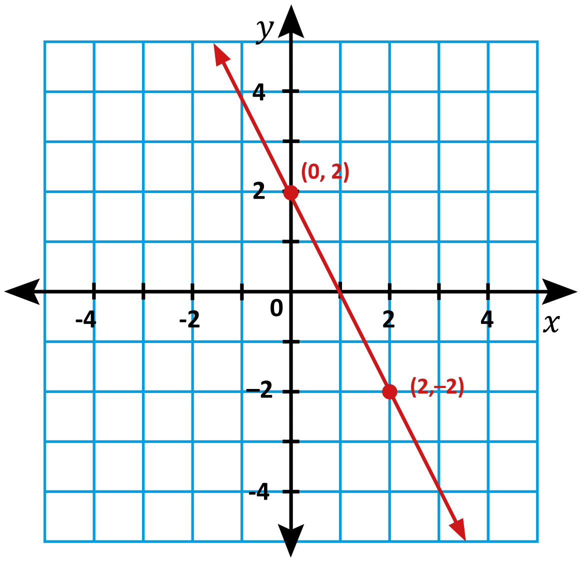
ვიცით, რომ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ რადგან x ერთით იცვლება და y ცვლადი 3-ით, ე.ი. $k = 3$;

$x = 0$-თვის მიღებული y-ის მნიშვნელობა, შეესაბამება b-ს. ცხრილით შეგვიძლია დავადგინოთ რომ

$b = -4$

ნიმუში 3 – როგორ არის შესაძლებელი გრაფიკიდან წრფივი ფუნქციის ჩაწერა

გრაფიკზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, დაწერეთ შესაბამისი წრფივი ფუნქცია.



ამოხსნა:

ჩვენ ვიცით, რომ წრფივი ფუნქციის ზოგადი ფორმაა $y = kx + b$,

როგორც ვიცით, $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

k-ს საპოვნელად გვჭირდება ორი წერტილის კოორდინატების ცოდნა. გრაფიკზე, მოცემულია წერტილები (0; 2), (2; –2)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

როგორ ვიპოვოთ b?

b გვიჩვენებს, რა წერტილში კვეთს წრფე *y* ღერძს. გრაფიკიდან ჩანს, რომ წრფე *y* ღერძს კვეთს წერტილში (0; 2), ე.ი. $b = 2$

მოცემული წრფის განტოლებაა

$y = -2x + 2$

ნიმუში 4 – აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება

ცხრილით მოცემულია შესაბამისობა ორ სიმრავლეს შორის, რომელიც წარმოადგენს ფუნქციას.

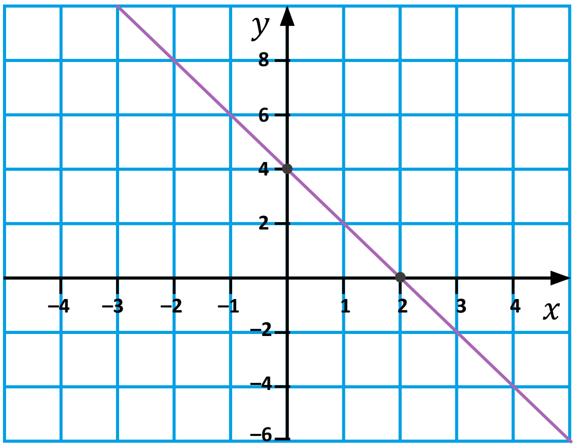
თუ დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ *x* ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით (2-ით) გაზრდა იწვევს *y* ცვლადის 4-ით შემცირებას.

x	y
-2	8
0	4
2	0
4	-4

+2
+2
+2

-4
-4
-4

თუ გადავიტანთ წერტილთა წყვილებს საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთებთ, მივიღებთ წრფეს, რომლის განტოლებაა $y = -2x + 4$



გაგრძელება

გამოდის, რომ მუდმივია

$$\frac{y\text{-ის ცვლილება}}{x\text{-ის ცვლილებასთან}}$$

ნებისმიერი ორი წერტილისთვის

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -2$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, y წრფივად არის დამოკიდებული x-ზე.

დასკვნა:

როდესაც სიდიდეებს შორის მოცემულია შესაბამისობა ცხრილით, თუ x ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით გაზრდა (ან შემცირება) იწვევს y ცვლადის ერთი და იმავე რიცხვით ცვლილებას, მაშინ ვიტყვით, რომ ცხრილით მოცემული ინფორმაციით, **ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება.**

ნიმუში 5 – ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები

მოცემულია $y = -x + 2$ წრფივი ფუნქცია, ვიპოვოთ x და y ღერძებთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

მსჯელობა:

ვიცით, რომ წრფივი ფუნქციის განტოლებაში b გვიჩვენებს თუ რა წერტილში კვეთს გრაფიკი y-ღერძს,

განტოლებიდან ჩანს, რომ $b = 2$, ე.ი. წრფის y-ღერძის კვეთის წერტილია (0; 2);

ზოგადად, უნდა შევავსოთ ცხრილი:

x	y
0	
	0

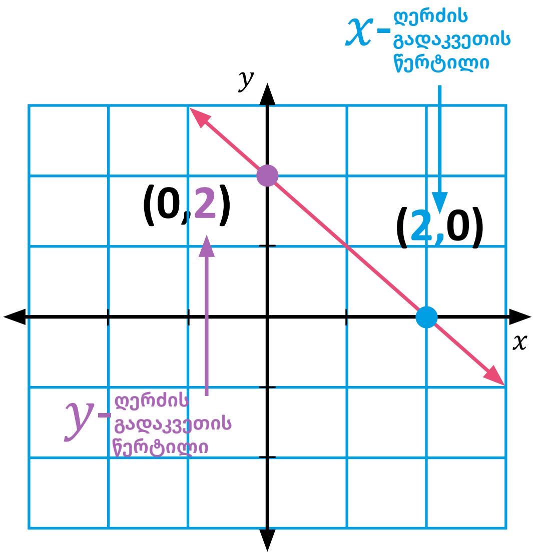
x-ცვლადის ნაცვლად ჩავსვათ 0-ვიპოვით y ღერძის კვეთის წერტილი (0; 2); შემდეგ y ცვლადის ნაცვლად ჩავსვათ 0 და ვიპოვით x ღერძის კვეთის წერტილს (2; 0)

$$0 = -x + 2$$

$$x = 2$$

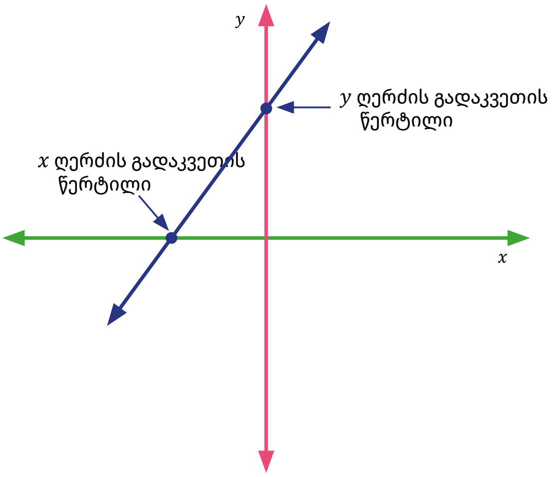
თუ გადავიტანთ წერტილთა წყვილებს საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთებთ მივიღებთ წრფეს, რომლის განტოლებაა

$y = -x + 2$

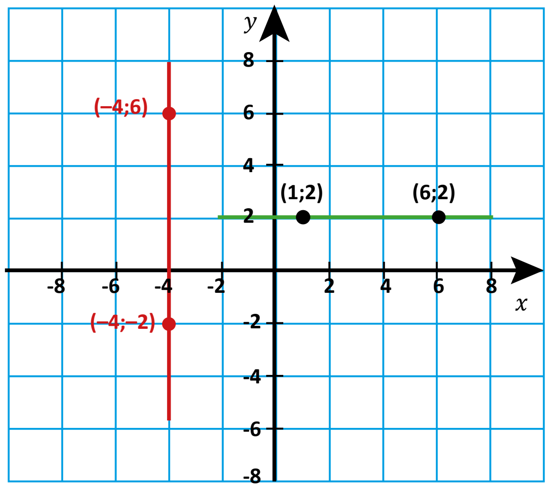


როდესაც გრაფიკი კვეთს x-ღერძს, გადაკვეთის წერტილის y კოორდინატი არის 0. როდესაც გრაფიკი კვეთს y-ღერძს, გადაკვეთის წერტილის x კოორდინატი არის 0.

წრფის ასაგებად საკმარისია წრფეზე მდებარე 2 წერტილის კოორდინატის პოვნა.



ნიმუში 6 – ღერძების პარალელური წრფეების დახრილობა



განვიხილოთ **მწვანე წრფე,** რომელზეც მდებარეობს ორი წერტილი (1;2) და (6;2)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{6-1} = 0$$

x ღერძის პარალელური წრფის დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი) 0-ის ტოლია.

განვიხილოთ **წითელი წრფე**, რომელზეც მდებარეობს ორი წერტილი (−4;−2) და (−4;6)

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{-4-(-4)} = \frac{8}{0}$$

ჩვენ ვიცით, რომ 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება, შესაბამისად y ღერძის პარალელური წრფის დახრილობა განუსაზღვრელია (წრფე მართობულია Ox ღერძის).

შეჯამება:

წრფივი ფუნქცია შეიძლება იყოს მოცემული სიტყვიერად, აღწერით, ცხრილით გრაფიკულად, ანალიზურად (განტოლების სახით)

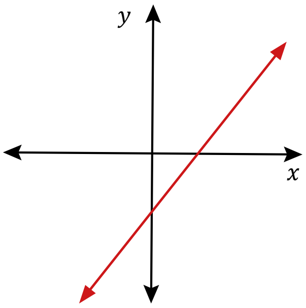
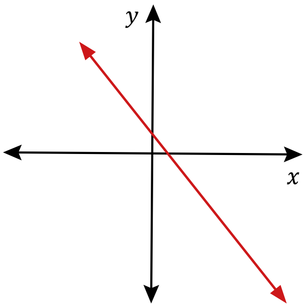
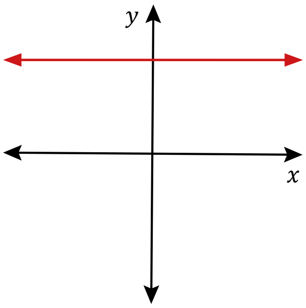
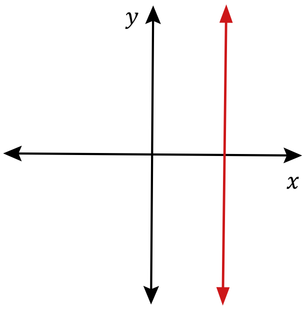
$$y = kx + b$$

დახრილობა

მუდმივი
(y ღერძთან გადაკვეთის წერტილი)

წრფე x-ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატია $\left(\frac{-b}{k};0\right)$

წრფე y-ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის კოორდინატია $(0;b)$

როდესაც დახრილობა დადებითია $K > 0$	როდესაც დახრილობა უარყოფითია $K < 0$	როდესაც $K = 0$	ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა როცა $x = a$ წრფე გადის წერტილზე კოორდინატით $(a;0)$
			
კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის მახვილია	კუთხე წრფესა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის ბლაგვია	წრფე Ox ღერძის პარალელურია	წრფე არის Oy ღერძის პარალელური, Ox ღერძის მართობული

სავარჯიშოები

1. მოცემულია ფუნქცია და ცხრილი. გადაიხაზეთ რვეულში ცხრილი და შესაბამისი ფუნქციიდან გამომდინარე შეავსეთ:

ა) $y = -4x$

x	0	1	2
y			

ბ) $y = 2x + 4$

x	0	1	2
y			

გ) $y = -3x + 1$

x	2	5	8
y			

დ) $y = -2x + 8$

x		0		5
y	–2		6	

ე) $y = 20 - 5x$

x	0	4	8	
y				–60

ვ) $y = -4x + 10$

x	–4	–2	0	2
y				

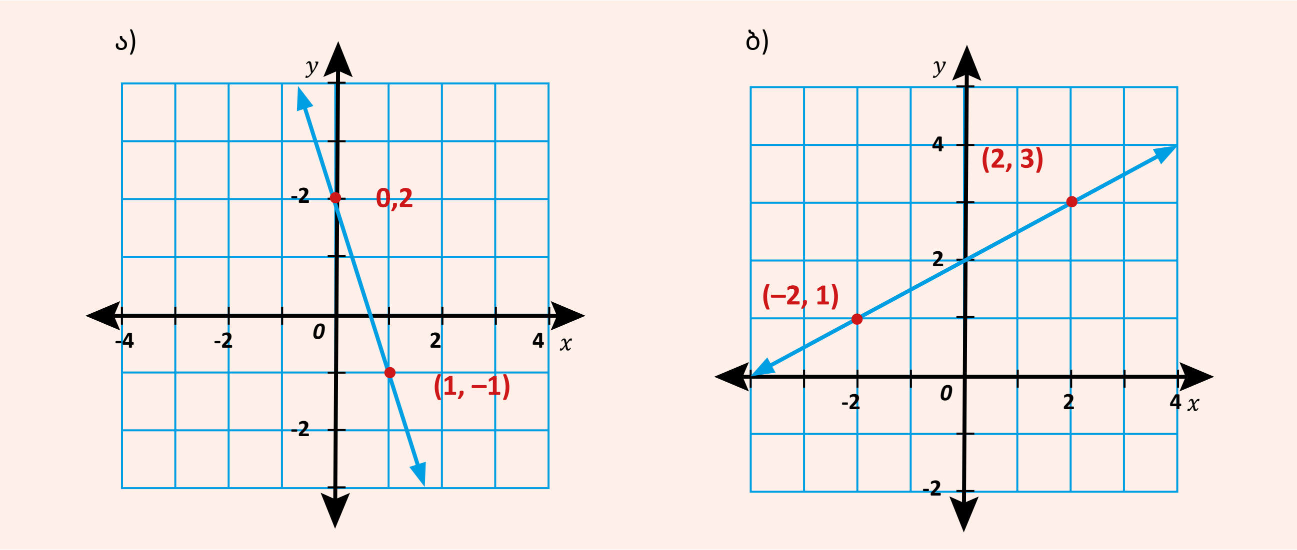
2. ააგეთ ქვემოთ მოცემული წრფივი ფუნქციის გრაფიკები:

ა) $y = 2x + 3$; ბ) $y = 5x - 2$ გ) $y = -3x - 1$ დ) $y = -4x + 3$

3. დაწერეთ ფუნქცია თუ ვიცით:

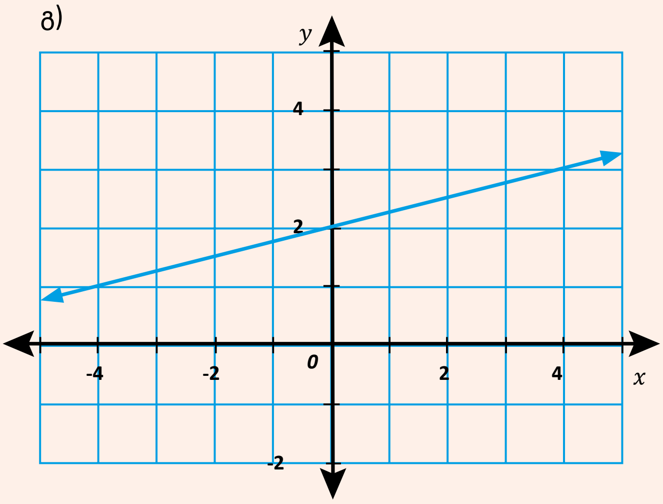
ა) კუთხური კოეფიციენტი = 4; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 3;
ბ) კუთხური კოეფიციენტი = 5; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია –10;
გ) კუთხური კოეფიციენტი = –3.5; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია –2;
დ) კუთხური კოეფიციენტი = 0; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 5;
ე) კუთხური კოეფიციენტი = –1; y ღერძის გადაკვეთის წერტილია 0.

4. ჩაწერეთ მოცემული გრაფიკების შესაბამისი განტოლებები:

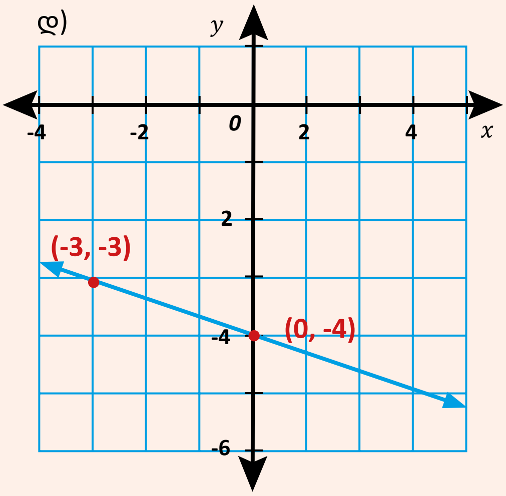


სავარჯიშოები

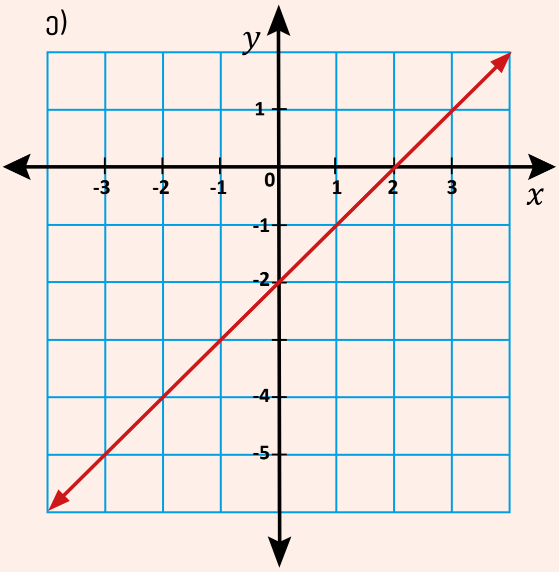
გ)



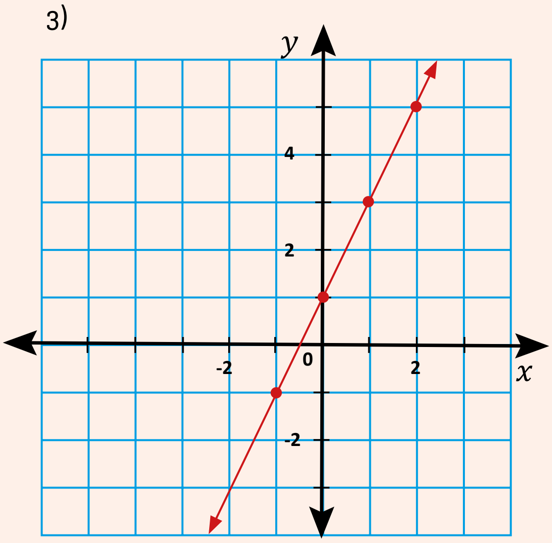
დ)



ე)



ვ)



5. შეამოწმეთ ეკუთვნის თუ არა $y = 2x + 6$ ფუნქციას შემდეგი წერტილი:

ა) (–4;20); ბ) (2;10); გ) (–2;–2); დ) (–2;2); პასუხი დაასაბუთეთ

6. შეამოწმეთ ეკუთვნის თუ არა $y = -4x + 2$ ფუნქციას შემდეგი წერტილი:

ა) (0;2); ბ) (–2;4); გ) (2;6); დ) (–6;22); პასუხი დაასაბუთეთ

7. იპოვეთ ფუნქციის ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და შემდეგ ააგეთ გრაფიკი, თუ მოცემულია:

ა) $y = 2x - 4$; ბ) $y = -5x - 10$; გ) $y = -x + 4$; დ) $y = -2x + 1$.

სავარჯიშოები

8. მოცემული ფუნქციის გრაფიკებიდან გამომდინარე შეავსეთ შესაბამისი წრფის ცხრილი.

წრფე A

ა)

x	−3	−2	0	1
y				

წრფე B

დ)

x	−4	−2	0	2
y				

წრფე C

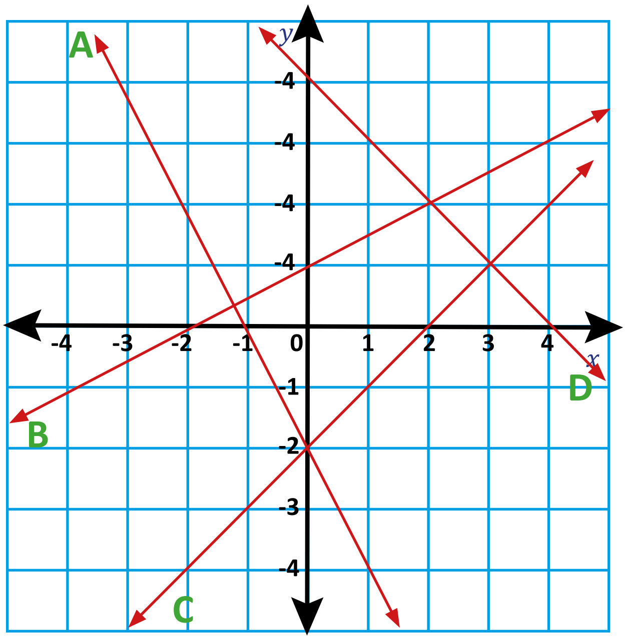
ა)

x	−2	−1	2	3
y				

წრფე D

დ)

x	−1	0	2	4
y				

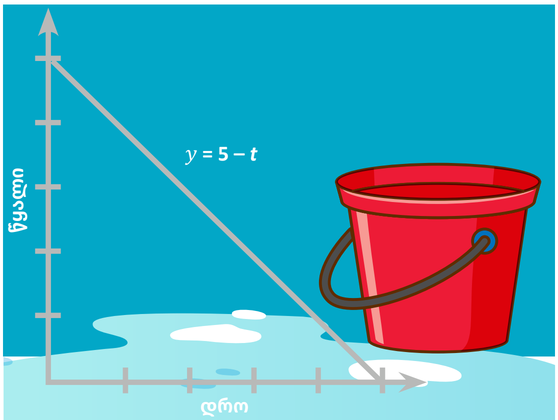


9. მოიფიქრეთ ამოცანა, რომელიც შეიძლება შეესაბამებოდეს დიაგრამაზე მოცემულ სიტუაციას.

