პროფესიული უნარების სააგენტო

ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი

მათემატიკური წიგნიერება

ალგებრა

სახელმძღვანელო მომზადებულია გაეროს განვითარების პროგრამისა (UNDP) და შვეიცარიის განვითარებისა და თანამშრომლობის სააგენტოს (SDC) მხარდაჭერით. პროფესიული უნარების სააგენტოსა და გაეროს განვითარების პროგრამის საგრანტო პროექტის „საქართველოში სოფლის მეურნეობასთან დაკავშირებული სისტემების გაფართოება და პროფესიული განათლების მოდერნიზაცია, ფაზა – II“ ფარგლებში.

სახელმძღვანელო წარმოადგენს პროფესიული უნარების სააგენტოს საკუთრებას და განკუთვნილია პროფესიული განათლების სტუდენტებისთვის, რომლებიც პროფესიული საგანმანათლებლო პროგრამის ფარგლებში გაივლიან საშუალო განათლების კომპონენტსაც.

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**

მადლობას ვუხდით ჯულიეტა ტაბეშაძეს, მარინე ახალაიას, სვეტა გორგიშელს, მზია დადვანს, ნანა ცინცაძეს, თამარ მურუსიძეს, ნანი სალიას, ნატო გერგაიას, ციცო თორიას, ნინელი ცერცვაძეს და მაია გველესიანს სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

რედაქტორი: **ზურაბ ვახანია**

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

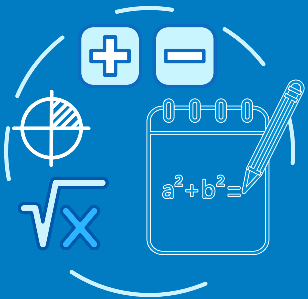
Swiss Agency for Development and Cooperation SDC

პროფესიული უნარების სააგენტო

UNDP

საქართველო, თბილისი, 2022

IX. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა, რომ

- დღეისათვის ერთ-ერთი პოპულარული ატრაქციონის, სათვალთვალო ბორბლის (ე.წ. ეშმაკის ბორბლის) ანალოგი ჯერ კიდევ VXIII საუკუნეში არსებობდა?

საკვანძო კითხვა:

- შეიძლება თუ არა დავადგინოთ, სათვალთვალო ბორბალზე მოძრაობისას დროის ნებისმიერ მომენტში რა სიმაღლეზე იქნება ობიექტი?

კომპლექსური დავალება 1

მათემატიკის მოყვარულებმა დაადგინეს ერთ-ერთი სათვალთვალო ბორბლის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი. მას შემდეგ, რაც კაბინაში ჩაჯდება ადამიანი, შესაძლებელია დავადგინოთ დროის ნებისმიერ მომენტში მიწიდან რა სიმაღლეზე იქნება მისი კაბინა. სიმაღლის დროზე დამოკიდებულება ჩაიწერება შემდეგი ფორმულით: $h(t) = 85\sin\frac{\pi}{20}(t-10) + 90$; სადაც t-შეესაბამება დროს და იზომება წამებში, h შეესაბამება სიმაღლეს და იზომება მეტრებით; გამოდის, რომ სიმაღლე დროის ფუნქციაა.

თქვენი დავალება

1. ააგოთ მოცემული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი; დაადგინოთ მიწიდან მაქსიმუმ რა სიმაღლეზე შეიძლება იყოს ობიექტი;
2. დაადგინოთ, რამდენ ბრუნს გააკეთებს ეშმაკის ბორბალი 180 წამში? 360 წამში?
3. რას გვიჩვენებს ფორმულაში 85? 90?
4. გამოიკვლიოთ, როგორ უნდა დავადგინოთ მოცემული სიტუაციის მათემატიკური მოდელით, სად იქნება ობიექტი დროის სხვადასხვა მომენტში? (იხილეთ Geogebra-ზე შექმნილი მოდელი Geogebra 1; Geogebra 2 – ანგარიშის ფურცლით);

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

5. ჩაწეროთ ნებისმიერი სხვა ეშმაკის ბორბლის მოძრაობის აღმწერი ფუნქცია.
6. გამოიკვლიოთ როგორ შეიძლება წრეზე მოძრავი სხეულის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შედგენა

დავალება წარმოადგინეთ პროგრამა Geogebra-ში შექმნილი მოდელის მეშვეობით, ასევე დაურთეთ პასუხები დავალებაში მოცემულ კითხვებზე.

