



პროფესიული
უნარების
სააგენტო

ქართვან ცარცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნდირება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

წინამდებარე გამოცემაში გამოთქმული მოსაზრებები ავტორისეულია და შეიძლება არ ასახავდეს გაეროს განვითარების პროგრამის, შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოსა და ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტოს თვალსაზრისს.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

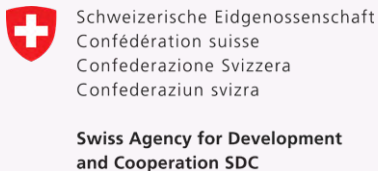
- ქეთევან ცერცვაძე
- ევგენი გუგულაშვილი

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მათი გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

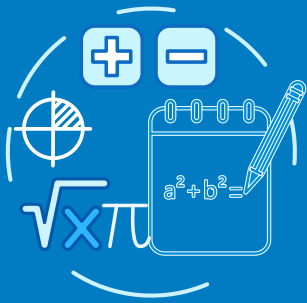
რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

საავტორო უფლებები დაცულია



VI. დავალების წარდგენა



სიტუაცია ეკონომიკიდან

იხილეთ თუ არა, რომ

თანამედროვე ეკონომიკური ბაზრის ერთერთი მთავარი პრობლემა არის წარმოებული პროდუქციის ბაზრისთვის მიწოდება და ამ პროდუქციაზე ბაზრის მოთხოვნა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პროდუქცია ბაზრისთვის უნდა იყოს მოთხოვნადი და ბაზარს ეს პროდუქცია ისე უნდა მიეწოდოს, რომ მისი მოთხოვნა დააკმაყოფილოს.

კოვალენტური დავალება



ცხადია, ამ პრობლემის მოსაგვარებლად მრავალი ეკონომიკური საკითხი უნდა იქნეს გათვალისწინებული, თუმცა მთავარი მაინც წარმოებული პროდუქციის ფასია. რა ფასად მიაწოდებს მწარმოებელი პროდუქციას ბაზარს და რა ფასის გადახდა შეუძლია ბაზარს ამ პროდუქტში. ფასის განსაზღვრა სხვა მაჩვენებლებზეცაა დამოკიდებული: ნედლეულის ფასზე, მუშების ხელფასზე, ტრანსპორტირებაზე და სხვა მრავალი.

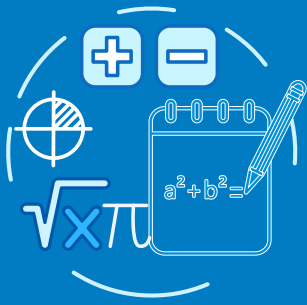
განვიხილოთ ბაზრის მიწოდება-მოთხოვნის პრობლემის ყველაზე მარტივი შემთხვევა, როცა ფასი არის დამოკიდებული მხოლოდ პროდუქციის რაოდენობაზე. ცხადია, მწარმოებლისთვის (პროდუქციის მიმწოდებლისთვის) ბაზრისთვის (პროდუქციაზე მომთხოვნისთვის) ეს დამოკიდებულებები განსხვავებული იქნება. ორივესთვის ფასის დამოკიდებულება პროდუქციის რაოდენობაზე გამოვსახოთ წრფივი დამოკიდებულების ფორმით.

პროდუქციის ფასი აღვნიშნოთ x სიმბოლოთი, ხოლო პროდუქციის რაოდენობა აღვნიშნოთ y სიმბოლოთი. საინტერესოა მოთხოვნა-მიწოდების ის შემთხვევა, როცა მოთხოვნის და მიწოდების დამოკიდებულებას აკმაყოფილებს ერთი და იგივე რაღაც x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა. ამ შემთხვევას **უწოდებენ ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობას**.

განვიხილოთ სიტუაცია: ერთ-ერთი ბაზრისთვის, კონკრეტულ პროდუქციაზე ეკონომისტებმა დაადგინეს პროდუქციის მოთხოვნის ფასის რაოდენობაზე დამოკიდებულების შემდეგი ტოლობა:

გაგრძელება





$$2x + 5y = 90, \quad (1)$$

ხოლო მიწოდებისთვის ფასის რაოდენობაზე დამოკიდებულების ტოლობაა:

$$8x - ky = m \quad (2)$$



თქვენი დავალება

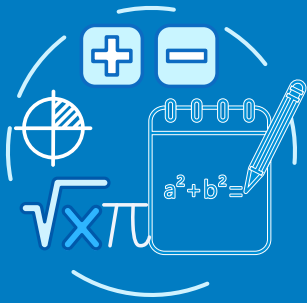
1. შეარჩიეთ k და m დადებითი რიცხვები ნებისმიერად და მოძებნეთ მიწოდების (2) ტოლობიდან შესაბამისი x ფასი და y რაოდენობა (სულ მცირე სამი ვარიანტი).
2. გამოიკვლიეთ რას ნიშნავს ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობა და როგორ უნდა დადგინდეს ამ შემთხვევაში x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.
3. 1-ელ დავალებაში შერჩეული k და m დადებითი რიცხვების შემთხვევაში, დაადგინეთ ამ ბაზრის წონასწორობის x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.
4. მე-3 დავალება შეასრულეთ რამდენიმე სხვადასხვა მეთოდით და წარმოადგინეთ თითოეული მეთოდის მათემატიკური დასაბუთება.
5. შეარჩიეთ სხვა k და m დადებითი რიცხვები ისე, რომ, ამ შემთხვევაში, არ არსებობდეს ბაზრის წონასწორობის x_0 ფასი და y_0 რაოდენობა.

დავალება წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, სადაც წარმოდგენილი იქნება ყველა გამოთვლა

დავალების პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

- I. რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- II. როგორ დაგეხმარათ პრობლემის გადაჭრაში თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამები?
- III. სხვა რა ტიპის ამოცანებში შეიძლება გამოვიყენოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა?
- IV. როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?

VII. დავალების წარდგენა



სიტუაცია ბიზნესიდან

იხილეთ თუ არა, რომ

ხშირად ქვეყანაში ორი ან მეტი კომპანიაა, რომელიც სხვადასხვა სატელეფონო მომსახურებას, მომსახურების პაკეტს და ფასს სთავაზობს მომხმარებელს.

იმისათვის, რომ მომხმარებელმა მიიღოს მომსახურება საჭიროა წინასწარ გამოიკვლიოს რომელი კომპანია იწეობს მისთვის მეტად სარგებლიანი.

კოვალენტური დავალება



საკვანძო კითხვა:

- როგორ არის შესაძლებელი მათემატიკური მოდელების დახმარებით ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღება?

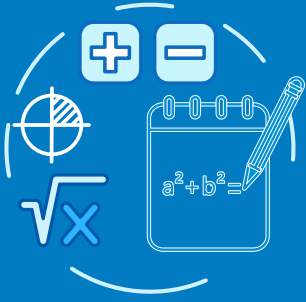
ყოველდღიურ ცხოვრებაში სხვადასხვა კომპანია სარეკლამო კამპანიებით გვთავაზობს სხვადასხვა პირობებს, რათა მეტი მომხმარებელი მიიზიდონ და კონკურენცია გაუწიონ სხვა კომპანიებს. არჩევანის გაკეთებამდე, სასურველია მომხმარებელმა გააანალიზონ სხვადასხვა კომპანიის პირობები და მიიღონ მათთვის მომგებიანი გადაწყვეტილებები. სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება და გამოთვლები გვეხმარება გრძელვადიან პერიოდში ჩვენთვის მისაღები გადაწყვეტილებების მიღებაში.

განვიხილოთ სიტუაცია: ორი სატელეფონი კომპანია მომხმარებლებს სთავაზობს საატელეფონო მომსახურების სხვადასხვა პირობებს. კომპანია A-ს შეთავაზებიდან გამომდინარე: თუ 12 წუთი ისაუბრებთ საზღვარგარეთ, მაშინ უნდა გადაიხადოთ 31 ლარი, ხოლო თუ 30 წუთი ისაუბრებთ მაშინ 40 ლარი;

გაგრძელება



VII. დავალების წარდგენა



კოვალენტური დავალება

კომპანია B-ს შეთავაზებით, სააბონენტო მომსახურების გადასახადი ყოველთვე შეადგენს 30 ლარს, რის შემდეგ წუთის ღირებულებაა 30 თეთრი.



თქვენი დავალება

1. შექმნათ მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს თითოეული კომპანიის საგადასახადო პოლიტიკას.
2. გააანალიზოთ სიტუაცია A და სიტუაცია B და მისცეთ რჩევა მეგობარს, რა შემთხვევაში რომელი კომპანიის მომსახურებით სარგებლობა იქნება უმჯობესი.
3. მოიძიოთ სხვადასხვა მაგალითები დაკავშირებული ფინანსებთან, სპორტთან, ყოველდღიურ ცხოვრებასთან, რომლის მეშვეობით დაასაბუთებთ წრფივი სისტემების ცოდნის მნიშვნელობას.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით.