იმსჯელეთ

ა) რა სიდიდეებია გადაზომილი X და Y ღერძებზე

ბ) რას შეიძლება გვეუბნებოდეს სიტუაციის აღმწერი განტოლება



10. ლანამ დაიწყო აუზზე სიარული, სადაც ერთჯერადი საწევრო გადასახადი იყო 50 ლარი, ყოველ შესვლაზე გადასახდელი თანხა კი 15 ლარი.

- მწარმოადგინეთ მოცემული სიტუაცია მათემატიკური მოდელით (დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას).
- 17 ვიზიტის შემდეგ სულ რამდენი თანხა ექნება გადახდილი?
- თუ ლანას აქვს სულ 380 ლარი აქვს ცურვისთვის განკუთვნილი, რამდენ გაკვეთილზე შეძლებს დასწრებას?

სავარჯიშოები

11. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების ღერძებთან გადაკვეთის წერტილი კოორდინატები:

ა) $y = 12x + 6$; გ) $y = -5x + 12$;

ბ) $y = 4x - 12$; დ) $y = -2.5x + 7.5$.

12. **გამოწვევა:** ააგეთ შემდეგი წრფივი ფუნქციის გრაფიკი $2.5x + 4y = 10$.

13. STEM **კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან.** გახსენით ბმული DESMOS — მარათონი და შეასრულეთ მე-8, მე-9, მე-10 და მე-11 დავალებები.

14. **გამოწვევა:**ბიზნესის დაწყების წინ მეწარმეს ჰქონდა 2 მილიონი ლარი, ყოველთვიური ხარჯი შეადგენს 30 000 ლარს.

- შემოიტანეთ აღნიშვნები;
- შეადგინეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი (განტოლება);
- გამოიანგარიშეთ, რამდენი თვე ეყოფა თანხა გადასახადების დაფარვაში?

15. სტუდენტმა იყიდა კომპიუტერი, რომელშიც გადაიხადა 5000 ლარი. დავუშვათ, რომ ყოველთვე კომპიუტერის ფასი იკლებს საწყისი ფასის 5%-ით (ყოველ წელს ფასის კლებას ეწოდება ცვეთის დარიცხვა).

- წარმოადგინეთ აღნიშნული ამოცანა მათემატიკური მოდელით, დაწერეთ განტოლება, რომელიც გვიჩვენებს ფასის დამოკიდებულებას წლებზე.
- რა იქნება კომპიუტერის ფასი 3 წლის მერე?
- რამდენიმე წლის მერე სტუდენტმა კომპიუტერი გაყიდა 3500 ლარად, რამდენი წელი ჰქონდა კომპიუტერი?

16. იპოვეთ წრფის განტოლება, რომელიც შემდეგ ორ წერტილზე გადის:

ა) (1;4) და (2;6); გ) (0;-2) და (2;6); ე) (8;10) და (-2;10);

ბ) (-2 ; 8) და (2; 10); დ) (2 ; -4) და (2; 10); ვ) (-3 ; 10) და (3; 4).

მითითება: ჯერ იპოვეთ დახრის კოეფიციენტი *k*, შემდეგ *b*.

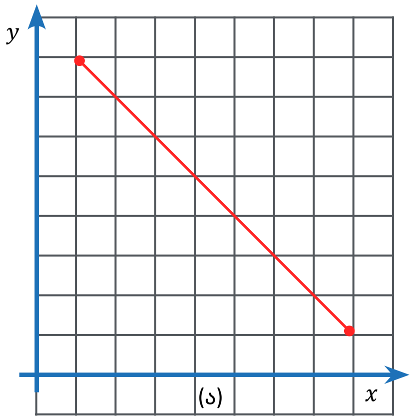
17. გამოსახეთ y x-ის მეშვეობით, ჩაწერეთ თითოეული განტოლება $y = kx + b$ ფორმით და ააგეთ გრაფიკი:

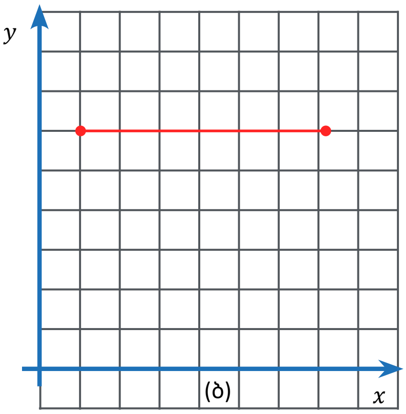
ა) $6x + 2y = 10$; გ) $-2x + 4y = 12$; ე) $9x - 3y = 12$;

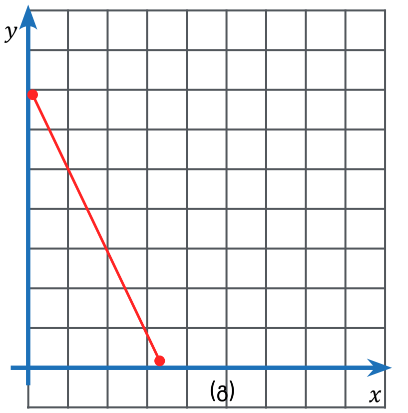
ბ) $5y + y = -4$; დ) $15x - 10y = 25$; ვ) $-5x + 2y = 14$.

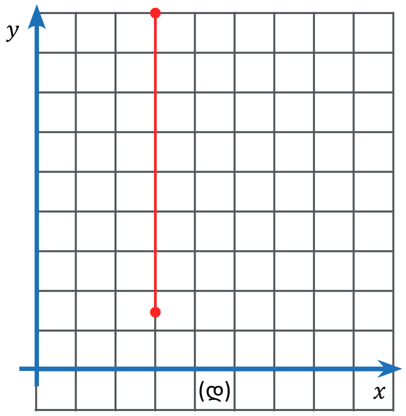
18. გრაფიკებიდან გამომდინარე განსაზღვრეთ დახრილობა დადებითია, უარყოფითი, 0-ის ტოლი თუ განუსაზღვრელი?

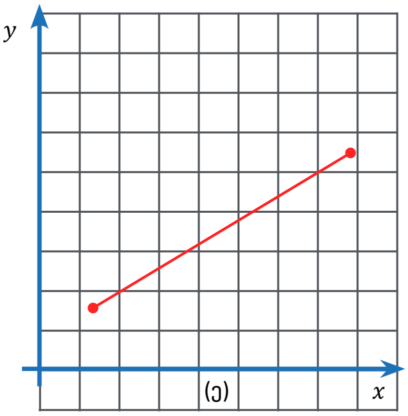
სავარჯიშოები

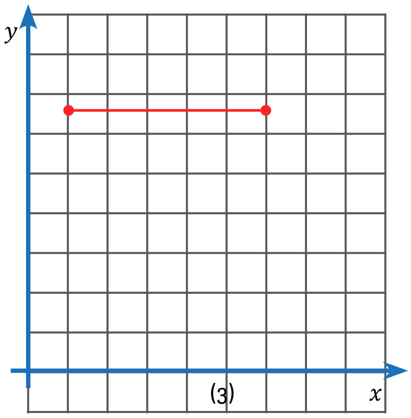






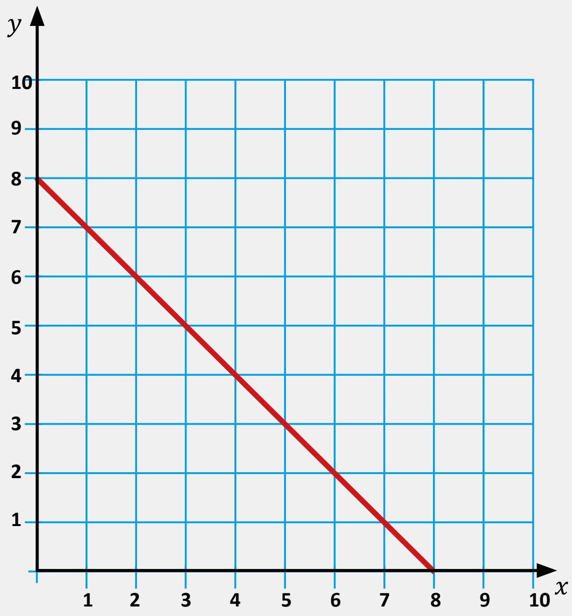




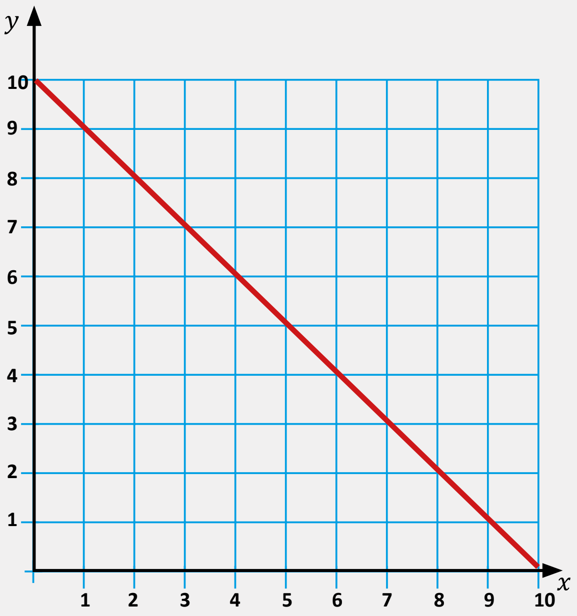


19. ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან გამომდინარე დაწერეთ თითოეული წრფივი ფუნქციის შესაბამისი განტოლება:

ა)



ბ)



ᲡᲐᲕᲐᲠᲯᲘᲨᲝᲔᲑᲘ

წრფივი ფუნქციის შესაბამისი განტოლების დაწერის შემდეგ აღწერეთ პროცესი. რომელი წერტილები გამოიყენეთ განტოლების ჩასაწერად?

20. ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან რომელია $y = 3x + 1$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება?
ᲛᲘᲗᲘᲗᲔᲑᲐ: ორი წრფე პარალელურია, თუ მათი კუთხური კოეფიციენტები ტოლია.
ა) $y = -3x + 4$; ბ) $y = 3x - 4$; გ) $y = 5x$; დ) $y = x - 1$.

21. ჩამოთვლილი ფუნქციებიდან რომელია $y = -2x - 5$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება?
ᲛᲘᲗᲘᲗᲔᲑᲐ: ორი წრფე პარალელურია, თუ მათი კუთხური კოეფიციენტები ტოლია:
ა) $y = -2x + 4$; ბ) $y = -3x$; გ) $y = 0{,}5x$; დ) $y = -0{,}5x - 2$.

22. გაითვალისწინეთ ორი წრფის პარალელურობის პირობა და ამოხსენით მოცემული ამოცანები:
ა) დაწერეთ $y = 4x - 3$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;5);
ბ) დაწერეთ $y = 5x$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;–3);
გ) დაწერეთ $y = -3x - 1$ წრფის პარალელური განტოლება თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;2);
დ) დაწერეთ $y = 5x + 2$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, რომელიც გადის (2:0) წერტილზე.

ᲠᲔᲐᲚᲣᲠᲘ ᲞᲠᲝᲪᲔᲡᲘᲡ ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲣᲠᲘ ᲛᲝᲓᲔᲚᲘᲠᲔᲑᲐ:

23. ორმა მოსწავლემ გადაწყვიტა ცურვაზე სიარული და ამისათვის:

I. პირველი მოსწავლე თითოეულ გაკვეთილში იხდის 7 ლარს.
II. მეორე მოსწავლემ გადაიხადა საცურაო აუზის საწევრო ერთჯერადი გადასახადი 10 ლარი, ხოლო შემდეგ ყოველ გაკვეთილში იხდის 5 ლარს.

- წარმოადგინეთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელი (დაწერეთ ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას);
- ააგეთ მიღებული ფუნქციების გრაფიკები ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე;
- დაადგინეთ რამდენი ლარი ექნება დახარჯული თითოეულ მოსწავლეს 5 დღის შემდეგ? 9 დღის შემდეგ?
- გააკეთეთ მიღებული შედეგების ანალიზი და გამოიტანეთ შესაბამისი დასკვნები.

24. **იპოვეთ შეცდომა:** მოსწავლეს უნდოდა დაეწერა წრფის განტოლება, მან წრფიდან შეარჩია ორი წერტილი (2; –4) და (4; 10); k დახრილობის საპოვნელად დაწერა, რომ $k = \frac{4-2}{10-(-4)}$; რა შეცდომა დაუშვა მოსწავლემ? დაეხმარეთ მოსწავლეს დაწეროს მოცემული წრფის განტოლება.

3.8. წრფივი ფუნქცია, გარდაქმნები

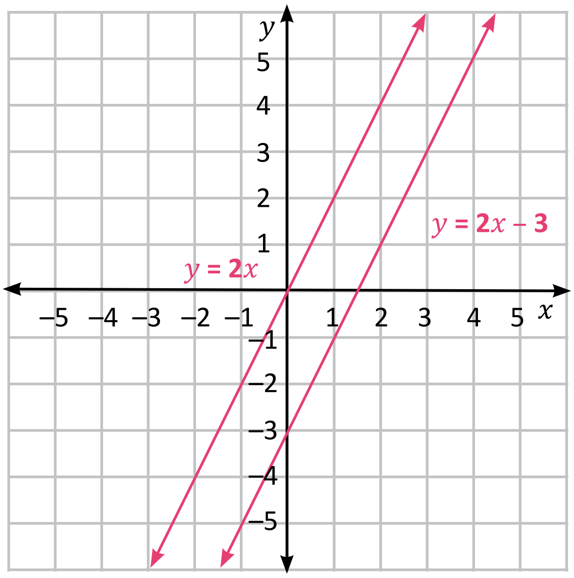
კვლევა

ნიმუში 1

ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ორი წრფივი ფუნქცია, რომელთა განტოლებებია $y = 2x$ და $y = 2x - 3$

დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ცხრილით:

x	$y = 2x$	$y = 2x - 3$
−2	**−4**	**−7**
−1	**−2**	**−5**
0	**0**	**−3**
1	**2**	**−1**
2	**4**	**1**

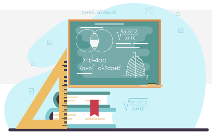


თუ მოცემულია ორი წრფივი ფუნქციის განტოლება:

$y = k_1x + b_1$ და $y = k_2x + b_2$

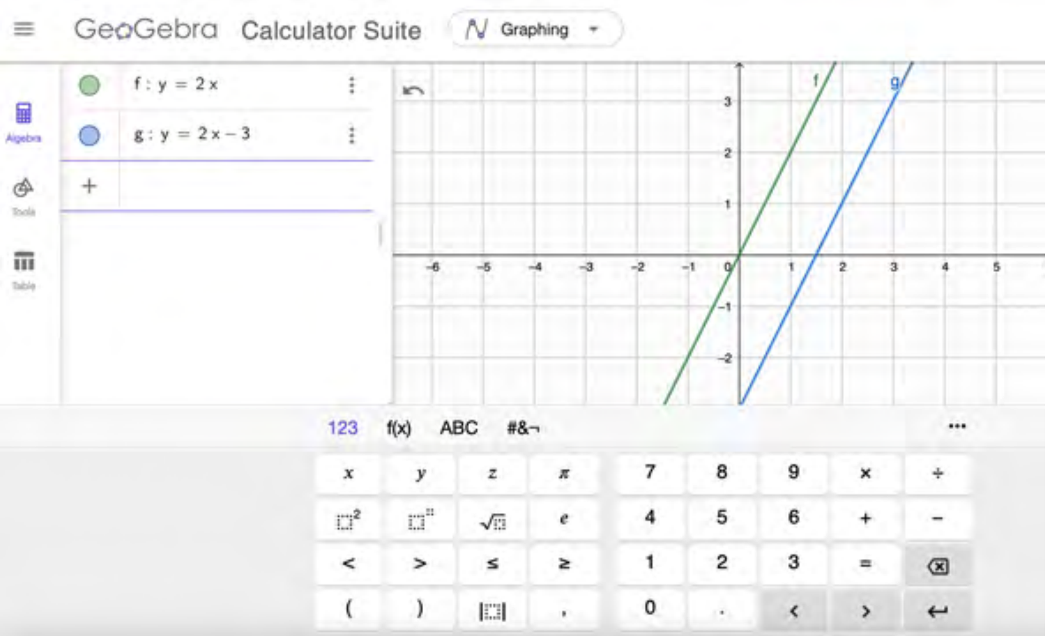
სადაც კუთხური კოეფიციენტები ტოლია $k_1 = k_2$ და b განსხვავებულია, მაშინ წრფეები პარალელურია.

ჩვენს შემთხვევაში, კუთხური კოეფიციენტები ტოლია, $k_1 = k_2 = 2$, b განსხვავებულია. ვიტყვით, რომ $y = 2x - 3$ მიიღება $y = 2x$ წრფის პარალელური გადატანით 3-ერთეულით ქვევით.



MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

- კომპიუტერის მეშვეობით შედით საიტზე ან მობილურის მეშვეობით გადმოწერეთ აპლიკაცია Geogebra (გეოგებრა).
- 🔗 www.geogebra.org საიტზე შესვლის შემდეგ, გრაფიკების ასაგებად აირჩიეთ Start Graphing გამოჩნდება საკოორდინატო სიბრტყე და პატარა ფანჯარა, რომლის გადართვაც შესაძლებელია სამ სხვადასხვა რეჟიმზე.
- საიტის მეშვეობით შეგიძლიათ ააგოთ სხვადასხვა გეომეტრიული ფიგურა. ვიზუალიზაცია დაგეხმარებათ საკითხის უკეთესად გაგებასა და აღქმაში.



f : y = 2x

g : y = 2x − 3

მარცხნივ მდებარე ფანჯრის რეჟიმები:

- პირველ რეჟიმზე ჩანს იმ წერტილის კოორდინატები, რომლებსაც მოვნიშნავთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. (ასევე პირველი რეჟიმის ჩართვისას შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმულა, რომლის მიხედვითაც საკოორდინატო სიბრტყეზე პირდაპირ აგვიგებს პროგრამა გრაფიკს.)
- მეორე რეჟიმი გვაძლევს საშუალებას, ავირჩიოთ გეომეტრიის საბაზისო ელემენტები: წერტილი, წრფე, მონაკვეთი, სხივი და ავაგოთ ფიგურა.
- მესამე რეჟიმში ჩანს ცხრილები, რომელსაც მაღალ კლასებში გავეცნობით.

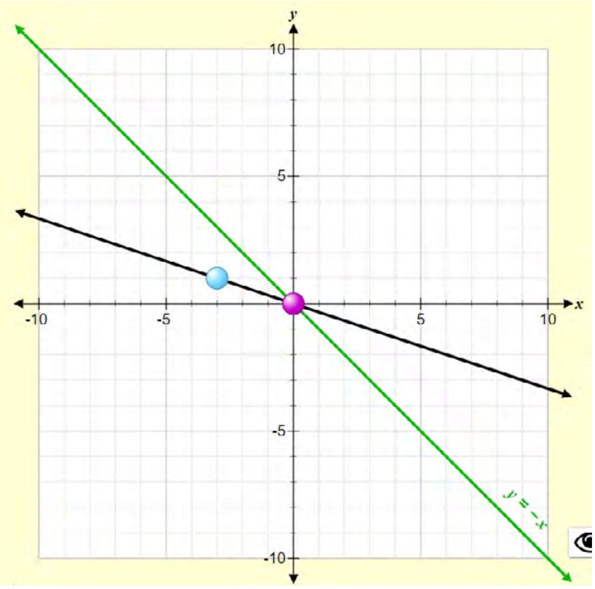
შედით საიტზე 🔗 Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ სხვადასხვა წრფივი ფუნქციის გრაფიკი და გამოიკვლიეთ წრფივი ფუნქციები.

ნიმუში 2

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ $y = -1 \cdot x$ და $y = -\frac{1}{3} \cdot x$

$y = -x$	
x	y
0	**0**
1	**–1**

$y = -\frac{1}{3} \cdot x$	
x	y
0	0
1	$-\frac{1}{3}$



Phet.Colorado.edu

ბოლო ორი ნიმუშიდან გამომდინარე ვხედავთ, რომ

- როდესაც $k > 0$-ზე, რაც უფრო დიდია k-კოეფიციენტი, კუთხე წრფესა და x ღერძის დადებით მიმართულებასთან იზრდება;
- როდესაც $k < 0$-ზე, რაც უფრო დიდია k-კოეფიციენტის მოდული, კუთხე წრფესა და x ღერძის უარყოფით მიმართულებასთან იზრდება;
- გამომდინარე იქიდან, რომ k გვიჩვენებს რამდენადაა დახრილი წრფე x ღერძთან, k-ს ასევე ეწოდება დახრილობა, ან კუთხური კოეფიციენტი.

სავარჯიშოები

1. დახაზეთ, y =-7x, $y = -4x$, $y = -2x$ ფუნქციის გრაფიკები და დაადგინეთ, როგორ მოქმედებს კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება გრაფიკზე?

2. დახაზეთ, $y = x$, $y = 4x$, $y = 6x$ ფუნქციის გრაფიკები და დაადგინეთ, როგორ მოქმედებს კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება გრაფიკზე?

3. **ტექნოლოგიები:** შედით საიტზე 🔗 Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ $y = -2x$ $y = -2x + 2$, $y = -2x - 2$, $y = -2x - 6$ წრფეების გრაფიკები და იმსჯელეთ მათზე.

4. როგორც ხედავთ, ყველა ფუნქციას კუთხური კოეფიციენტები ტოლი აქვთ, გამოიკვლიეთ რას იწვევს b-ს ცვლილება?

5. **ტექნოლოგიები:** შედით საიტზე 🔗 Geogebra Calculator ან Desmos Calculator, ააგეთ $y = 3x$ $y = 3x + 1$, $y = 3x + 5$, $y = 3x - 4$ წრფეების გრაფიკები და იმსჯელეთ მათზე.

6. რომელია $y = 3x + 1$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება? ამოიწერეთ ყველა შესაძლო სწორი პასუხი:

ა) $y = 3x - 4$; ბ) $y = -3x + 1$; გ) $y = x + 3$; დ) $y = 3x + 5$.

7. დაწერეთ $y = 4x - 3$, წრფის პარალელური წრფის განტოლება თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;5).

8. დაწერეთ $y = 5x$, წრფის პარალელური წრფის განტოლება, თუ ვიცით, რომ წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0;–3).

9. დაწერეთ $y = 0.4x$ წრფის პარალელური წრფეების განტოლება, რომლებიც გადის (10;10) წერტილზე.