ნაშრომის პრეზენტაციისას უპასუხეთ შემდეგ კითხვებს:

- რომელი ფუნქციებით არის შესაძლებელი წრეზე მოძრავი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა?
- რას გვიჩვენებს პერიოდი და ამპლიტუდა?
- თუ ვიცით რა სიმაღლეზეა ობიექტი როგორ შეგვიძლია დავადგინოთ რა დრო დასჭირდა აღნიშნულ პოზიციამდე მისვლას?

გაგრძელება

IX. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება 2

საკვანძო კითხვა:

- რა არის ბგერა და როგორ არის დაკავშირებული იგი მათემატიკასთან?

თქვენი დავალება

1. მოიძიოთ ინფორმაცია თუ როგორ წარმოიქმნება ბგერა.
2. მოცემული რესურსის გამოყენებით (იხ. ბმული) www.academo.org, დაადგინოთ, რომელი მათემატიკური ფუნქციის საშუალებით არის შესაძლებელი ბგერის აღწერა.
3. ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალოთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერების სიხშირე.
4. დაუკავშიროთ ერთმანეთს ბგერის ფიზიკური მახასიათებლები (ხმის სიმაღლე; ტონალობა) და მათი შესაბამისი მათემატიკური ფუნქციის პარამეტრები (ამპლიტუდა, სიხშირე).
5. შეადგინოთ გეგმა, რომელიც აღწერს, როგორ არის შესაძლებელი ბგერის შესწავლა და აღწერა შესაბამისი მათემატიკური მოდელის მიხედვით.

ნაშრომი წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, სადაც წარმოდგენილი იქნება როგორც ნახაზები, ასევე გაზომვების შედეგები (ანგარიშის ფურცელი).

ნაშრომის პრეზენტირებისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რომელი მათემატიკური მოდელი დაგეხმარათ დავალების თითოეული პუნქტის შესრულებაში?
- როგორ აისახება პერიოდის, სიხშირის და ამპლიტუდის ცვლილება სიტუაციის აღმწერ მათემატიკურ მოდელში?
- რა ტიპის კანონზომიერება აღმოაჩინეთ სიხშირესა და პერიოდს შორის, ახსენით როგორ დაადგინეთ კავშირები.
- როგორ გვეხმარება რეალური სიტუაციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შექმნა და გამოთვლების შესრულება რთული პრობლემების გადაჭრაში?
- თქვენი აზრით, რატომ არის საინტერესო ბგერის თვისებების შესწავლა? როგორ უსმენდნენ მუსიკას 100, 50, 30, 10 წლის წინ? თქვენი აზრით რა იწვევდა ამ ცვლილებებს?

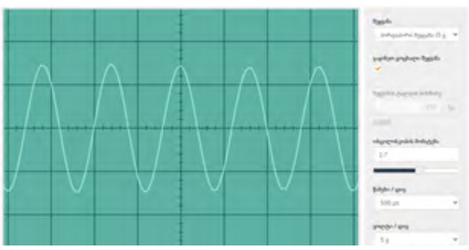
ეს საინტერესოა

- *იცით თუ არა, რომ ბგერის დანახვა შეგვიძლია?*

დიახ, დღეს უკვე ძალიან მარტივია ბგერის ბუნების გამოკვლევა და ბევრი საინტერესო დეტალის გაგება იმაზე, თუ როგორ წარმოიქმნება და ვრცელდება ბგერა, როგორ აღვიქვამთ მუსიკას და ა.შ.

გადადით მოცემულ ბმულზე და სცადეთ თქვენი ხმის დანახვა!

www.academo.org



თემა 7. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

7.1. ერთეულოვანი წრე

გეომეტრიის ნაწილში ჩვენ უკვე განვიხილეთ ერთეულოვანი წრე. მოცემული თემის ფარგლებში გავიმეოროთ წინარე მასალა და გადავიდეთ ახალ მასალაზე, რომელიც ღრმად გაგვააზრებინებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

როგორც ვიცით, კუთხეს ვზომავთ გრადუსებში და წრეს შეესაბამება 360°.