დავალების პრეზენტაციისას უპასუხეთ კითხვებს:

- I. რომელი მათემატიკური მოდელით აღწერეთ სატელეკომუნიკაციო კომპანიების მიერ შეთავაზებული პირობები?
- II. რა კანონზომიერება აღმოაჩინეთ თითოეული კომპანიის შეთავაზებების გათვალისწინებით? აღწერეთ სიტყვიერად თითოეული კომპანიის შეთავაზება და წესი.
- III. რა შემთხვევაშია მომგებიანი კომპანია A-ს შეთავაზება და რა შემთხვევაში კომპანია B-ს შეთავაზება?
- IV. რამდენი წუთი უნდა ისაუბროს თვეში მომხმარებელმა, რომ ორივე კომპანიის შეთავაზებიდან გამომდინარე იხდიდეს ერთი და იმავე თანხას?
- V. რომელი სფეროდან შეგიძლიათ მაგალითის მოყვანა, წრფივი სისტემების ცოდნის მნიშვნელობის დასასაბუთებლად?

თემა 5. წრფივ განტოლებათა სისტემა

5.1. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი ამონახსნები

წრფივი ორცვლადიანი განტოლება

შესავალი ამოცანა

მოდრაობის დაწყებიდან 2 საათში ავტომობილმა შეცვალა სიჩქარე და კიდევ იმოდრაავა 5 საათი, რათა მისულიყო დანიშნულების ადგილამდე, შვიდი საათის განმავლობაში ავტომობილმა სულ 470 კმ გაიარა. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი დროის ცალკეულ მონაკვეთში?

ამოხსნა:

✓ შევადგინოთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი: ვთქვათ, პირველი 2 საათის განმავლობაში მანქანა მოძრაობდა x კმ/სთ სიჩქარით, შემდეგი დროის განმავლობაში კი y კმ/სთ სიჩქარით.

სულ ავტომობილმა გაიარა $2x + 5y$, რაც უდრის 470 კმ-ს. ამოცანის პირობის შესაბამისად მივიღებთ ორუცნობიან განტოლებას:

$$2x + 5y = 470 \quad (1)$$

(1) განტოლებიდან y ცვლადის გამოსახვის შედეგად ვღებულობთ წრფივ ფუნქციას $y = -0,4x + 94$, ამიტომ (1) სახის განტოლებას წრფივ ორცვლადიან განტოლებას უწოდებენ



❓ **საკვანძო კითხვა:** შესაძლებელია თუ არა ავტომობილის სიჩქარის დადგენა დროის ორივე მონაკვეთისთვის ცალ-ცალკე?

ცნება:
წრფივი ორუცნობიანი განტოლება

განტოლებას, რომელიც შეიცავს ორ უცნობს და აქვს $ax + by = c$ სახე, სადაც x და y ცვლადებია, ხოლო a , b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) და c – ნებისმიერი რიცხვები, **წრფივი ორუცნობიანი განტოლება** ეწოდება.



ნიშნობა 1

წრფივი ორუცნობიანი განტოლების მაგალითებია:

$$2x + 5y = 35 \quad x - 3y = 18 \quad \frac{1}{2}x + 0,5y = 13,2$$

წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნი

ცნობა: განტოლების ამონახსნი

რიცხვთა ისეთ $(x; y)$ წყვილს, რომელთა განტოლებაში ჩასმით ჭეშმარიტი ტოლობა მიიღება, წრფივი ორუცნობიანი **განტოლების ამონახსნი** ეწოდება; განტოლების ამონახსნთა ყველა წყვილს კი – წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე.



ნიშნობა 2 – შესავალი ამოცანის განხილვა

ნაბიჯი 1

დავუბრუნდეთ ამოცანას ავტომობილის მოძრაობაზე. თუ კარგად დავაკვირდებით, შერჩევს ხერხით შესაძლებელია დავადგინოთ, რა სიჩქარით შეიძლება ემოძრავა ავტომობილს გზის პირველ და მეორე ნაწილზე.

I ვარიანტი

წარმოვადგინოთ y ცვლადი x -ით

$$2x + 5y = 470$$

$$5y = -2x + 470$$

$$y = \frac{(-2x + 470)}{5} = -\frac{2x}{5} + \frac{470}{5}$$

$$y = -0.4x + 94 \quad (2)$$

II ვარიანტი

წარმოვადგინოთ x ცვლადი y -ით

$$2x + 5y = 470$$

$$2x = -5y + 470$$

$$x = \frac{(-5y + 470)}{2} = -\frac{5y}{2} + \frac{470}{2}$$

$$x = -2.5y + 235 \quad (3)$$

განვიხილოთ (2) განტოლება: $y = -0.4x + 94$, ჩავსვათ x -ის ნაცვლად სხვადასხვა რიცხვები და გამოვიანგარიშოთ, რისი ტოლი შეიძლება იყოს შესაბამისი y ცვლადი, რათა x და y ცვლადის ორივე მნიშვნელობამ ერთდროულად დააკმაყოფილოს ტოლობა.

| $y = -0.4x + 94$ | | განტოლების ამონახსნი სიტყვიერად | განტოლების ამონახსნი |
|------------------|--------------------------------------|---------------------------------|----------------------|
| x კმ/სთ | y კმ/სთ | მანქანის სიჩქარე | $(x; y)$ |
| 1 კმ/სთ | $y = -0.4 \cdot 1 + 94 = 93.6$ კმ/სთ | 1 კმ/სთ და 93.6 კმ/სთ | (1; 93.6) |
| 2 კმ/სთ | $y = -0.4 \cdot 2 + 94 = 93.2$ კმ/სთ | 2 კმ/სთ და 93.2 კმ/სთ | (2; 93.2) |
| და ა.შ. | | | |
| 10 კმ/სთ | $y = -0.4 \cdot 10 + 94 = 90$ კმ/სთ | 10 კმ/სთ და 90 კმ/სთ | (10; 90) |
| 20 კმ/სთ | $y = -0.4 \cdot 20 + 94 = 86$ კმ/სთ | 20 კმ/სთ და 86 კმ/სთ | (20; 86) |
| 60 კმ/სთ | $y = -0.4 \cdot 60 + 94 = 70$ კმ/სთ | 60 კმ/სთ და 70 კმ/სთ | (60; 70) |

გაგრძელება



→ თუ (1) განტოლებაში ჩავსვამთ $(x; y)$ წყვილის ნებისმიერ მნიშვნელობას ცხრილიდან, ტოლობა იქნება ჭეშმარიტი. მაგალითად, შევამოწმოთ ერთ-ერთი წყვილი $(60;70)$ და ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

(1) განტოლებაა: $2x + 5y = 470$

შემოწმება: $2 \cdot 60 + 5 \cdot 70 = 470$

აღნიშნული ტოლობა არის ჭეშმარიტი, ე.ი. მანქანას შეიძლება ჯერ ემოძრავა 2 სთ-ის განმავლობაში 60 კმ/სთ სიჩქარით, ხოლო შემდეგი 5 სთ-ის განმავლობაში – 70 კმ/სთ სიჩქარით.

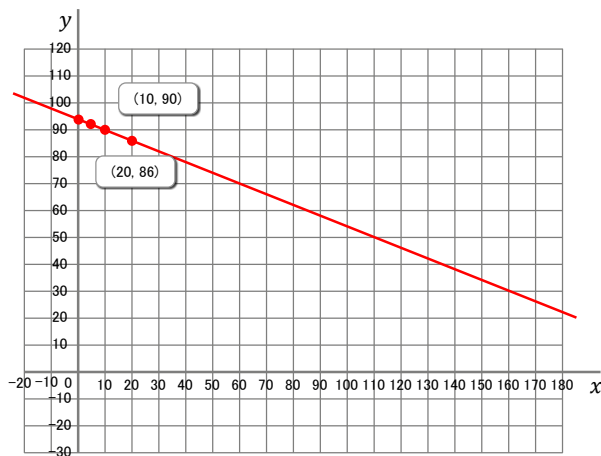
⊕ **მინიმუმი:** მიაქციეთ ყურადღება – როგორც ხედავთ, თუ გზაზე არ იქნებოდა სიჩქარის შეზღუდვა, მანქანას შეეძლო ემოძრავა სხვადასხვა სიჩქარით და ყველა შესაძლო კომბინაცია იქნებოდა განტოლების ამონახსნი.