კვლევა

10. რომელია $y = 2x + 1$ ის პარალელური წრფის განტოლება?

ა) $y = 4x + 1$; ბ) $y = -2x$; გ) $y = \frac{1}{2}x + 1$; დ) $y = 2x - 5$.

11. დაწერეთ $y = 5x - 1$ წრფის პარალელური განტოლება რომელიც Y ღერძს კვეთს წერტილში (0;3).

12. დაწერეთ $y = 5x + 2$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება რომელიც გადის (2:0) წერტილზე.

13. დაწერეთ $y = -4x + 6$ წრფის პარალელური წრფის განტოლება, რომელიც გადის (5; 0) წერტილზე.

3.9. გავლილი გზა, დრო, გადაადგილება – მოძრაობის აღწერა

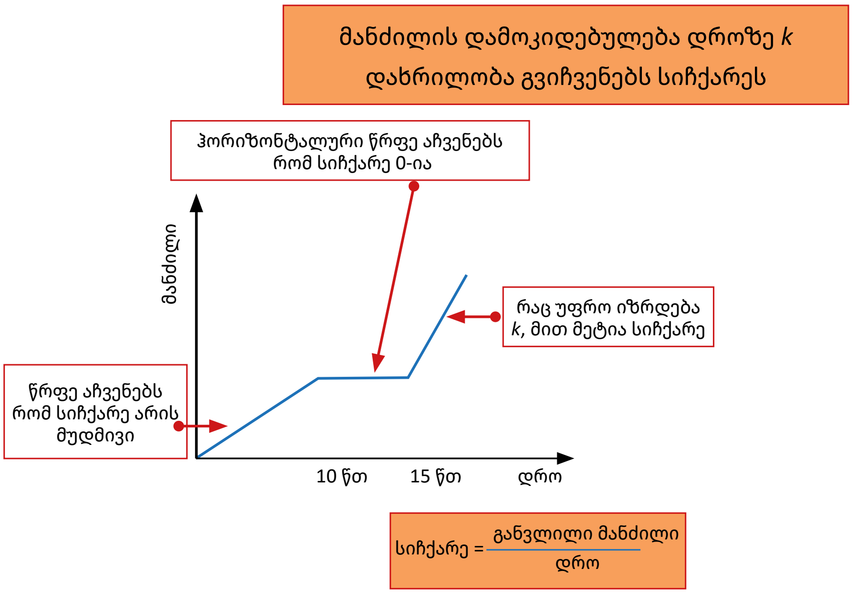
> განვიხილოთ სიტუაცია: სტუდენტი დილით გაემართა პროფესიული კოლეჯისკენ, პირველი 10 წუთის განმავლობაში მან იარა ფეხით 1 კმ და მივიდა გაჩერებამდე, სადაც 8 წუთის განმავლობაში ელოდებოდა ტრანსპორტს, ტრანსპორტის მოსვლის შემდეგ კი ჩაჯდა მასში და გაემგზავრა კოლეჯში.

საკვანძო კითხვა: როგორ არის შესაძლებელი მოძრაობის აღმწერი გრაფიკის წარმოდგენა?

ნიმუში 1

განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყე, x ღერძს შევუსაბამოთ დრო, ხოლო y ღერძს გავლილი მანძილი (გზა); რადგანაც არ ვიცით სიჩქარე ავაგოთ მიახლოებითი გრაფიკი:

- სათავეს, მოძრაობის ათვლის წერტილს (0;0)-ს შევუსაბამოთ სტუდენტის სახლის მდებარეობა.
- პირველი 10 წუთში სტუდენტმა გაიარა 1კმ, გრაფიკზე პირველი წრფის მონაკვეთი შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას.
- გაჩერებაზე მისვლის შემდეგ სტუდენტი 8 წუთის განმავლობაში ელოდებოდა ტრანსპორტს, გრაფიკზე მეორე მონაკვეთი, რომელიც x ღერძის პარალელურია, შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას, დრო გადიოდა თუმცა სტუდენტს მეტი მანძილი არ გაუვლია. სიჩქარე იყო 0 კმ/წთ.
- 8 წუთის შემდეგ სტუდენტი ჩაჯდა ტრანსპორტში და ისევ გააგრძელა პროფესიული კოლეჯისკენ სვლა, მესამე წრფის ნაწილი შეესაბამება აღნიშნულ ინფორმაციას.



საკვანძო კითხვა:

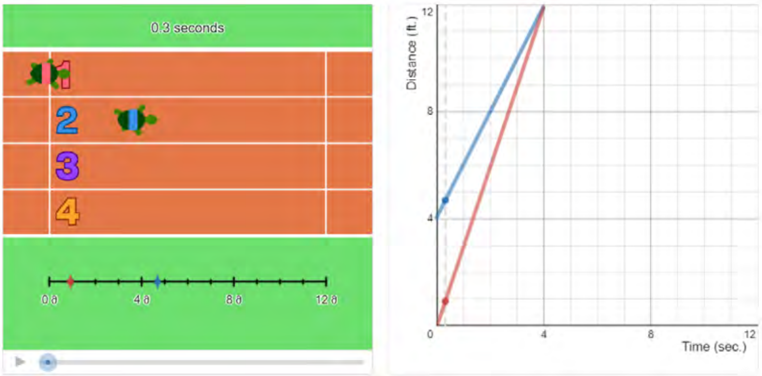
- *შეიძლება თუ არა გრაფიკიდან გამომდინარე დავადგინოთ როდის მოძრაობდა სტუდენტი უფრო დიდი სიჩქარით?*

ნიმუში 2

წარმოვიდგინოთ ორი კუს მარათონი

ვიცით, რომ რბოლის დაწყებამდე ერთი კუ 4 მეტრით იყო იყო დაშორებული სასტარტო ხაზს. რბოლის დაწყებიდან 4 წამის შემდეგ ორივე მისული იყო „ფინიშის ხაზამდე“

DESMOS – მარათონი.



- რა მოხდება თუ მოძრაობა დაიწყება არა ათვლის სათავიდან?

გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ წითელი წრფე აღწერს წითელი კუს მოძრაობას, ხოლო ლურჯი წრფე – ლურჯის კუს მოძრაობას.

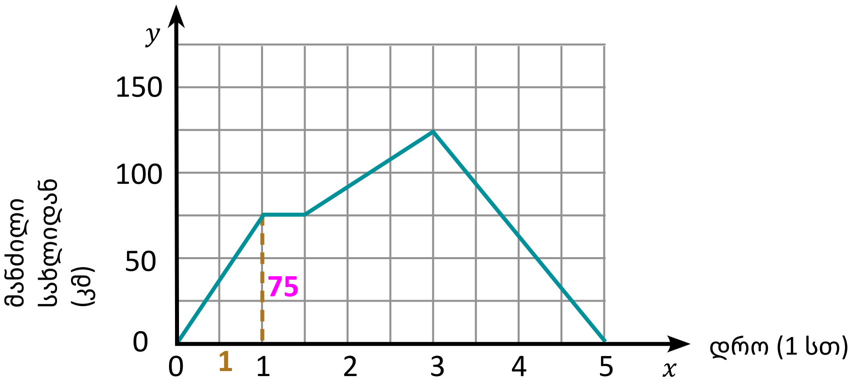
წითელი კუს მოძრაობის შესაბამისი განტოლებაა: $y = 3x$

ვხედავთ, რომ 4 წამში გაიარა 12 სმ, შესაბამისად სიჩქარეა 3 მ/წმ

ლურჯმა კუმ 4 წამში გაიარა 8 მ (საწყისი წერტილი იყო (0;4), ხოლო საბოლოო (4;12); შესაბამისად, ლურჯი კუს სიჩქარეა – 2 მ/წმ; ხოლო მოძრაობის აღმწერი განტოლებაა $y = 2x + 4$

სავარჯიშოები

1. აღწერეთ გრაფიკით მოცემული მოძრაობა, დაადგინეთ სიჩქარე მოძრაობის თითოეულ მონაკვეთზე.

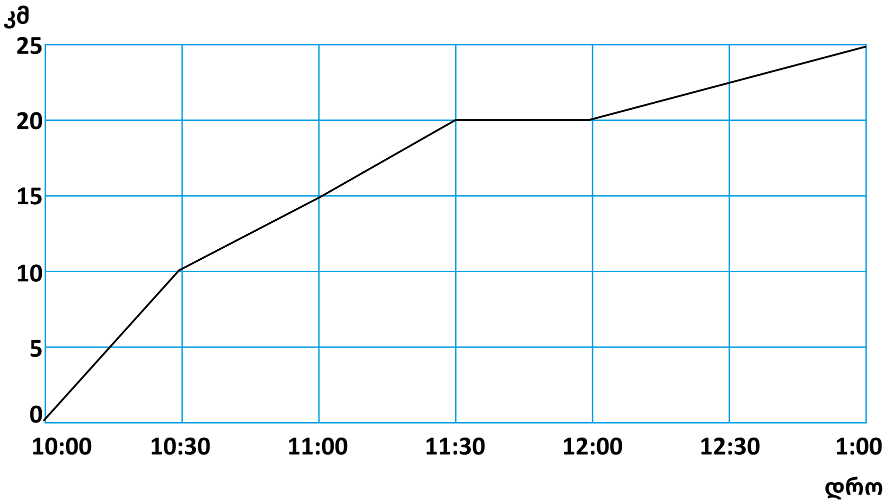


საკვანძო კითხვა:

შეიძლება თუ არა გრაფიკიდან გამომდინარე დავადგინოთ როდის მოძრაობდა მანქანა უფრო დიდი სიჩქარით? რას გვიჩვენებს პირდაპირპროპორციულობის კოეფიციენტი?

---

2. მოცემულია მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი. აღწერეთ რას გვიჩვენებს გრაფიკი.



- განსაზღვრეთ რომელია დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ცვლადები?
- როგორ არის დაკავშირებული X და Y ღერძზე მოცემული ინფორმაცია?
- რა წესით არის ინფორმაცია მოცემული? რა წესით შეიძლება იყოს ინფორმაცია მოცემული?

3. გრაფიკიდან გამომდინარე გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

ა) სულ რამდენი კილომეტრი გაიარეს მეგობრებმა?

ბ) რამდენი საათი იმოძრავეს მეგობრებმა?

გ) გრაფიკის მიხედვით რას აკეთებდნენ მეგობრები 11:30-12:00 დროის ინტერვალში?

სავარჯიშოები

დ) ახსენით, დროის რა ინტერვალებში შეგიძლიათ სიჩქარის დაანგარიშება?
ე) გამოიანგარიშეთ სიჩქარე თითოეული ბიჯისთვის;
ვ) რა სიჩქარით იმოძრავეს მეგობრებმა 12:30 დან 1:00-მდე?
ზ) დროის რა ინტერვალში იარეს მაქსიმალური სიჩქარით?

STEM – დავალება

4. მოცემულია მოძრაობის აღმწერი გრაფიკი; აღწერეთ რას გვიჩვენებს გრაფიკი.
ა) აღწერეთ რა ხდება მანქანის მოძრაობის დაწყებიდან პირველი 6 წამი;
ბ) აღწერეთ რა ხდება 6 წმ-დან 10 წმ-მდე დროის შუალედში;
გ) აღწერეთ რა ხდება მე-10 წამიდან მე-17 წამის ჩათვლით.
გამოთვალეთ სიჩქარე დროის თითოეული ინტერვალისთვის.