წრეწირზე მოვნიშნოთ ორი წერტილი A და B, ისე რომ ($\overset{\frown}{AB}$) რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლი იყოს. ავაგოთ კუთხე $\angle AOB$. აღნიშნული წესით აგებულ კუთხეზე ვიტყვით, რომ ცენტრალური კუთხე $\angle AOB = 1$ რადიანს.

განმარტება: იმ ცენტრალური კუთხის სიდიდეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია, რადიანი ეწოდება.

180°-ს შეესაბამება π რადიანი.

ცხრილში მოცემულია შესაბამისობა რადიანებსა და გრადუსებს შორის

საკოორდინატო სიბრტყეზე დავხაზოთ წრე ცენტრით სათავეში და რადიუსით 1. მივიღებთ ერთეულოვან წრეს.

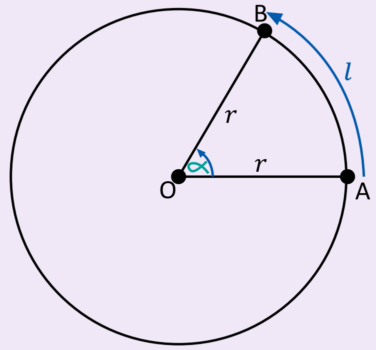
Ox ღერძზე გადავზომოთ OA რადიუსის ტოლი მონაკვეთი, მოვაბრუნოთ OA რადიუსი ისე, რომ Ox ღერძთან მივიღოთ 60°-ის ტოლი კუთხე. ჩვენ შეგვიძლია OA მოვაბრუნოთ, როგორც საათის ისრის, ასევე მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით.

როდესაც ვაგებთ კუთხეს ისე, რომ მობრუნება ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **კუთხე დადებითია** (ნახ.1).

$$\angle AOP = 60°$$

ხოლო როდესაც ვაგებთ კუთხეს ისე, რომ მობრუნება ხდება საათის ისრის მიმართულებით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ **კუთხე უარყოფითია** (ნახ.2).

$\angle AOB = -80°$

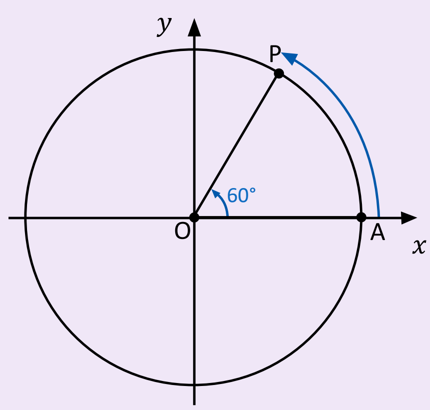


$l = r$; $\alpha = 1$ რად.

180°-ს შეესაბამება π რადიანი.

1 რადიანი $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

გრადუსი	რადიანი
180°	π
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
360°	2π



საკვანძო კითხვა:

- *რა შემთხვევაშია კუთხე 360 გრადუსზე მეტი?*

განვიხილოთ $\angle AOP = 150°$ (ნახ.3)

მოვაბრუნოთ OP სხივი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ისე, რომ შემოხაზოს მთელი წრე 3-ჯერ.

პირველი მობრუნების შემდეგ მივიღებთ კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომაა:

$$150° + 360° = 510°$$

მეორე მობრუნების შემდეგ მივიღებთ:

$$150° + 2 \cdot 360° = 870°$$

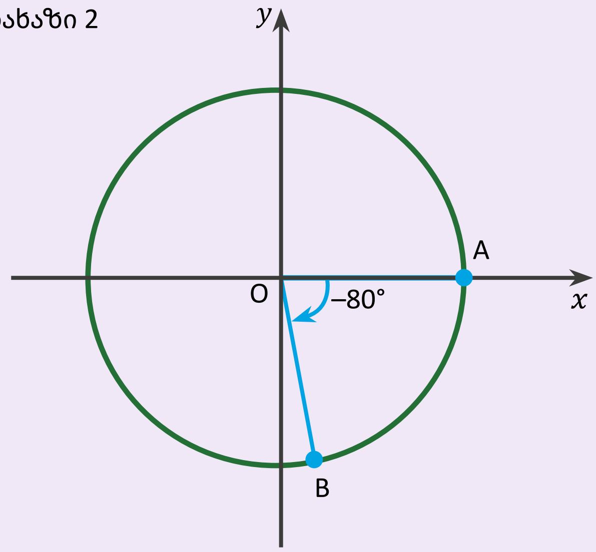
მესამე მობრუნების შემდეგ მივიღებთ:

$$150° + 3 \cdot 360° = 1230°$$

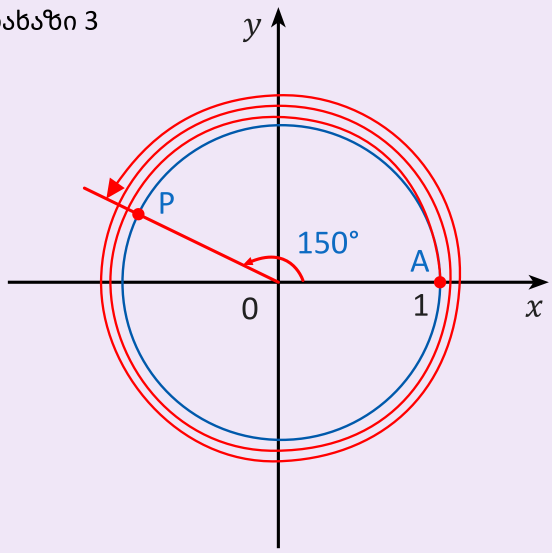
იქიდან გამომდინარე, თუ რამდენჯერ მობრუნდება *OP* სრული კუთხით გარკვეული პოზიციიდან, იმდენჯერ დაემატება 360°.

მინიშნება: შესაძლებელია მობრუნება, როგორც დადებითი მიმართულებით, ასევე საწინააღმდეგო მიმართულებით. საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნების შემთხვევაში კუთხეს აკლდება 360°.

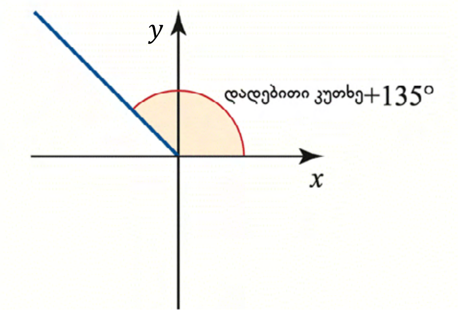
ნახაზი 2

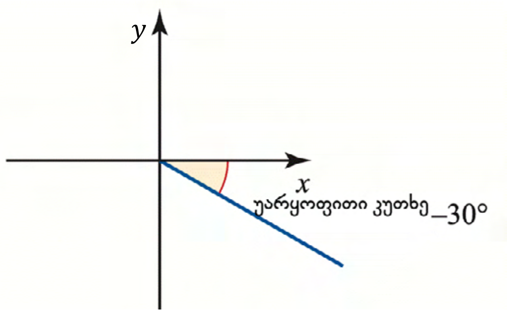


ნახაზი 3



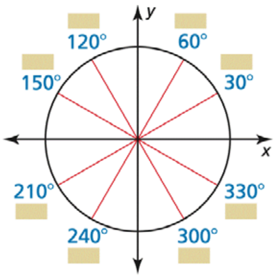
ნიმუში 1 – ააგეთ 135°-ის ტოლი კუთხე და –30°-ის ტოლი კუთხე.





სავარჯიშოები

1. შეუსაბამეთ გრადუსებს რადიანები.

ახსენით, როგორ არის შესაძლებელი გრადუსებზე რადიანების შესაბამისობა	

2. დახაზეთ ერთეულოვანი წრე და მონიშნეთ მასზე წერტილები, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კუთხეს:

ა) 60°	ე) 390°
ბ) 120°	ვ) 720°
გ) 210°	ზ) 810°
დ) 330°	თ) 900°

3. დახაზეთ ერთეულოვანი წრე და მონიშნეთ მასზე წერტილები, რომელიც შეესაბამება შემდეგ კუთხეს:

ა) –30°	ე) –360°
ბ) –90°	ვ) –720°
გ) –180°	ზ) –810°
დ) –300°	თ) –855°

4. დაუკავშირეთ ქვემოთ მოცემული კუთხეები კუთხეს, რომლის გრადუსული ზომა ნაკლებია ან ტოლი 360°-ის. ახსენით, როგორ დააკავშირეთ.