თუ გზაზე იქნებოდა სიჩქარის შეზღუდვა, მაგალითად: **მანქანას შეუძლია იმოძრაოს არაუმეტეს 90 კმ/სთ სიჩქარისა**, მაშინ ამოცანის პირობას დააკმაყოფილებდა მხოლოდ ის წყვილები, სადაც x და y ცვლადების მნიშვნელობები იქნებოდა 90-ზე ნაკლები;

⊕ **საკვანძო კითხვა:** შესაძლებელია თუ არა ავტომობილის სიჩქარე იყოს უარყოფითი?

ნახაზი 2 – წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნების გრაფიკული წარმოდგენა

| | | |
|------------------|------|----------|
| $y = -0.4x + 94$ | | |
| x | y | $(x;y)$ |
| 1 | 93.6 | (1;93.6) |
| 10 | 90 | (10; 90) |
| 20 | 86 | (20; 86) |
| 60 | 70 | (60; 70) |



ნახაზი 1

ამონახსნთა ყველა წყვილი წარმოადგენს ნახ.1-ზე მოცემულ წრფეს, რაც არის წრფივი ორუცნობიანი განტოლების გრაფიკული გამოსახვა, თუმცა, კონტექსტიდან გამომდინარე, წრფის ყველა წერტილი ვერ იქნება ამოცანის ამონახსნი.



წიგნი 3 – ტოლფასი განტოლებები

როგორც ზემოთ დავინახეთ, $2x + 5y = 470$ განტოლება გარდაქმნის შედეგად შეიძლება ჩაიწეროს ორი სხვა ფორმითაც

I ვარიანტი

წარმოვადგინოთ y ცვლადი x -ით

$$5y - 2x + 470$$

ტოლობის ორივე მხარის 5-ზე გაყოფით მივიღებთ: $y = -0.4x + 94$

II ვარიანტი

წარმოვადგინოთ x ცვლადი y -ით

$$2x = -5y + 470$$

ტოლობის ორივე მხარის 2-ზე გაყოფით მივიღებთ: $x = -2.5y + 235$

აღნიშნულ განტოლებებს ერთნაირი ამონახსნთა სიმრავლე აქვს.

ცნება: ტოლფასი განტოლება

განტოლებებს, რომელთაც ერთნაირი ამონახსნთა სიმრავლე აქვთ, **ტოლფასი განტოლებები** ეწოდება.



სავარჯიშოები



ჯგუფური სამუშაო

1. დაადგინეთ, $(80; 20)$ და $(40; 78)$ წყვილებიდან რომელია ამოცანის ამონახსნი.
შეამოწმეთ, შერჩეული წყვილი დააკმაყოფილებს განტოლების ჩანაწერის მეორე ვარიანტს?
2. ჩამოთვლილთაგან რომელია წრფივი ორუცნობიანი განტოლება?
ა) $3x + 5 = -4x - 2$; ბ) $3x + 5y = 12$; გ) $5y + 2y^2 = y + 18$;
დ) $y^2 - y = 8$; ე) $3x + y = y - 5$; ვ) $3x - 4y = -5$.
3. შეარჩიეთ $4x - 3y = 9$ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნი (ამონახსნები).
ა) $(-2; 1)$; ბ) $(1; 3)$; გ) $(3; 1)$; დ) $(2; 0)$.
4. შეარჩიეთ განტოლება, რომლის ამონახსნია $(-1; 2)$:
ა) $3x + y = 3$; ბ) $2x - y = -4$; გ) $5x + 2y = 9$; დ) $2x + y = 0$.
5. ჩამოთვლილთაგან რომელია $20x + 10y = 30$ განტოლების ტოლფასი განტოლება/განტოლებები?
პასუხი დაასაბუთეთ.
ა) $2x + 3y = 30$; ბ) $2x + y = 3$; გ) $4x + 2y = 6$; დ) $10x = -5x + 15$.
6. შეადგინეთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლება:
ა) x და y ცვლადების გამოყენებით; ბ) a და b ცვლადების გამოყენებით.
7. იპოვეთ $3x - 2y = 11$ განტოლების ამონახსნი, თუ ცნობილია, რომ $x = -4$.
8. იპოვეთ $5x - 2y = 2$ განტოლების ამონახსნი, თუ ცნობილია, რომ x ორჯერ ნაკლებია y -ზე.
9. იპოვეთ $x + y = 15$ განტოლების რაიმე სამი ამონახსნი.
10. დაასახელეთ $3x - y = 18$ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა რამდენიმე წყვილი.
11. შეადგინეთ წრფივი ორუცნობიანი განტოლება, რომლის ამონახსნია $(5; -2)$ რიცხვთა წყვილი.
12. გამოიყენეთ ტოლობის თვისებები და დაწერეთ $5x + 2y = 28$ განტოლების ტოლფასი განტოლება.
13. **მასალის გამოკრება:** დაადგინეთ, აკმაყოფილებს თუ არა მოცემული წერტილი მოცემულ განტოლებას (მდებარეობს თუ არა წერტილი მოცემული განტოლების შესაბამისი წრფის გრაფიკზე).
ა) $(2; 5) y = 4x - 3$; ბ) $(-4; 2) y = -x - 3$; გ) $(4; -1) y = -2x + 7$;
დ) $(3; -1) y = 2x - 7$; ე) $(-1; 7) y = -2x + 5$; ვ) $(1; 6) y = -3x + 5$.
14. ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან გამოსახეთ x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით:
ა) $x + 2y = 24$; ბ) $-2x + 4y = 30$.
15. ქვემოთ მოცემული განტოლებებიდან გამოსახეთ y ცვლადი x -ის საშუალებით:
ა) $6x + 3y = 18$; ბ) $2x - 5y = 8$.


სავარჯიშოები

წინარე მასალის გაეორება

16. 4 ტ ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული დანახარჯია 1 600 ლარია, ხოლო 20 ტონა ყურძნის მოყვანისთვის – 3 800 ლარი.
- ა) იპოვეთ ფიქსირებული დანახარჯი და 1 ტ ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული ცვლადი დანახარჯი;
- ბ) ააგეთ დანახარჯების წრფივი მოდელი და შესაბამისი გრაფიკი;
- გ) გამოთვალეთ 60 ტონა ყურძნის მოყვანისთვის გაწეული სრული დანახარჯი.
17. თუ საწარმო გამოუშვებს და გაყიდის 400 ცალ ტელევიზორს, მაშინ მისი შემოსავალი იქნება 60 000 ლარი:
- ა) გამოთვალეთ ტელევიზორის საცალო ფასი;
- ბ) ააგეთ შემოსავლის წრფივი მოდელი;
- გ) გამოთვალეთ საწარმოს მიერ მიღებული შემოსავალი, თუ გამოშვებული და გაყიდული არის 300 ცალი ტელევიზორი.
18. ორი სატელეფონი კომპანია მომხმარებლებს სთავაზობს საატელეფონო მომსახურების სხვადასხვა პირობებს. კომპანია A-ს შეთავაზებიდან გამომდინარე: თუ 4 წუთი ისაუბრებთ საზღვარგარეთ, მაშინ უნდა გადაიხადოთ 12 ლარი, ხოლო თუ 8 წუთი ისაუბრებთ მაშინ 18 ლარი
- ა) გამოთვალეთ რამდენია წუთის ღირებულება?
- ბ) რამდენი უნდა გადაიხადოს მომხმარებელმა თუ ისაუბრებს 32 წუთი? 80წუთი?

5.2. წრფივი ორუცნობიანი განტოლება და მისი ამონახსნები

ამოცანა

ელენეს მხოლოდ 20-თეთრიანი მონეტები აქვს, დაჩის კი მხოლოდ 50-თეთრიანი მონეტები. მონეტების საერთო რაოდენობაა 15. ელენეს და დაჩის ერთად 6 ლარი აქვთ. რამდენი მონეტა აქვთ ელენეს და დაჩის ცალ-ცალკე?

ამოხსნა:

თუ 20-თეთრიანი მონეტების რაოდენობას x -ით აღვნიშნავთ, 50-თეთრიანი მონეტების რაოდენობას კი y -ით, ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ ორ განტოლებას: $x + y = 15$ (1) და $20x + 50y = 600$ (2)

(1) და (2) განტოლებებით შექმნილი განტოლებათა სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 600 \end{cases} \quad (3)$$



20 თეთრის ნომინალის მონეტა



50 თეთრის ნომინალის მონეტა

ცნება:

წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა და მისი ამონახსნი.

მიღებულ (1) და (2) განტოლებას ერთად წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემა ეწოდება. ხოლო ამ განტოლებათა საერთო ამონახსნს – წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.