ტექნოლოგიების გამოყენება მოძრაობის გრაფიკი

5. STEM კავშირი IV კომპლექსურ დავალებასთან. გახსენით ბმული DESMOS – მარათონი და შეასრულეთ მე-12 და მე-13 დავალებები.

ინტეგრირება ინგლისურთან

6. **ტექნოლოგიების გამოყენება** [მოძრაობის გრაფიკი](#) მოცემულია ორი მანქანის რბოლა. სიმულაციაში შესაძლებელია მანქანების სიჩქარეების ცვლილება, ასევე საწყისი პოზიციის ცვლილება.

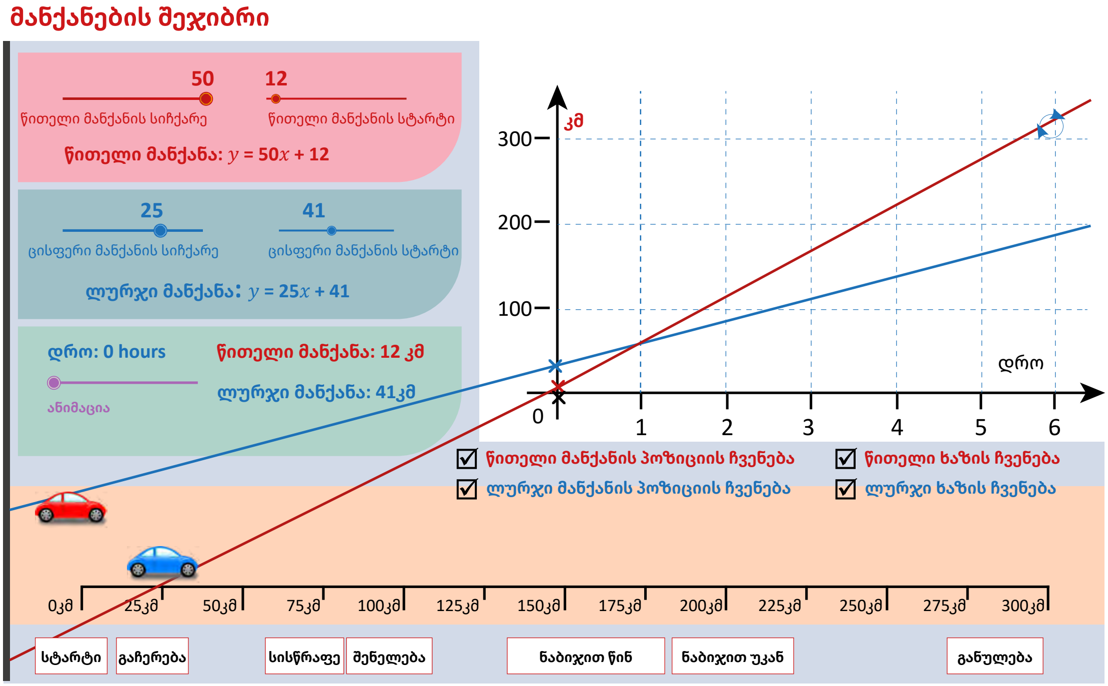
გახსენით სიმულაცია:

ა) დააყენეთ თქვენთვის სასურველი პარამეტრები და აღწერეთ თითოეული მანქანის მოძრაობისთვის, რას ნიშნავს თქვენ მიერ მინიჭებული პარამეტრები;

ბ) შეადარეთ მანქანების სიჩქარეები და დაადგინეთ, რა დროის შემდეგ დაეწევა ერთი მანქანა მეორეს;

გ) აღწერეთ მოძრაობის შესაბამისი გრაფიკები.

მოძრაობის გრაფიკი



მანქანების შეჯიბრი

წითელი მანქანის სიჩქარე: 50

წითელი მანქანის სტარტი: 12

წითელი მანქანა: $y = 50x + 12$

ცისფერი მანქანის სიჩქარე: 25

ცისფერი მანქანის სტარტი: 41

ლურჯი მანქანა: $y = 25x + 41$

დრო: 0 hours

წითელი მანქანა: 12 კმ

ლურჯი მანქანა: 41კმ

☑ წითელი მანქანის პოზიციის ჩვენება

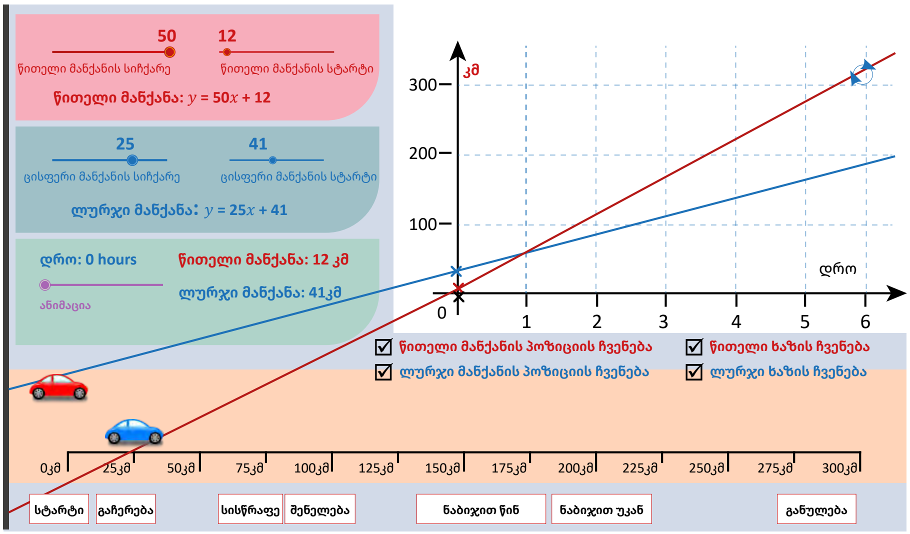
☑ ლურჯი მანქანის პოზიციის ჩვენება

☑ წითელი ხაზის ჩვენება

☑ ლურჯი ხაზის ჩვენება

3.10. ფუნქცია და განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ ორი მანქანის მოძრაობა



ორ A და B ქალაქს შორის მანძილი 288 კმ-ია, B ქალაქის მიმართულებით გაემგზავრა ორი მგზავრი, ერთი ველოსიპედით, მეორე მოტოციკლით; აქედან ვიცით, რომ ველოსიპედისტი ქალაქთან 40 კმ-ით უფრო ახლოს იყო, ვიდრე მოტოციკლეტისტი, თუმცა მოძრაობა დაიწყეს ერთი და იმავე დროს.

- რა დროში დაეწევა მოტოციკლისტი ველოსიპედისტს, თუ ვიცით, რომ ველოსიპედისტი მოძრაობდა 8 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო მოტოციკლეტისტი 24 კმ/სთ სიჩქარით?

✓ სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება:

ათვლის სათავედ ავიღოთ მოტოციკლეტისტის ადგილსამყოფელი.

რადგან ველოსიპედისტის სიჩქარე 8 კმ/სთ-ია და ის B ქალაქთან 40 კმ-ით ახლოს იმყოფება, ვიდრე მოტოციკლეტისტი, მისი მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$y = 8x + 40$ **(1)** სადაც x შეესაბამება დროს, ხოლო y გავლილ მანძილს.

რადგან მოტოციკლეტისტის მოძრაობის დაწყების ადგილი არის ათვლის სათავედ მიღებული და მისი სიჩქარეა 24 კმ/სთ, მისი მოძრაობის აღმწერი განტოლება იქნება

$y = 24x$ **(2)**

მიღებულ **(1)** და **(2)** განტოლებას ერთად **წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა** ეწოდება. ხოლო ამ განტოლებათა საერთო ამონახსნს-წრფივ ორცვლადიან **განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.**

(1) და **(2)** განტოლებებით შექმნილი განტოლებათა სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

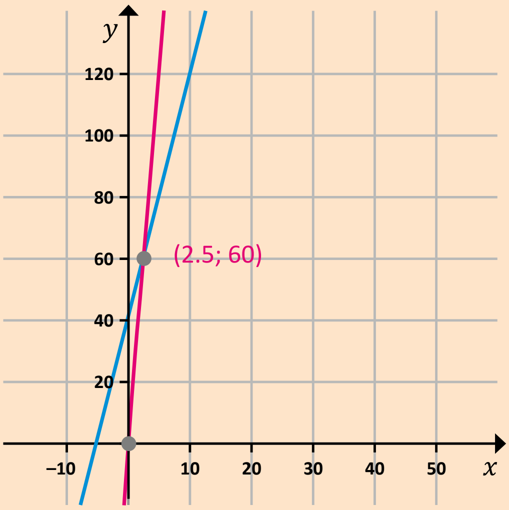
ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა, ნიშნავს ვიპოვოთ ის $(x;y)$ წყვილი, რომელიც ორივე განტოლებას დააკმაყოფილებს.

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა სხვადასხვა მეთოდით:

მეთოდი 1:

განტოლების ამოხსნის გრაფიკული მეთოდი

ვხედავთ, რომ გავლილი მანძილი დროის ფუნქციაა. ავაგოთ თითოეული ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ გადაკვეთის წერტილი.



გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს წერტილში (2.5; 60); გამოდის, რომ მოტოციკლეტისტი ველოსიპედს დაეწევა 2.5 სთ-ის შემდეგ, რა დროისთვისაც მოტიციკლეტისტს გავლილი ექნება 60 კმ, ხოლო ველოსიპედისტს – 20 კმ, რადგან მან 40 კმ-ით ნაკლები იარა.

დაასაბუთეთ, რომ:

პირველი ფუნქციის შემთხვევაში $0 \le x \le 31$;

მეორე ფუნქციის შემთხვევაში $0 \le x \le 12$;

დავუშვათ, რომ ქალაქში ჩასვლის დროს ასრულებენ მოძრაობას.

მეთოდი 2

განტოლების ამოხსნის ჩასმის მეთოდი

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან y-ის მნიშვნელობა, რომელიც x-ითაა გამოსახული, ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში y-ის ნაცვლად; მივიღებთ წრფივ ერთუცნობიან განტოლებას:

$8x + 40 = 24x$ იგივე
$24x = 8x + 40$
$24x - 8x = 40$
$16x = 40$
$x = 2.5$

მას შემდეგ, რაც დავადგინეთ x-ის მნიშვნელობა, თუ x-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის პირველ ან მეორე განტოლებაში x-ის ნაცვლად, მივიღებთ: $y = 60$.

შემოწმება:

განტოლება **(1)**
$8 \cdot 2.5 + 40 = 20 + 40 = 60$
განტოლება **(2)**
$2.5 \cdot 24 = 60$

მეთოდი 3:

განტოლების ამოხსნა შეკრების გზით

$$\begin{cases} y = 8x + 40 \\ y = 24x \end{cases}$$

როგორც ვიცით, რომ ტოლობის ძირითადი თვისების თანახმად შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ ერთი და იგივე რიცხვი. შეგვიძლია შევკრიბოთ ორი განტოლება; განტოლების ორივე მხარეს მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ შესაბამისად მეორე განტოლება. (რადგან გვაქვს ტოლობა) მივიღებთ, რომ:

$y - y = 8x + 40 - 24x$
$0 = 40 - 16x$

$x = 2.5$; 2.5-ის ჩასმით x-ის ნაცვლად მივიღებთ, $y = 60$.