ა) 450°	ე) –60°
ბ) 500°	ვ) –750°
გ) 1110°	ზ) –120°
დ) 1320°	თ) –270°

7.2. ერთეულოვანი წრე და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

გეომეტრიის ნაწილში **მე-3 თავში იხ. §3.3** განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში და ბლაგვკუთხა სამკუთხედში. გავეცნოთ ნებისმიერი ზომის კუთხის შემთხვევაში რა შეიძლება იყოს კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

ტექნოლოგიების მეშვეობით შეგვიძლია დავადგინოთ ნებისმიერი კუთხის სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი.

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ერთეულოვანი წრე და წრეწირზე I მეოთხედში მოვნიშნოთ B($x;y$) წერტილი; დავაკავშიროთ B წერტილის კოორდინატები შესაბამისი α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან.

ΔOBC-ში დავწეროთ α-კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$sin\alpha = \frac{BC}{OB}$ (1) $cos\alpha = \frac{OC}{OB}$ (2)

რადგან წრე ერთეულოვანია

$OB = R = 1$, ხოლო

$BC = y$; $OC = x$

ჩავსვათ აღნიშნული (1) და (2) ფორმულაში და მივიღებთ, რომ

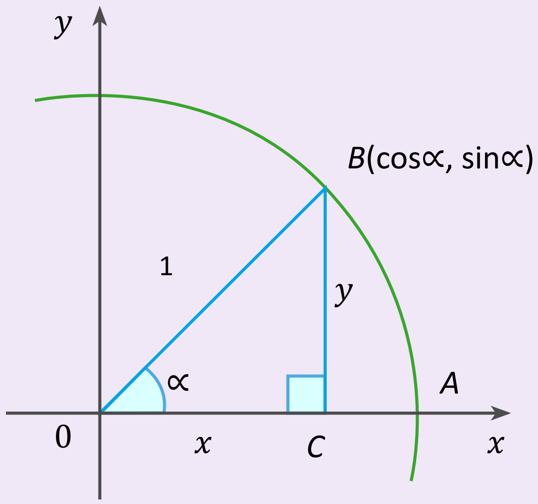
$$sin\alpha = \frac{y}{1} = y;\ cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

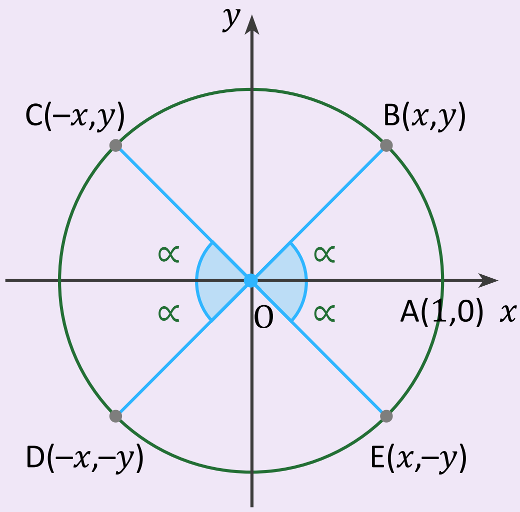
მაშასადამე, B წერტილის კოორდინატები იქნება α კუთხის კოსინუსი და სინუსი: B($cos\alpha$; $sin\alpha$) .

საკვანძო კითხვა:

როგორ არის შესაძლებელი ბლაგვი კუთხის ან ნებისმიერი კუთხის სინუსის და კოსინუსის გამოთვლა?

ჩვენ შეგვიძლია პირველ მეოთხედში მყოფ წერტილთან დავაკავშიროთ II, III, IV მეოთხედში მყოფი წერტილი, თუ მას ავაგებთ ღერძების მიმართ სიმეტრიით.