მაგალიტი 1

განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} x + y = 15 \\ 20x + 50y = 600 \end{cases}$ ამოვხსნათ შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით

| x | y | $x + y$ | $20x + 50y$ |
|-----|-----|---------|-------------|
| 10 | 5 | 15 | 450 |
| 9 | 6 | 15 | 480 |
| 7 | 8 | 15 | 540 |
| 6 | 9 | 15 | 570 |
| 5 | 10 | 15 | 600 |

როგორც ცხრილიდან ჩანს, განტოლებათა სისტემის ამონახსნი არის რიცხვთა წყვილი (5; 10), რადგანაც ამ განტოლებათა სისტემაში შემავალ ორივე განტოლებას ეს რიცხვები ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს, მართლაც: $5 + 10 = 15$ და $20 \cdot 5 + 50 \cdot 10 = 600$

პასუხი: ელენეს აქვს 5 ოცთეთრიანი მონეტა, დაჩის კი 10 50-თეთრიანი მონეტა.



ნიშნობა 2

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით

ვიპოვოთ ამ ორი განტოლების საერთო ამონახსნი, რაც ასევე განტოლებათა სისტემის ამონახსნიც იქნება.

პასუხი:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

| x | y | $x + y$ | $x - 2y$ |
|-----|-----|---------|----------|
| 0 | 4 | 4 | -8 |
| 1 | 3 | 4 | -5 |
| 2 | 2 | 4 | -2 |
| 3 | 1 | 4 | 1 |
| 4 | 0 | 4 | 3 |

როგორც ვხედავთ, შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით შევძელით, გვეპოვა ცვლადების ისეთი მნიშვნელობები: $x = 2$ და $y = 2$, რომლებიც სისტემაში შემავალ ორივე განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად. სწორედ ეს წყვილი (ცხრილში გაფერადებულია შესაბამისი სტრიქონი) არის მოცემული განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.



სავარჯიშოები

1. ცხრილის გამოყენებით და შერჩევის ხერხით იპოვეთ მთელი რიცხვები, რომლებიც ერთდროულად აკმაყოფილებენ მოცემულ ორ განტოლებას:

ა) $x + y = 4$ ბ) $x + y = 11$ გ) $y = x + 2$ დ) $y = 6 + x$
 3x + 5y = 14 4x + 3y = 40 9x - 4y = 7 8x - 3y = -3

2. დაადგინეთ, არის თუ არა ცვლადების მოცემული წყვილი ერთდროულად ორივე განტოლების ამონახსნი:

ა) $x = 5; y = 2$ ბ) $x = 5; y = 4$ გ) $a = 5; b = -3$ დ) $a = 4; b = -1$
 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = 10 \end{cases}$

3. შერჩევის ხერხით, იპოვეთ ორივე განტოლებისთვის საერთო მთელი ამონახსნი:

ა) $x + y = 4$ ბ) $x + y = 6$ გ) $a - b = 1$ დ) $p - q = 3$
 2x - y = 5 2x + y = 10 2a + 3b = 2 5p + 2q = 29

5.3. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი

საკვანძო კითხვა: როგორი ურთიერთმდებარეობა შეიძლება ჰქონდეს სიბრტყეზე ორ წრფეს?

§5.1-ში ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნები განლაგდება წრფეზე და წრფივი ორუცნობიანი განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე გრაფიკულად წარმოადგენს წრფეს



ნიმუში 1

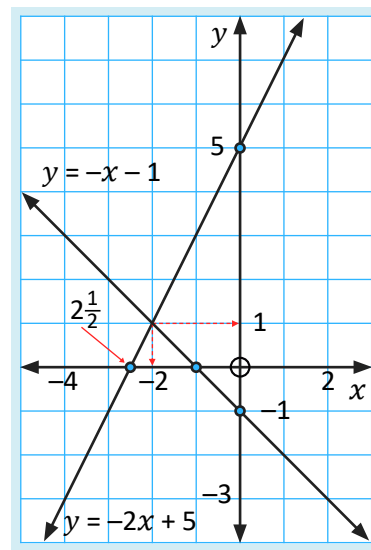
განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

ამოხსნათ

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

ჩავწერთ თითოეული განტოლების ტოლფასი განტოლება, გამოვსახოთ y ცვლადი x -ით, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$



შევვიძლია ავაგოთ სისტემაში შემავალი თითოეული განტოლების შესაბამისი წრფე. როგორც ვიცი, წრფის ასაგებად საკმარისია 2 წერტილი. სიმარტივისთვის ხშირად პოულობენ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს. წერტილების შერჩევის პროცესი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ცხრილის სახით:

| $y = -x - 1$ | | |
|--------------|-----|----------|
| x | y | $(x; y)$ |
| 0 | -1 | (0; -1) |
| -1 | 0 | (-1; 0) |

| $y = 2x + 5$ | | |
|--------------|-----|-----------|
| x | y | $(x; y)$ |
| 0 | 5 | (0; 5) |
| -2.5 | 0 | (-2.5; 0) |

მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები (ანუ, წერტილი, რომელიც ორივე განტოლების შესაბამის გრაფიკს ეკუთვნის) წარმოადგენს **მოცემული სისტემის ამონახსნს**.

როგორც ვხედავთ, სიბრტყეზე ორი წრფე ერთმანეთს კვეთს წერტილში კოორდინატებით (-2;1). ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წერტილი ერთდროულად აკმაყოფილებს ორივე წრფის შესაბამის განტოლებას.





შემოწმება: მოცემულია ორი წრფივი ფუნქცია $y = -x - 1$ და $y = 2x + 5$

წერტილი $(-2; 1)$ ეკუთვნის ორივე წრფეს, რადგანაც წერტილის კოორდინატების ჩასმით, მივიღეთ სწორი ტოლობა:

$$\begin{aligned} y &= -x - 1 & y &= 2x + 5 \\ 1 &= -(-2) - 1 & 1 &= 2(-2) + 5 \end{aligned}$$

აღნიშნული მეთოდით განტოლებათა სისტემის ამონახსნის პოვნას ეწოდება განტოლებათა სისტემის ამონახსნის **გრაფიკული მეთოდი/ხერხი**.



ნიმუში 2

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

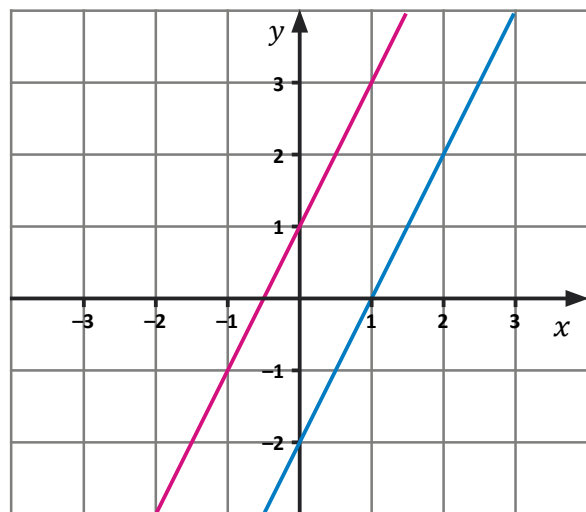
ამოხსნათ

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემა გრაფიკულად, ამისთვის ვიპოვოთ აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები ორივე წრფისთვის ცალ-ცალკე:

| $y = 2x + 1$ | | |
|----------------|-----|---------------------|
| x | y | $(x; y)$ |
| 0 | 1 | (0; 1) |
| $-\frac{1}{2}$ | 0 | $(-\frac{1}{2}; 0)$ |

| $y = 2x - 2$ | | |
|--------------|-----|----------|
| x | y | $(x; y)$ |
| 0 | -2 | (0; -2) |
| 1 | 0 | (1; 0) |



როგორც ნახაზიდან ჩანს, წრფეები პარალელურია და მათ საერთო წერტილი არ გააჩნიათ, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს.

როდის არ აქვს განტოლებათა სისტემას ამონახსნი?

სისტემაში შემავალ განტოლებებს თუ დავაკვირდებით, მივხვდებით, რომ თუ განტოლებების შესაბამის წრფივ ფუნქციებს ერთნაირი საკუთხო კოეფიციენტი (ანუ დახრის კუთხე) აქვთ, ისინი არ იკვეთებიან, ანუ, განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს.