სავარჯიშოები

1. ჩამოთვლილთაგან რომელია წრფივი ორუცნობიანი განტოლება/განტოლებები?

ა) $3x + 5 = 2x - 7$; ბ) $3x - 5y = 3$; გ) $x - y = 8$; დ) $3x + y = y - 5$.

2. დაადგინეთ, არის თუ არა ცვლადების მოცემული წყვილი ერთდროულად ორივე განტოლების ამონახსნი:

ა) $x = 5$; $y = 2$;
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

გ) $x = 5$; $y = 4$
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

ბ) $x = 5$; $y = -3$
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

დ) $x = 4$; $y = -1$
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

3. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გრაფიკული ხერხით (შეგიძლიათ, გამოიყენოთ Desmos პროგრამა); შეადგინეთ მსგავსი 8 წრფივ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით გრაფიკულად:

ა) $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = -5x - 1 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

4. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჩასმის ხერხით; შეადგინეთ 6 მსგავსი სისტემა და ამოხსენით:

ა) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = -x - 9 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} b = -a + 12 \\ a = 4b \end{cases}$

5. რა განტოლება მიიღება სისტემაში შემავალი ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად? ამოხსენით განტოლებათა სისტემა შეკრების ხერხით. შეადგინეთ 6 მსგავსი სისტემა და ამოხსენით:

ა) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

6. **გამოწვევა:** მოცემულია ორი განტოლება:

$y = 4x - 8$ (1)

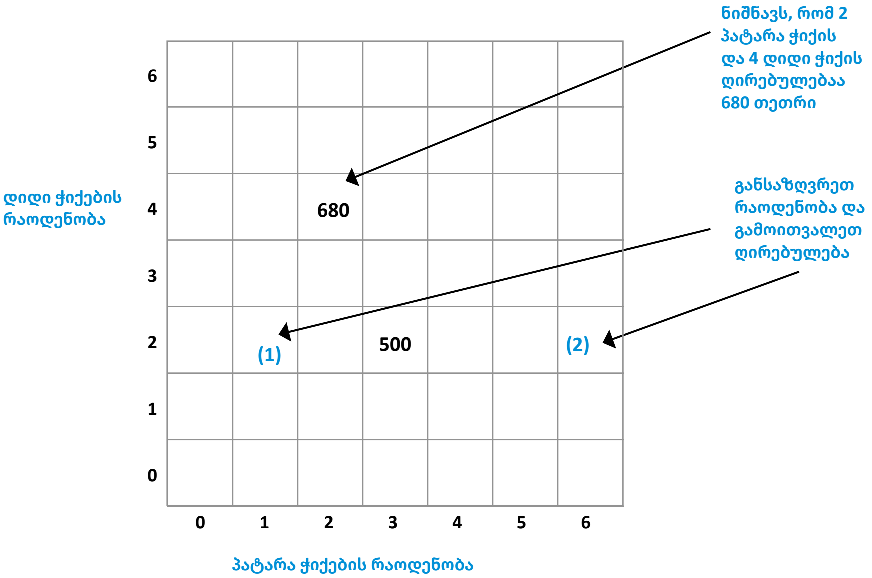
$y = -2x + 4$ (2),

გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და დაასახელეთ რიცხვთა ისეთი წყვილი, რომელიც წარმოადგენს:

ა) (1) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს;
ბ) (2) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს;
გ) არ წარმოადგენს არც (1) და არც (2) განტოლების ამონახსნს;
დ) წარმოადგენს ორივე განტოლების ამონახსნს.

სავარჯიშოები

7. აღნიშნულ დიაგრამაზე თითოეული უჯრა შეესაბამება ფასს თეთრებში, კერძოდ, რა ჯდება სხვადასხვა რაოდენობით პატარა ჭიქით შეკვეთილი ყავა და დიდი ჭიქით შეკვეთილი ყავა.



ნიშნავს, რომ 2 პატარა ჭიქის და 4 დიდი ჭიქის ღირებულებაა 680 თეთრი

განსაზღვრეთ რაოდენობა და გამოითვალეთ ღირებულება

ა) შესაძლებელია თუ არა დავადგინოთ (1) რა თანხა შეესაბამება ისრით მითითებულ უჯრას? (2) ისრით მითითებულ უჯრას?

ბ) ახსენით თქვენი მოსაზრება. აღწერეთ მოცემული დიაგრამა და ახსენით რას შეესაბამება დიაგრამაზე რიცხვი 500.

გ) დიაგრამაზე მოცემული ცვლადების მეშვეობით, შეადგინეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი/განტოლება, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელი იქნება ვიპოვოთ სხვადასხვა კომბინაციისთვის რა ექნება გადასახდელი მომხმარებელს?

3.11. უკუპროპორციულობა, არაწრფივი ფუნქციის გრაფიკი

> თავის დასაწყისში ვისაუბრეთ პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაზე; ამჯერად გავიხსენოთ, რომ ორ სიდიდეს ეწოდება უკუპროპორციული დამოკიდებულება. თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორე სიდიდის შემცირებას (გაზრდას) იმავე რიცხვჯერ.

ნიმუში 1

თბილისიდან ბათუმამდე გზა მიახლოებით 360 კმ-ია. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რამდენ სთ-ში დაფარავს მანქანა ორ ქალაქს შორის მანძილს სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობის შემთხვევაში.

სიჩქარე (კმ/სთ)	30	45	60	90
დრო (სთ)	12	8	6	4

თუ პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულების დროს ორი სიდიდის შეფარდებაა მუდმივი, **უკუპროპორციული დამოკიდებულების დროს მუდმივია ორი სიდიდის ნამრავლი.**

მოცემულ შემთხვევაში მუდმივია განვლილი გზა $s = vt$;

$360 = 30 \cdot 12 = 45 \cdot 8 = 60 \cdot 6 = 90 \cdot 4$

მოცემული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $t = \frac{s}{v}$ (1) ან $v = \frac{s}{t}$ (2)

რადგან მოცემულ შემთხვევაში s მუდმივია, გამოდის რომ ცვლადი სიდიდეებია v და t

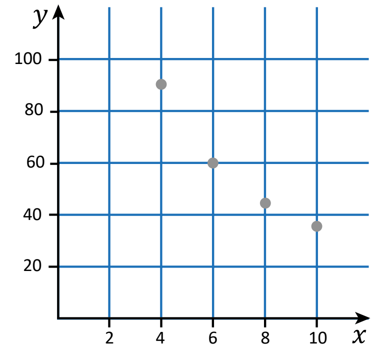
პირველ შემთხვევაში, თბილისიდან ბათუმში ჩასვლის დრო დამოკიდებულია სიჩქარეზე, ანუ მანქანის მოძრაობის სიჩქარის ცოდნით შევძლებთ გავიგოთ თუ რა დროში ჩავა ის დანიშნულების ადგილას.

მეორე შემთხვევაში, პირიქით, სიჩქარე დამოკიდებულია დროზე, იქიდან გამომდინარე, თუ რა დროში სურს მძღოლს დანიშნულების ადგილას ჩასვლა, შეუძლია მოძრაობის სიჩქარის ცვლილება.

მითითება: რაც არ უნდა სწრაფად სურდეს მძღოლს ჩასვლა, აუცილებელია რომ არ დაარღვიოს მოძრაობის წესები მაგისტრალზე ან ქალაქში სიარულის დროს და არ გადააჭარბოს დასაშვებ სიჩქარეს.

განვიხილოთ სიტუაცია

სიჩქარე (კმ/სთ)	30	45	60	90
დრო (სთ)	12	8	6	4



როგორც ვხედავთ, წერტილები არ მდებარეობენ ერთ წრფეზე

გაგრძელება

დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია

x	y
4	90
6	60
8	45
10	36

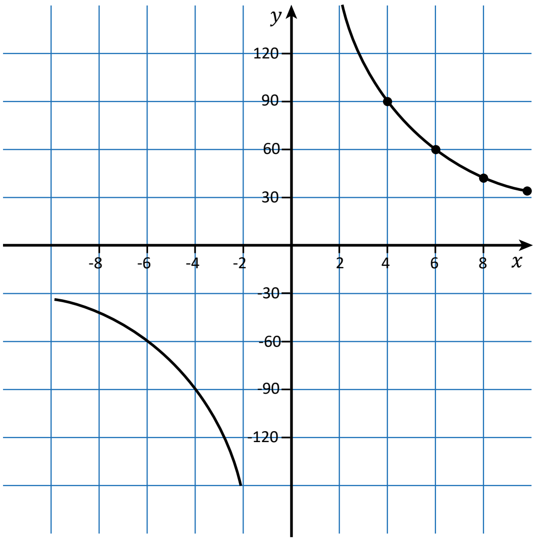
(12; 30), (8;45), (6; 90), (4;90)

X ღერძს შევუსაბამოთ დრო, Y ღერძს სიჩქარე, გადავიტანოთ წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთოთ.

თუ ჩვენ ავაგებთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $y = \frac{360}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს, მივიღებთ წირს, რომელსაც ეწოდება ჰიპერბოლა. როგორც ვხედავთ $x \neq 0$-ის შესაბამისად, ფუნქციას არ აქვს მნიშვნელობა $x = 0$-ისთვის.

ჩვენ მიერ განხილულ სიტუაციაში x იყო დადებითი, შესაბამისად გრაფიკი იყო მხოლოდ პირველ მეოთხედში; x-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვის გრაფიკი იქნება მესამე მეოთხედში.

x	y
4	90
6	60
8	45
10	36



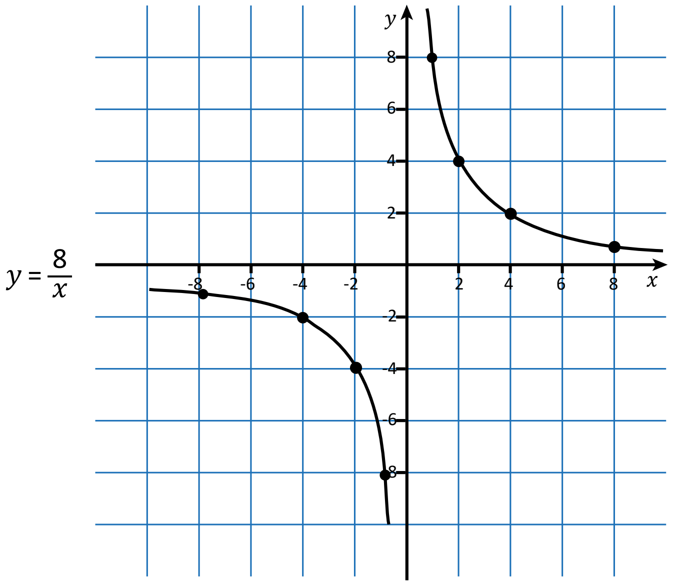
$y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი	$y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას, სადაც x-დამოუკიდებელი ცვლადია, k – ნულის არატოლი რიცხვი, უკუპროპორციულობა ეწოდება	უკუპროპორციულობის განსაზღვრის არეა ნებისმიერი რიცხვი 0-ის გარდა, რადგან x = 0-თვის, $\frac{k}{x}$ გამოსახულებას აზრი არ აქვს.
უკუპროპორციულობის ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა ნებისმიერი რიცხვი 0-ის გარდა, რადგან $k \neq 0$ და $\frac{k}{x}$ გამოსახულება ვერ გახდება 0-ის ტოლი x ცვლადის ვერცერთი მნიშვნელობისთვის.		