თუ B წერტილის კოორდინატებია $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$, მაშინ
$C(-\cos\alpha; \sin\alpha)$
$D(-\cos\alpha; -\sin\alpha)$
$E(\cos\alpha; -\sin\alpha)$

$\angle AOC = 180° - \alpha$ ბლაგვი კუთხეა
$\angle AOD = 180° + \alpha$ გაშლილ კუთხეზე მეტია
$\angle AOE = 360° - \alpha$ არის მეოთხე მეოთხედში

მოცემულიდან ვხედავთ, რომ თუ კუთხე მდებარეობს:

I მეოთხედში

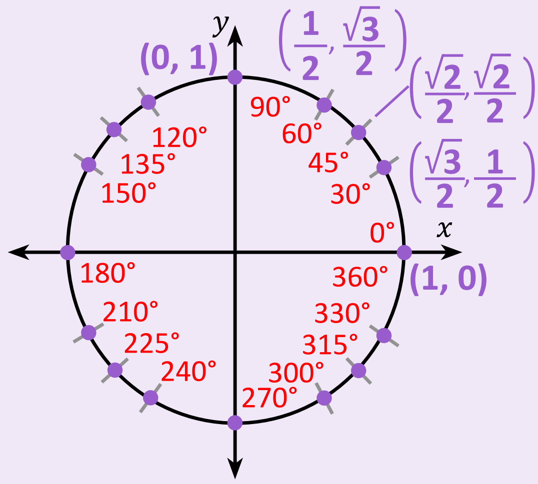
$\sin\alpha$ დადებითი რიცხვია
$\cos\alpha$ დადებითი რიცხვია

II მეოთხედში

$\sin\alpha$ დადებითი რიცხვია
$\cos\alpha$ უარყოფითი რიცხვია

მინიშნება: კუთხის სინუსი და კოსინუსი ვერ იქნება 1-ზე მეტი და –1-ზე ნაკლები.

პასუხი დაასაბუთეთ



თუ კუთხე მდებარეობს:

III მეოთხედში

$\sin\alpha$ უარყოფითი რიცხვია
$\cos\alpha$ უარყოფითი რიცხვია

IV მეოთხედში

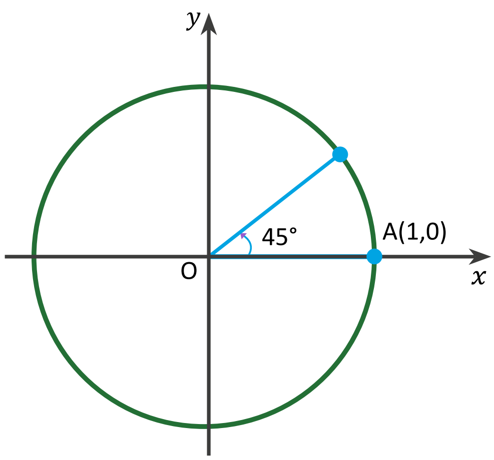
$\sin\alpha$ უარყოფითი რიცხვია
$\cos\alpha$ დადებითი რიცხვია

აღნიშნული წესიდან გამომდინარე შეგვიძლია წრეწირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატი დავაკავშიროთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან.

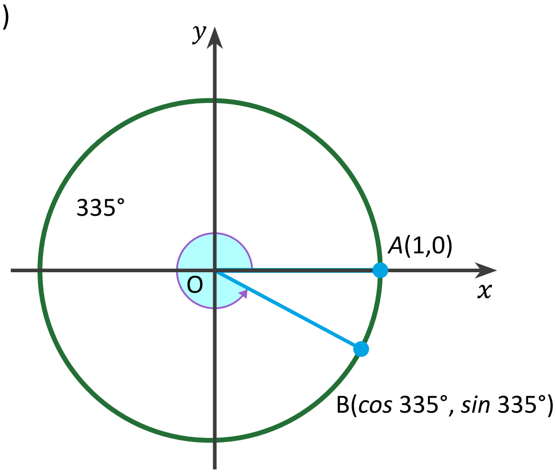
ნიმუში 1

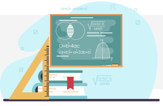
დახაზეთ ერთეულოვანი წრე, წრეწირზე მონიშნეთ წერტილი, რომელიც შეესაბამება ა) 45°-ის ტოლ კუთხეს, ბ) 335°-ის ტოლ კუთხეს. გამოსახეთ წერტილის კოორდინატები ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მეშვეობით.