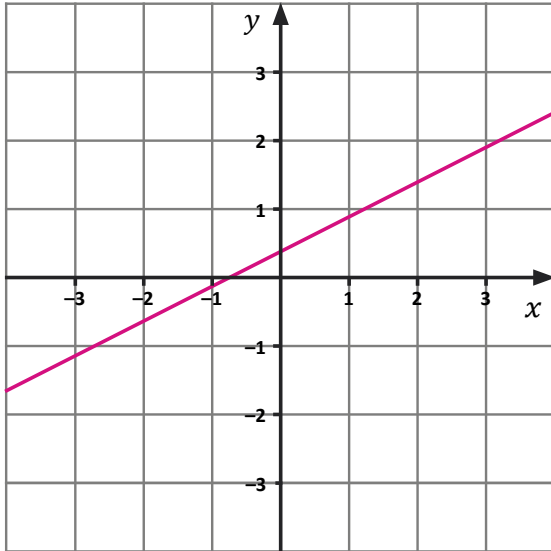


წიგნი 3

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას

ამოხსნათ

$$\begin{cases} y = 0.5x + \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{0.2}{0.5} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0.5x + \frac{2}{5} \\ y = 0.5x + \frac{2}{5} \end{cases}$$



სისტემაში შემავალი ორი განტოლების შესაბამისი ორი წრფე ერთმანეთს ემთხვევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს; ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი სისტემაში შემავალი ორივე განტოლების შესაბამისი გრაფიკის წერტილია.



წიგნი 4

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

საბაზრო წონასწორობის წრფივი მოდელი – თუ რაიმე პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ მაღალია, მაშინ მომხმარებლები მას ნაკლები რაოდენობით იყიდებიან. თუ პროდუქციის საცალო ფასი საკმაოდ დაბალი იქნება, მაშინ მომწოდებელმა აღნიშნული პროდუქცია შეიძლება არც კი გაყიდოს. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში პროდუქციის საცალო ფასს აქვს ტენდენციადაკმაყოფილოს, როგორც მიმწოდებლის, ასევე მომხმარებლის ინტერესები, ე.ი. საცალო ფასი უნდა იყოს ისეთი, რომ მიმწოდებელს სურდეს ამ პროდუქციის გაყიდვა და მყიდველს კი შეეძლოს მისი ყიდვა. ასეთ მდგომარეობას ადგილი ექნება მაშინ, როცა ბაზარზე მიწოდებული პროდუქციის რაოდენობა გაუტოლდება ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის რაოდენობას, ე.ი. როცა მოთხოვნისა და მიწოდების გრაფიკები ერთმანეთს გადაკვეთს. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა.

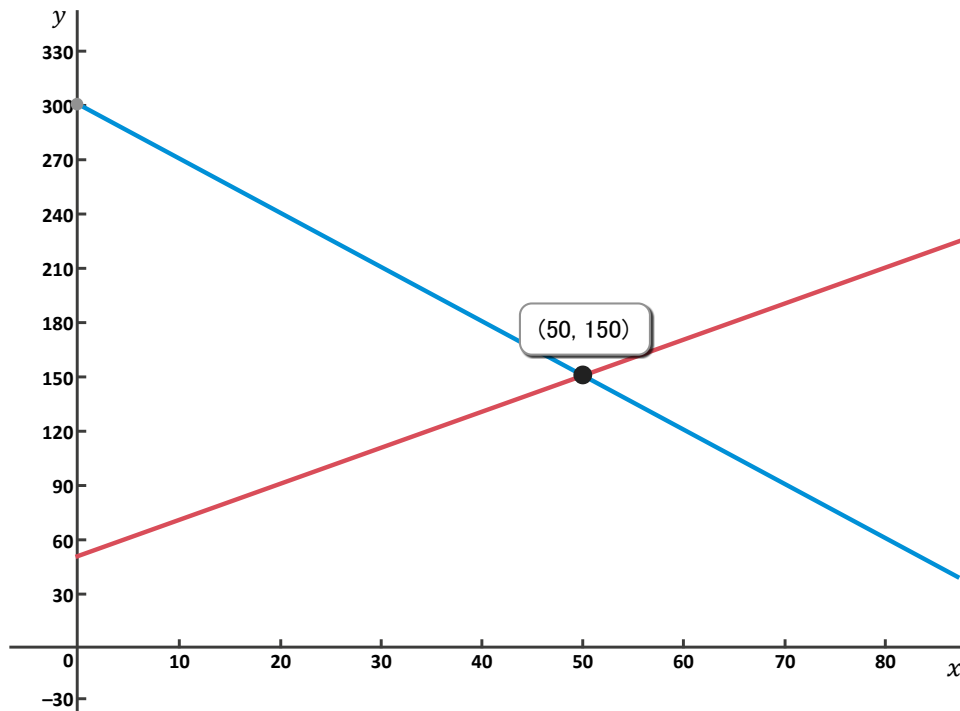
მაგალითი: პროდუქციაზე მოთხოვნის ფუნქციაა $y = -3x + 300$, ხოლო მიწოდების ფუნქციაა $y = 2x + 50$, პროდუქციის რა რაოდენობისთვის გაუტოლდება ერთმანეთს მოთხოვნისა და მიწოდების ფასები? ვიპოვოთ აღნიშნული ფასი.



ამოხსნა: $-3x + 300 = 2x + 50 \Rightarrow x = 50$, ხოლო $p(50) = 150$

ე.ი. თუ ბაზარზე გამოტანილი იქნება 50 ცალი აღნიშნული პროდუქცია, იგი მთლიანად გაიყიდება და შესაბამისი საცალო ფასი იქნება 150 ლარი.

(50; 150) წერტილს უწოდებენ საბაზრო წონასწორობის წერტილს, $p = 150$ ლარს კი – წონასწორულ საბაზრო ფასს.



საზოგადოდ, $(x_0; y_0)$ წერტილს, რომელშიც მოთხოვნისა და მიწოდების გრაფიკების ფუნქციების გრაფიკები გადაიკვეთება, ეწოდება საბაზრო წონასწორობის წერტილი, ხოლო y_0 -ს წონასწორული საბაზრო ფასი.

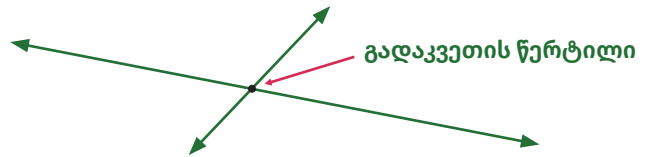
!! ყურადღება მიაქციეთ და გაიაზრეთ

წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს ან ერთი ამონახსნი, ან არცერთი, ან უამრავი ამონახსნი:

როდესაც განტოლებათა სისტემაში განტოლებები მოცემულია კუთხური კოეფიციენტით:

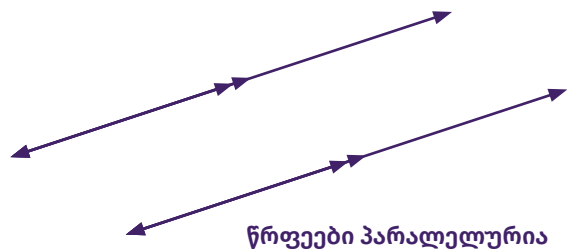
$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

1. $k_1 \neq k_2$, წრფეები კვეთს ერთმანეთს და სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

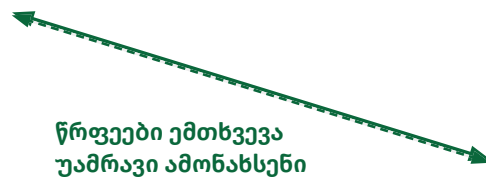


2. თუ $k_1 = k_2$, და $b_1 \neq b_2$ მაშინ წრფეები პარალელურია და სისტემას ამონახსნი არ აქვს;

ჩვენ ვიცით, რომ როდესაც ორ წრფეს ერთნაირი კუთხური კოეფიციენტი/დახრილობა აქვთ, მაშინ ისინი პარალელურია



3. თუ $k_1 = k_2$ და $b_1 = b_2$, მაშინ წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა და სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი





ღაბატებითი ინფორმაცია მათემატიკის მოყვარულთათვის*

თუ განტოლებათა სისტემა ჩაწერილია $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ სახით, მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების შესახებ სამართლიანია მსჯელობა:

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები არ არის პროპორციული:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას აქვს **ერთადერთი ამონახსნი**, რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **ერთ წერტილში იკვეთებიან**.

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები პროპორციულია, მაგრამ თავისუფალი წევრები არ არის მათი პროპორციული:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$

მაშინ განტოლებათა სისტემას **არა აქვს ამონახსნი**, რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **პარალელურია**.