ნიმუში 2

ვთქვათ მოცემულია $y = \frac{8}{x}$, ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

x	y
1	8
2	4
4	2
8	1

x	y
–1	–8
–2	–4
–4	–2
–8	–1



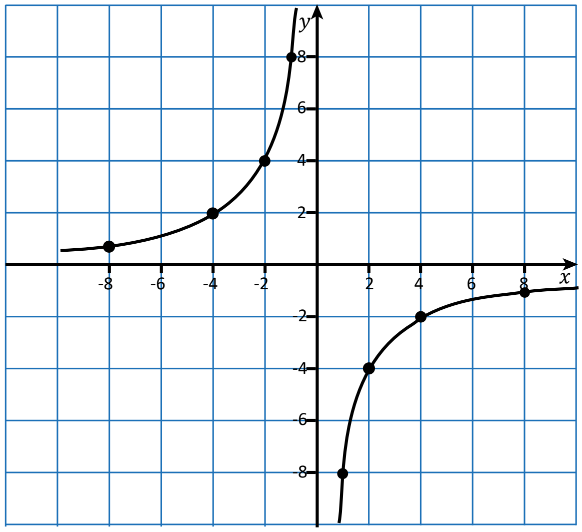
ნიმუში 3

ვთქვათ მოცემულია $y = -\frac{8}{x}$, ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი;

x	y
1	–8
2	–4
4	–2
8	–1

x	y
–1	8
–2	4
–4	2
–8	1

$y = -\frac{8}{x}$



განვიხილოთ $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციული ფუნქცია, სადაც $x \neq 0$

- როდესაც $k > 0$, ფუნქციის გრაფიკები მოთავსებულია პირველ და მესამე მეოთხედებში
- როდესაც $k < 0$, ფუნქციის გრაფიკები მოთავსებულია მეორე და მეოთხე მეოთხედებში

უკუპროპორციულობის გრაფიკი შედგება ორი წირისგან (შტოსგან), რომელსაც **ჰიპერბოლა** ეწოდება.

ნიმუში 3

სტუდენტს აქვს 1000 ლარი და მას სურს თანხის გადანაწილება დღეებზე. მას სურს დაადგინოს დღიური ხარჯის გათვალისწინებით, რამდენი დღე შეიძლება ეყოს თანხა. ცხრილით მოცემულია კავშირი დღიურ დანახარჯსა და დროს (დღეებს) შორის (ჩავთვალოთ სტუდენტმა ყოველდღე ერთი და იმავე რაოდენობის თანხა უნდა დახარჯოს).

დღიური დანახარჯი	1000	500	250	100	50
დრო (დღეები)	1	2	4	10	20

რამდენჯერაც მცირდება დღიური დანახარჯი, იმდენჯერ იზრდება დღეების რაოდენობა.

ცხრილის მიხედვით ვხედავთ

დღიური ხარჯი · დღეების რაოდენობაზე არ იცვლება, თანხა მუდმივია

$1000 \cdot 1 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 100 \cdot 10 = 50 \cdot 20 = 1000$

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დღიურ დანახარჯსა და დღეების რაოდენობას შორის არის უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

სავარჯიშოები

1. შეადარეთ პირდაპირპროპორციულობისა და უკუპროპორციულობის დამოკიდებულებები:

ა) იმსჯელეთ, რას ნიშნავს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება;

ბ) იმსჯელეთ, რას ნიშნავს უკუპროპორციული დამოკიდებულება;

გ) შეადარეთ პირდაპირპროპორციულობის და უკუპროპორციულობის გრაფიკები, რისი თქმა შეგიძლიათ? რომელ მეოთხედებში გადის გრაფიკი როცა $k > 0$, $k < 0$?

2. მოცემულია უკუპროპორციულობა შემდეგი ფორმულით $y = \frac{12}{x}$

ა) იპოვეთ y-ის მნიშვნელობა, x-ის შემდეგი მნიშვნელობისთვის;

x	1	2	3	4	6
y					

x	−1	−2	−3	−4	−6
y					

ბ) გადაიტანეთ შესაბამისი ინფორმაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე და ააგეთ გრაფიკი;

გ) გაანალიზეთ ცხრილით და გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის ზრდასთან ერთად?

დ) გაანალიზეთ გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის კლებასთან ერთად?

3. მოცემულია უკუპროპორციულობა შემდეგი ფორმულით $y = -\frac{24}{x}$

ა) იპოვეთ y-ის მნიშვნელობა, x-ის შემდეგი მნიშვნელობისთვის;

x	1	2	4	6	8
y					

x	−1	−2	−4	−6	−8
y					

ბ) გაიდატანეთ შესაბამისი ინფორმაცია საკოორდინატო სიბრტყეზე და ააგეთ გრაფიკი;

გ) გაანალიზეთ ცხრილით და გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის ზრდასთან ერთად?

დ) გაანალიზეთ გრაფიკით მოცემული ინფორმაცია, როგორ იცვლება y-ის მნიშვნელობა x-ის კლებასთან ერთად?

4. მართკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = ab$, სადაც S-არის ფართობი, a-მართკუთხედის სიგრძე, b-მართკუთხედის სიგანე.

ა) რამდენჯერ გაიზრდება მართკუთხედის ფართობი თუ სიგრძეს გავზრდით 4-ჯერ, 8-ჯერ, 10-ჯერ? როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი სიგრძეზე?

ბ) რა მოხდება თუ მართკუთხედის სიგანეს შევამცირებთ 2-ჯერ, 5-ჯერ? როგორ არის დამოკიდებული მართკუთხედის ფართობი სიგანეზე?

სავარჯიშოები

გ) დავუშვათ გვინდა, რომ მართკუთხედის ფართობი იყოს მუდმივი, 40 სმ^2, ცხრილის მიხედვით, იპოვეთ სიგრძის კონკრეტული მნიშვნელობისთვის, რა შეიძლება იყოს სიგანე?

სიგრძე (a სმ)	2	4		10	
სიგანე (b სმ)			5		2
ფართობი	40	40	40	40	40

ცხრილიდან გამომდინარე დაწერეთ უკუპროპორციულობა და იმსჯელეთ:

რას შეუსაბამებდით x-ს? y-ს? k-ს?

5. ააგეთ შემდეგი უკუპროპორციულობის გრაფიკი:

ა) $y = -\frac{1}{x}$; ბ) $y = \frac{1}{x}$; გ) $y = -\frac{2}{x}$; დ) $y = \frac{4}{x}$.

6. ჩაწერეთ უკუპროპორციულობა ფორმულით, თუ ვიცით, რომ უკუპროპორციულობის გრაფიკს ეკუთვნის შემდეგი წერტილი:

ა) $A(-2,4)$; ბ) $B(3,-9)$; გ) $C(-25,-0.2)$; დ) $D(0.4,12)$.

7. დადებითია თუ არა k კოეფიციენტი თუ ვიცით, რომ

ა) $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციულობის გრაფიკი მეორე და მეოთხე მეოთხედშია?

ბ) $y = \frac{k}{x}$ უკუპროპორციულობის გრაფიკი პირველ და მესამე მეოთხედშია?

8. A-დან B ქალაქამდე მანძილი 200 კმ-ია

I. რა დრო დასჭირდება A-დან B-მდე მანძილის გავლას თუ მანქანა ივლის 20 კმ/სთ სიჩქარით? 40 კმ/სთ სიჩქარით? 80 კმ/სთ სიჩქარით?

ახსენით რაზეა დამოკიდებული ერთი ქალაქიდან მეორეში ჩასვლის დრო. ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

II. რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს მანქანამ იმისათვის, რომ A-დან B-მდე მანძილის გავლას მოანდომოს 8 საათი? 10 საათი? 20 საათი?

ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

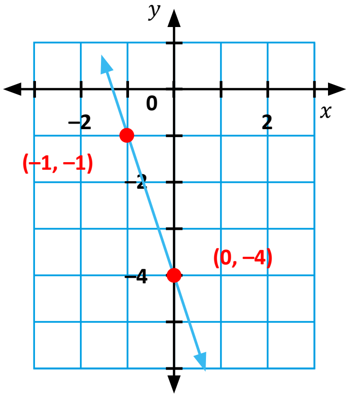
სავარჯიშოები

ქვიზი წრფივი ფუნქციისთვის

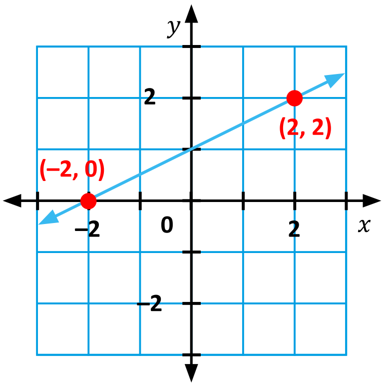
1. კახას ბანკში ანაბარზე ჰქონდა 200 ლარი, ის ყოველთვე ანაბრიდან ხარჯავდა 20 ლარს. ჩაწერეთ მოცემული სიტუაციის აღმწერი გამოსახულება.

2. თითოეული ფუნქციისთვის იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა)



ბ)



3. იპოვეთ წრფივი ფუნქციის დახრილობა, თუ ვიცით რომ წრფე გადის შემდეგ ორ წერტილზე:

ა) (2; 5) და (4; 10); ბ) (−1;4) და (1;12);

4. არის თუ არა შემდეგი დამოკიდებულებები პირდაპირპროპორციულობა და თუ არის, იპოვეთ დახრილობა (კუთხური კოეფიციენტი)

ა) $5y = 10x$ ბ) $y - 3 = x$ გ) $-7x = y$ დ) $x + y = 4$

5. მეტროს ერთჯერადი ბარათი, რომელზეც თანხა არის დასარიცხი ჯდება 5 ლარი. მეტროთი თითოეული მგზავრობა ჯდება 1 ლარი.

- წარმოადგინე მოცემული სიტუაცია მათემატიკური მოდელით (დაწერე ფუნქცია, რომელიც აღწერს მოცემულ სიტუაციას);
- თამუნამ შეიძინა მეტროს ერთჯერადი ბარათი და მეტროთი ისარგებლა 50-ჯერ. რა იყო მისი ხარჯი?

6. დაწერე წრფივი ფუნქციის განტოლება, თუ ვიცით, რომ მისი კუთხური კოეფიციენტია 3, ხოლო Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია −2.

7. იპოვეთ $y = 3x - 6$ ფუნქციის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები;

8. დაწერეთ (–2; 5) და (1; –4) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

9. ააგეთ მოცემული $y = -2{,}5x + 2$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი.

10. საბამ სახლიდან ტბამდე გაიარა 4 კმ, ამის შემდეგ შეისვენა 30 წთ და დაბრუნდა სახლში. დახაზეთ საბას გადაადგილების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გამოიყენეთ გრაფიკი იმისათვის, რომ გაარკვიოთ საბას მიერ გავლილი მთლიანი მანძილი.

11. ქვემოთ მოცემულია ცხრილი. ცხრილის მიხედვით დაადგინეთ ფუნქცია წრფივია თუ არა, დაწერეთ შესაბამისი ფორმულა და ააგეთ გრაფიკი.

x	–4	–2	0	2	4
y	1	0	–1	–2	–3