ა)



ბ)





MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

თანამედროვე ერაში ტექნოლოგიების დახმარებით მარტივად შეიძლება დავადგინოთ, ნებისმიერი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

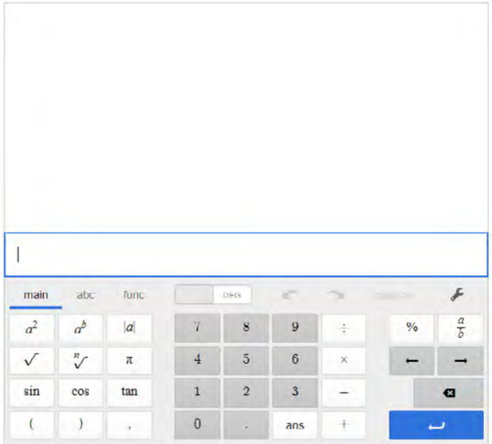
შედით საიტზე 🔗 Desmos Calculator ან (Geogeba – Calculator)

გააქტიურეთ ღილაკი func (function), ამოირჩიეთ რომელი კუთხის სინუსის, კოსინუსის ან ტანგენსის მოძებნა გინდათ (მიაქციეთ ყურადღება, კუთხე იზომება გრადუსებით ან რადიანებით); კალკულატორი გაჩვენებთ თითოეული კუთხისთვის რას უდრის *sinα, cosα, tgα, ctgα*

$\cos 225° \approx -0.7$

$\sin 330° = -0.5$

Desmos-ის კალკულატორის ეკრანი ვებ-გვერდზე

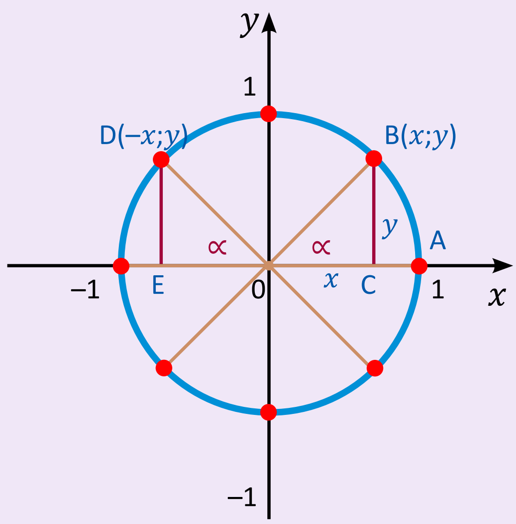


? საკვანძო კითხვა: როგორ შეიძლება მეორე მეოთხედის წერტილის კოორდინატების დაკავშირება პირველი მეოთხედის წერტილის კოორდინატებთან და შესაბამისად, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან?

წრეწირზე მოვნიშნოთ $B(x;y)$ წერტილი და Oy ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $D(-x;y)$ წერტილი.

შევაერთოთ B წერტილი სათავესთან, დავუშვათ მართობი Ox ღერძზე და განვიხილოთ მართკუთხა ΔOBC, რომლის $\angle BOC = \alpha$.

ანალოგიურად დავხაზოთ მართკუთხა ΔODE, $\angle BOC = \angle DOE = \alpha$, რადგან $\Delta OBC = \Delta ODE$.



$\Delta BOC = \Delta ODE$ სამკუთხედის ტოლობის მესამე ნიშნით.

განვიხილოთ $\angle AOD = 180° - \alpha$ ბლაგვი კუთხე.

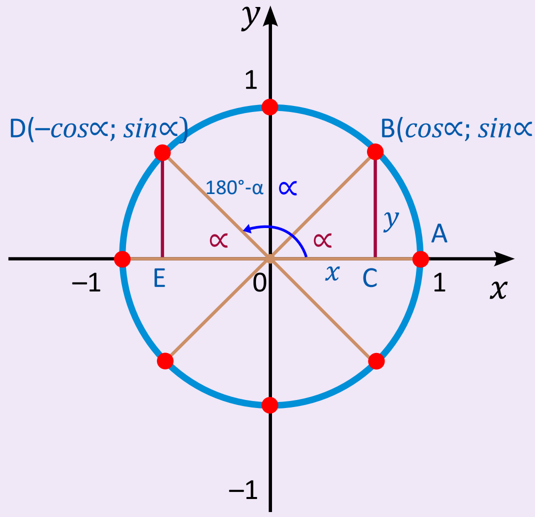
D წერტილის კოორდინატები შესაბამება აღნიშნული კუთხის კოსინუსს და სინუსს, ე.ი.