- როცა $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი კოეფიციენტები და თავისუფალი წევრები პროპორციულია:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

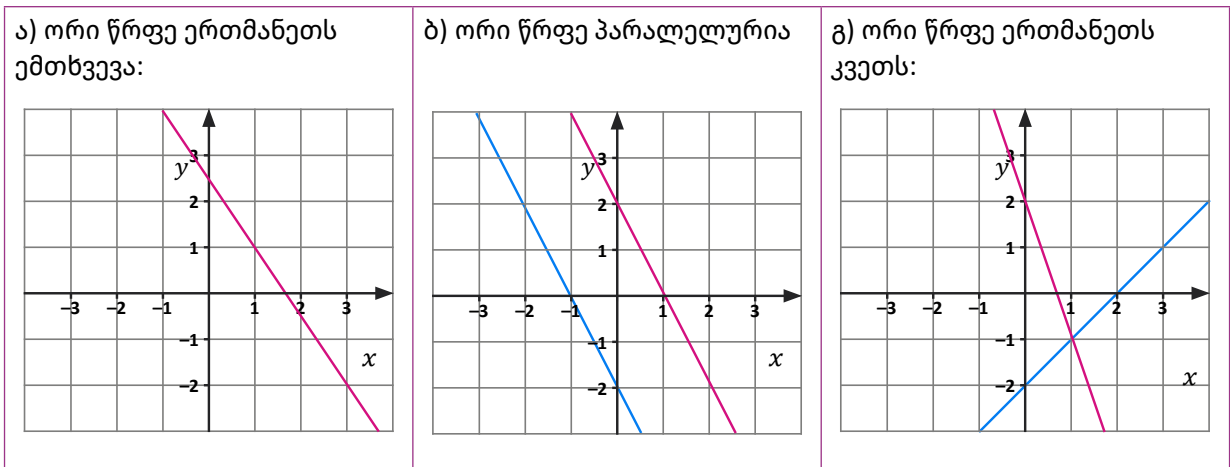
მაშინ სისტემას აქვს **უამრავი ამონახსნი**, რაც გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი წრფეები **ერთმანეთს ემთხვევა**.

საკვარჯიშოები

1. რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებათა სისტემას:

ა) $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \\ y = 0.2x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

2. ნახაზის მიხედვით დაადგინე, რამდენი ამონახსნი აქვს წრფივ განტოლებათა სისტემას? რატომ?



3. იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გრაფიკული ხერხით (შეგიძლიათ, გამოიყენოთ [Desmos](#) პროგრამა):

ა) $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = -5x - 1 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$
 დ) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$ ე) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

4. განტოლებათა სისტემების ამოხსნელად გაარკვიეთ, რამდენი ამონახსნი აქვს მოცემულ განტოლებათა სისტემას

ა) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ -2x - 5y = -7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 6x + 10y = 5 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$

5. მოცემულია ორუცნობიანი წრფივი განტოლება: $5x - 2y = 11$; დაწერეთ ისეთი ორუცნობიანი განტოლება, რომ მოცემულ განტოლებასთან ერთად მიღებულ განტოლებათა სისტემას:

ა) არ ჰქონდეს ამონახსნი; ბ) ჰქონდეს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა; გ) ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი.

6. მოცემულია ორი განტოლება:

$3x + 5y = 13$ (1) $5x - 4y = 10$ (2),

გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და დაასახელეთ რიცხვთა ისეთი წყვილი, რომელიც წარმოადგენს:

 **სავარჯიშოები**

- ა) (1) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს;
- ბ) (2) განტოლების ამონახსნს და არ წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს;
- გ) არ წარმოადგენს არც (1) და არც (2) განტოლების ამონახსნს;
- დ) წარმოადგენს ორივე განტოლების ამონახსნს.


7. გამოიყენეთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი და იპოვეთ სისტემაში შემავალი განტოლებების შესაბამისი გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები:

ა) $\begin{cases} y = x \\ y = -2 + 2 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x \end{cases}$ გ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$


დ) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 5 - x \end{cases}$ ე) $\begin{cases} y = 2 - 3x \\ y = x - 2 \end{cases}$ ვ) $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

8. კაფე-ბარში გარკვეული რაოდენობის ოთხადგილიანი და სამადგილიანი მაგიდეებია განლაგებული, სულ 10 მაგიდა. რამდენი სამადგილიანი და რამდენი ოთხადგილიანი მაგიდაა კაფე-ბარში, თუ სულ ადგილების რაოდენობა 33-ს შეადგენს. შეადგინეთ განტოლებათა სისტემა და ამოხსენით გრაფიკული ხერხით.


 **მათემატიკის მოყვარულთათვის***

9.  **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი და დაასახელეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სამი წყვილი:

ა) $\begin{cases} ax + 10y = -6 \\ -2x - 5y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 6x + 10y = 5 \\ 3x + 5y = a \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 60x + ay = 15 \\ 12x - 4y = 3 \end{cases}$

10.  **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას არ აქვს ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 6x + ay = 15 \\ 12x - 14y = 4 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 4x + 5y = 8 \\ ax + 15y = 3 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} -39x - 12y = a \\ 13x + 4y = 3 \end{cases}$

11.  **გამოწვევა:** იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ მოცემულ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ ax + 21y = 3 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 6x + ay = 15 \\ 2x - 4y = 7 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 5x + 15y = 15 \\ 13x - 8y = a \end{cases}$

5.4. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ხერხით

ამოცანა

ხატიამ და სანდრომ მარკეტში ტკბილეულის ყიდვა გადაწყვიტეს. ხატიამ იყიდა ორი შოკოლადის ფილა და ერთი ხუთლარიანი წვენი. სანდრომ კი სამი ისეთივე შოკოლადის ფილა და ორი ლარნახევრიანი ორცხობილა შეიძინა, რაშიც მან გადაიხადა იგივე თანხა რამდენიც ხატიამ. რა ღირს ერთი ფილა შოკოლადი? რამდენი ლარი გადაიხადა თითოეულმა?


ამოხსნა:

თუ ხატიას მიერ ნაყიდ პროდუქტში გადახდილ თანხას y -ით აღვნიშნავთ, ხოლო ერთი შოკოლადის ფილის ღირებულებას x -ით, მაშინ ხატიას გადახდილი თანხისთვის მივიღებთ წრფივ ორუცნობიან განტოლებას:

$$y = 2x + 5 \quad (1)$$

სანდროს მიერ გადახდილი თანხისთვის მივიღებთ:

$$y = 3x + 3 \quad (2)$$

ამოცანის ამოხსნა იხილეთ **ნიმუში 1-ში** 



ნიმუში 1 – ტოლფასი განტოლებათა სისტემები

(1) და (2) ერთად გვაძლევს წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$$

უკვე ვიცით წრფივი ორცვლადიანი განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხი, ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის **ჩასმის ხერხი**. ამისათვის სისტემის პირველი განტოლებიდან y -ის მნიშვნელობა, რომელიც x -ითაა გამოსახული, ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში y -ის ნაცვლად, მივიღებთ წრფივ ერთუცნობიან განტოლებას:


$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 3x + 3, \\ 2x + 5 - 5 &= 3x + 3 - 5, \\ 2x &= 3x - 2, \\ 2x - 3x &= 3x - 2 - 3x, \\ -x &= -2, \\ x &= 2 \end{aligned}$$


თუ x -ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ სისტემის პირველ განტოლებაში x -ის ნაცვლად, მივიღებთ: $y = 9$.

მაშასადამე, შოკოლადის ფილა ღირს 2 ლარი, ხოლო ხატიას და სანდრო მიერ ტკბილეულში გადახდილი თანხა ცალ-ცალკე შეადგენს 9 ლარს.

პასუხი: (2; 9)

ცნება: თუ სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან განვსაზღვრავთ (გამოვსახავთ) რომელიმე უცნობს და მიღებულ მნიშვნელობას მეორე განტოლებაში ჩავსვამთ შესაბამისი უცნობის ნაცვლად, მივიღებთ მოცემულ განტოლებათა სისტემის **ტოლფას განტოლებათა სისტემას**. ტოლფასობის აღსანიშნავად ვიყენებთ \Leftrightarrow სიმბოლოს.

თუ განტოლებათა სისტემაში შემავალი განტოლებიდან არცერთი ცვლადი არაა გამოსახული მეორე ცვლადით, მაშინ ერთ-ერთი ცვლადი (რომლის გამოსახვაც უფრო მოსახერხებელია) გამოვსახოთ მეორე ცვლადის საშუალებით და ჩავსვათ მეორე განტოლებაში. განვიხილოთ მაგალითი: 

 **წიგნი 2 – ტოლფასი განტოლებათა სისტემები**

$$\begin{cases} y + x = 10 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \text{დავწეროთ მოცემული განტოლებათა სისტემის ტოლფასი}$$

განტოლებათა სისტემა, სადაც პირველ განტოლებაში ერთ-ერთი ცვლადი y გამოსახულია მეორე x ცვლადით


$$\begin{cases} y + x = 10 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ჩავსვათ მეორე განტოლებაში } y\text{-ის ნაცვლად}$$

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + 5(10 - x) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \text{მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას, რომლის გამარტივების შედეგად ვიპოვიან } x\text{-ს:}$$

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 2x + 50 - 5x = 32 \end{cases}$$

ამ ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსნია: $x = 6$, ცვლადის ეს მნიშვნელობა უნდა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში და მივიღებთ: $y = 4$

პასუხი: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

ზოგჯერ განტოლებათა სისტემაში შემავალი ორივე ცვლადი 1-სგან, ან -1 სგან განსხვავებულ კოეფიციენტს შეიცავს და ერთი ცვლადის გამოსახვა მეორე ცვლადით, წინა მაგალითისგან განსხვავებით, შედარებით უფრო რთულია. ასეთ შემთხვევაში უმჯობესია, ჯერ რომელიმე ცვლადის კოეფიციენტი გავხადოთ 1-ის ან -1 -ის ტოლი და შემდეგ გავაგრძელოთ ისე, როგორც ეს წინა ნიმუშშია მოცემული. განვიხილოთ მაგალითი: 



ნიმუში 3

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases}$$

პირველი განტოლებიდან გამოვსახოთ x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით, ამისათვის ჯერ განტოლების ყველა წევრი გავყოთ 2-ზე და შემდეგ გამოვსახოთ:

$$x + 1,5y = 10,5$$

$$x = 10,5 - 1,5y \quad (1)$$

მიღებული x ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ ერთცვლადიან განტოლებას:

$$3(10,5 - 1,5y) - 4y = -11$$

$$\text{საიდანაც: } y = 5$$

მიღებული მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x = 10,5 - 1,5 \cdot 5$$

$$x = 3$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ეს გზა ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1,5y = 10,5 \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ 3x - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ 3(10,5 - 1,5y) - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ 31,5 - 4,5y - 4y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ 31,5 - 8,5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ 31,5 - 8,5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10,5 - 1,5y \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10,5 - 1,5 \cdot 5 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{პასუხი: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

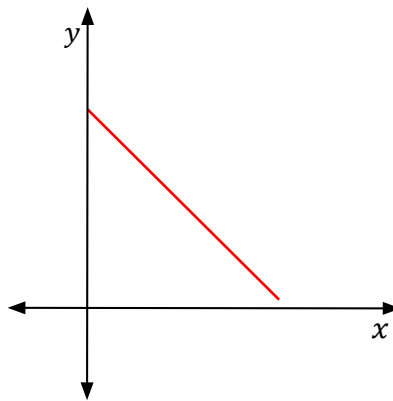


წიგნი 4 – კომპლექსურ დავალებასთან დაკავშირებული ნიმუშის განხილვა

თეორია:

მოთხოვნის წრფივი მოდელი – დავუშვათ საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის ოდენობა საკმაოდ დიდია. ასეთ შემთხვევაში პროდუქცია „კარგად გაიყიდება“, თუ მისი საცალო ფასი შედარებით დაბალი იქნება. რაც უფრო მეტი პროდუქცია იქნება გამოტანილი ბაზარზე, მით ნაკლები იქნება მისი ფასი, ე.ი. პროდუქციის საცალო ფასი დამოკიდებულია ამ პროდუქციის რაოდენობაზე. დავუშვათ, ეს დამოკიდებულება არის წრფივი, ე.ი. აქვს შემდეგი სახე $y = kx + b$, სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა. x -ის ზრდასთან ერთად საცალო ფასი y მცირდება, ამიტომ $k < 0$ და აღნიშნული ფუნქცია კლებადია.

$y = kx + b$ განტოლებას, სადაც x არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა, y – კი საცალო ფასი, ეწოდება მოთხოვნის განტოლება



მაგალითი: თუ პროდუქციის საცალო ფასია 10 ლარი, მაშინ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 1000, ხოლო თუ საცალო ფასია 8 ლარი, გაყიდული პროდუქციის რაოდენობაა 2000. ააგეთ მოთხოვნის წრფივი მოდელი.

ამოხსნა: მოთხოვნის განტოლებაა $y = kx + b$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე ამ განტოლებას აკმაყოფილებს რიცხვთა ორი წყვილი: (1 000; 10) და (2 000; 8), ე.ი. შევადგენთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 10 = 1\,000k + b \\ 8 = 2\,000k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{8 - 10}{2\,000 - 1\,000} \\ b = 10 - 1\,000k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -0.002 \\ b = 12 \end{cases}$$

ე.ი. მოთხოვნის განტოლებაა $y = -0,002x + 12$



წიგნი 5

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x + 1.5y = 10.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x = 10.5 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(10.5 - 1.5y) + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 21 - 3y + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases}$$

აღნიშნულ განტოლებათა სისტემას აქვს უამრავი ამონახსნი.



წიგნი 6

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x + 1.5y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(12 - 1.5y) + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 24 - 3y + 3y = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 = 21 \\ x = 12 - 1.5y \end{cases}$$

მივიღეთ მცდარი ტოლობა, ამიტომ აღნიშნულ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი არ აქვს.

ოსაგადასაწერიელი პრაქტიკა

1. პირველი განტოლებიდან გამოსახე y ცვლადი x ცვლადის საშუალებით:

$$\begin{cases} y + 2x = 15 \\ 2y - 3x = 9 \end{cases}$$

ჩასვი მეორე განტოლებაში y ცვლადის მაგივრად, ამოხსენი მიღებული ერთცვლადიანი განტოლება. მიღებული x ცვლადის მნიშვნელობა ჩასვი პირველ განტოლებაში x ცვლადის ნაცვლად და იპოვე y ცვლადი. მიღებული წყვილი იქნება განტოლებათა სისტემის ამონახსნი.

2. პირველი განტოლებიდან გამოსახე x ცვლადი y ცვლადის საშუალებით და ისარგებლე წინა დავალების ინსტრუქციით:

$$\begin{cases} x - y = 13 \\ 2x - 5y = 61 \end{cases}$$

3. გამოსახე რომელიმე ცვლადი მეორე ცვლადის საშუალებით და ისარგებლე პირველი დავალების ინსტრუქციით:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ 3x - 5y = 55 \end{cases}$$

სავარჯიშოები

1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჩასმის ხერხით:

| | | |
|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| ა) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ | ბ) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ | გ) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ |
| დ) $\begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$ | ე) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x - 8 \end{cases}$ | ვ) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$ |
| ზ) $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = -x - 6 \end{cases}$ | თ) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x - 6 \end{cases}$ | ი) $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ y = -10 - 6x \end{cases}$ |

2. გამოიყენე ჩასმის ხერხი და ამოხსენი განტოლებათა სისტემა:

| | | |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| ა) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$ | ბ) $\begin{cases} y + 4x = 6 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ | გ) $\begin{cases} x = 2y - 6 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ |
| დ) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ y = 3 - 4x \end{cases}$ | ე) $\begin{cases} x = 1 - 2y \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ | ვ) $\begin{cases} y = 3y + 12 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ |
| ზ) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2x - 5y = 27 \end{cases}$ | თ) $\begin{cases} x = 4y - 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$ | ი) $\begin{cases} y = 5x + 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ |

3. გამოიყენე ჩასმის ხერხი და გრაფიკის აუგებლად იპოვე შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილი:

| | | |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| ა) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$ | ბ) $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ | გ) $\begin{cases} y = 2 - x \\ y + 2x = -1 \end{cases}$ |
| დ) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 7y + 3x = -10 \end{cases}$ | ე) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y + 3x = 7 \end{cases}$ | ვ) $\begin{cases} 4x + 7y = 10 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$ |

5.5. წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა შეკრების ხერხით

განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შეკრების ხერხი გულისხმობს შემდეგს:

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს გარკვეულ სიტუაციას:

განტოლებათა სისტემაში შემავალ ერთ-ერთ განტოლებას ვტოვებთ უცვლელად, ხოლო მეორე განტოლების ნაცვლად ვწერთ სისტემაში შემავალი ორივე განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მიღებულ განტოლებას. ასე მიღებული განტოლებათა სისტემა იქნება საწყისი სისტემის ტოლფასი. ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრება კი მაშინ მიგვიყვანს სისტემის გამარტივებამდე, თუ შეკრების შედეგად ორი ცვლადიდან ერთ-ერთი ცვლადი გაქრება (გაბათილდება). ეს კი მაშინაა შესაძლებელი, თუ განტოლებებში ერთ-ერთი ცვლადის კოეფიციენტები მოდულით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო.

თუ მოცემულ განტოლებათა სისტემის პირველ განტოლებას უცვლელად გადავიტანთ, ხოლო მეორე განტოლებას შევცვლით ამ ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრებით მიღებული განტოლებით, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას განტოლებათა სისტემას. მიღებულ მეორე განტოლებაში y ცვლადი გაქრება (გაბათილდება) და შეგვიძლია ვიპოვოთ x ცვლადის მნიშვნელობა. თუ x -ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში x ცვლადის ნაცვლად, ვიპოვოთ y ცვლადსაც



მაგალიტი 1

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -2x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ -x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{პასუხი: } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$



ნიმუში 2

იმ შემთხვევაში, თუ განტოლებათა სისტემაში შემავალი არცერთი ცვლადის კოეფიციენტი არ არის მოდულით ტოლი და ნიშნით საწინააღმდეგო, როგორც ეს პირველ ნიმუშში გვქონდა, მაშინ განტოლების თვისებების გამოყენებით, სისტემა შეგვიძლია მივიყვანოთ სასურველ კოეფიციენტამდე. განვიხილოთ მაგალითი:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = -2 \\ 5x - y = 27 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \quad (\text{პირველი განტოლება უცვლელად გადავიტანოთ, ხოლო მეორე განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ 2-ზე, რათა } y \text{ ცვლადის კოეფიციენტები გახდეს მოდულით ტოლი და ნიშნით საწინააღმდეგო})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = -2 \\ 10x - 2y = 54 \end{array} \right. \quad (\text{პირველი განტოლება გადავიტანოთ ისევ უცვლელად, მეორე განტოლების ნაცვლად კი დავწეროთ ამ ორი განტოლების წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მიღებული განტოლება, ამით მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას, სადაც ერთი ცვლადი შეკრების დროს გაბათილდა})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = -2 \\ 13x = 52 \end{array} \right. \quad (\text{მიღებული ერთცვლადიანი განტოლების } x \text{ ამონახსნი ჩავსვავთ პირველ განტოლებაში და ვიპოვოთ მეორე ცვლადი } -y)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = -2 \\ x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot 4 + 2y = -2 \\ x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y = -14 \\ x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -7 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

პასუხი: $\left\{ \begin{array}{l} y = -7 \\ x = 4 \end{array} \right.$



მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. რა განტოლებას მივიღებთ, თუ მის ორივე მხარეს

ა) $2x - 3y = 5$ გავამრავლებთ 2-ზე;

დ) $x + 3y = 7$ გავამრავლებთ -3-ზე;

ბ) $2x + 5y = 1$ გავამრავლებთ 4-ზე;

ე) $3x - 2y = 8$ გავამრავლებთ -2-ზე;

გ) $5x - y = 2$ გავამრავლებთ 5-ზე;

ვ) $-2x + 5y = -1$ გავამრავლებთ -1-ზე.



საკვარჯიშოები

1. რა განტოლება მიიღება სისტემაში შემავალი ორი განტოლების წევრ-წევრად შუკრების შედეგად?

ა) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 7 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 5x - y = 6 \\ -5x + 3y = -8 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} -8x + 2y = 11 \\ 8x - 3y = -7 \end{cases}$

2. გამოიყენეთ შუკრების ხერხი და იპოვეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი:

ა) $\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ -x + y = 7 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} 5x + 2y = -19 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 7x - y = 50 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -12 \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} 4x + y = 19 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$

თ) $\begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 3x - 5y = -49 \end{cases}$

ი) $\begin{cases} 6x + 5y = -2 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$

კ) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ -x + 5y = -3 \end{cases}$

ლ) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 8 + 7y = 12 \end{cases}$

მ) $\begin{cases} 3x + 7y = 47 \\ 7x + 3y = 43 \end{cases}$

ნ) $\begin{cases} 2x + 7y = -51 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

ო) $\begin{cases} 3x + y = 17 \\ 2x - y = 23 \end{cases}$

პ) $\begin{cases} 2x - 3y = 14 \\ 5x - 7y = 34 \end{cases}$

5.6. ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემის გამოყენებით

ამ პარაგრაფში განვიხილოთ სიტუაციური ამოცანები, მოვახდინოთ მათი მათემატიკური მოდელირება ორი უცნობის გამოყენებით და გადავჭრათ პრობლემა.



ნიმუში 1

ამოცანა: ორი რიცხვის ჯამია 30, ხოლო სხვაობა 5-ის ტოლი. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამოხსნა: უცნობი ორი რიცხვი აღვნიშნოთ x -ით და y -ით. ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x + y = 30 & \text{გამოვიყენოთ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შუკრების ხერხი.} \\ x - y = 5 & \text{მივიღებთ განტოლებას:} \end{cases}$$

$$2x = 35$$

$$x = 17.5$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობა სისტემის რომელიმე განტოლებაში:

$$17.5 + x = 30$$

$$y = 12.5$$

შემოწმება: $17.5 + 12.5 = 30$

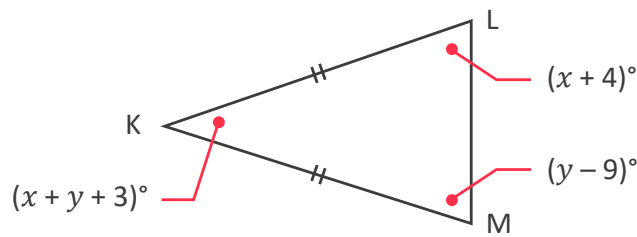
$$17.5 - 12.5 = 5$$

ორივე განტოლება გადაიქცა ჭეშმარიტ ტოლობად.

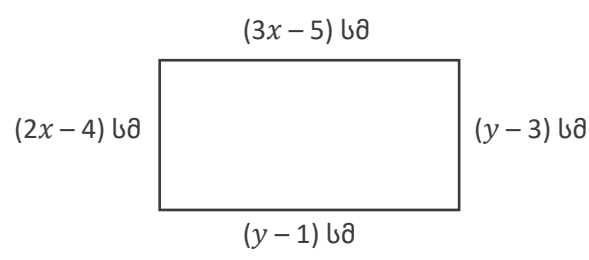
პასუხი: ეს რიცხვებია **12.5** და **17.5**.

სავარჯიშოები

1. ორი რიცხვის ჯამია 200 და სხვაობა 37. იპოვეთ ეს რიცხვები.
2. ერთი რიცხვი მეორეზე 84-ით მეტია, ამ რიცხვების ჯამი კი 278-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
3. ერთი რიცხვი მეორეზე 11-ით მეტია, მათი ჯამი კი 5-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
4. ორი რიცხვიდან ერთი მეორეზე ოთხჯერ მეტია. მათი ჯამი 85-ს შეადგენს. იპოვეთ ეს რიცხვები.
5. საფულეში დევს ოცთეთრიანი და 50-თეთრიანი მონეტები, სულ 13 ცალი, საფულეში 4,1 ლარია. იპოვე რამდენი 20-თეთრიანი და რამდენი 50-თეთრიანი დევს საფულეში.
6. დაჩიმ იყიდა 3 ბურთი და 2 სათამაშო მანქანა, რაშიც გადაიხადა 34,5 ლარი, ელენემ კი ისეთივე 2 ბურთსა და 5 მანქანაში გადაიხადა 56 ლარი. რა ღირს თითოეული ნივთი ცალცალკე?
7. ოთხი ზრდასრული და ხუთი ბავშვისთვის თეატრის ბილეთებში გადაიხადეს 42 ლარი, ხოლო ორი ზრდასრული და სამი ბავშვისთვის – 23 ლარი. იპოვეთ თეატრის ბილეთის ფასი ზრდასრულისთვის და ბავშვისთვის ცალ-ცალკე.
8. ეზოში მხოლოდ ძაღლები და ბატებია. მათი თავების რაოდენობაა 35, ხოლო ფეხების რაოდენობა 98. იპოვეთ რამდენი ძაღლი და რამდენი ბატია ეზოში.
9. რძე იყიდება ერთლიტრიანი და ორლიტრიანი მუყაოს კოლოფებით. დღეს მარკეტში გაიყიდა 97 კოლოფი რძე, რამაც შეადგინა 120 ლიტრი. რამდენი ერთლიტრიანი და რამდენი ორლიტრიანი პაკეტით გაყიდულა რძე მარკეტიდან?
10. მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედი, ნახაზის მიხედვით იპოვეთ K კუთხის ზომა.



11. ნახაზზე მართკუთხედია გამოსახული. იპოვეთ მისი გვერდები





სავარჯიშოები



რთული ნიშნები:

12. თორმეტი წლის წინ ილია მარიაშუ ხუთჯერ უფროსი იყო. რვა წლის შემდეგ მარიაში, იმდენი წლის გახდება, რამდენი წლისაა ილია ახლა. იპოვეთ რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი ახლა.
13. 9 წლის წინ დედა შვილზე სამჯერ უფროსი იყო. რვა წლის შემდეგ მათი ასაკთა ჯამი იქნება 78. რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი დღეს?
14. დემნას და ნინოს ყოველთვიური ხელფასის თანაფარდობაა 2:1. მათი ხარჯების თანაფარდობა კი 9:4. თითოეულის ყოველთვიური დანაზოგი შეადგენს 100 ლარს. იპოვეთ თითოეულის ყოველთვიური ხელფასის ოდენობა.