$D(\cos(180° - \alpha); \sin(180° - \alpha))$.

რადგან D სიმეტრიულია B წერტილის Oy ღერძის მიმართ, ამიტომ $D(-\cos\alpha; \sin\alpha)$, მივიღეთ, რომ

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$



თუ გავაანალიზებთ აღნიშნულს, დავინახავთ, რომ ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ყველა წერტილის კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხესთან, რომელსაც ქმნის ამ წერტილის კოორდინატთა სათავესთან შემაერთებელი მონაკვეთი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

რადგან $B(x;y)$ მდებარეობს წრეწირზე და სამკუთხედი O, B, C მართკუთხაა პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ $x^2 + y^2 = 1$.

ასევე ვიცით, რომ $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$; $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, შესაბამისად, მივიღეთ, რომ B წერტილის კოორდინატებია, $B(\cos\alpha; \sin\alpha)$, საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი იგივეობა: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ წერტილი მდებარეობს ერთეულოვან წრეწირზე, მაშინ აღნიშნული წერტილის კოორდინატების კვადრატების ჯამი 1-ია.

ჩვენ უკვე დავადგინეთ კავშირები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

სავარჯიშოები

1. დაწერეთ რომელ მეოთხედს შეესაბამება ეკუთვნის თითოეული ფარდობა (კუთხიდან გამომდინარე) და დაადგინეთ მათი ნიშანი.

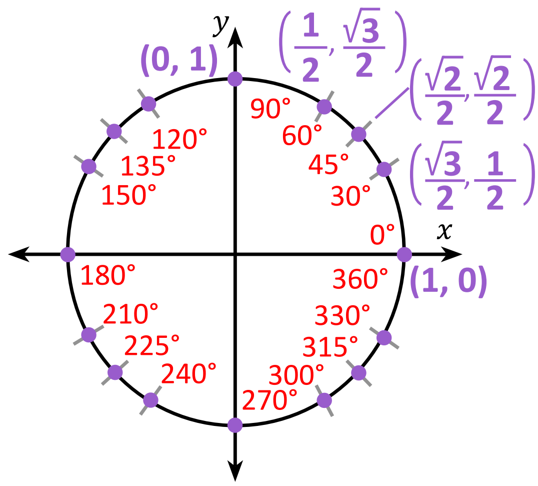
ა) *sin*45°	ვ) *sin* 265°
ბ) *sin*145°	ზ) *sin* 345°
გ) *sin*220°	თ) *sin* (–220°)
დ) *cos*135°	ი) *cos* (–135°)
ე) *cos*3 45°	კ) *cos* (–3 45°)

2. ჯგუფური სამუშაო:

სიმეტრიის გამოყენებით დაწერეთ წრეწირზე მონიშნული თითოეული გრადუსისთვის რა იქნება *sinα; cosα*

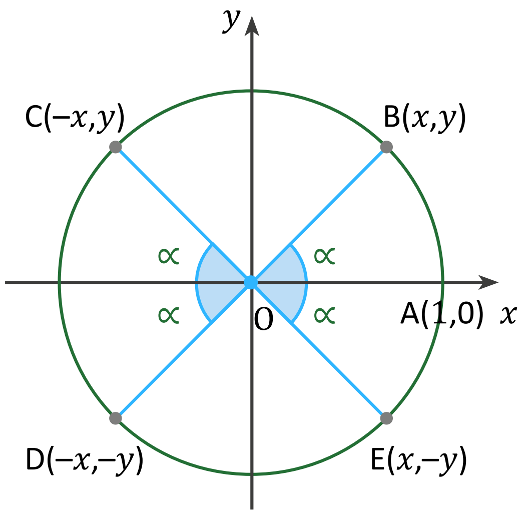
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	და ა.შ.		
sinα	0	$\frac{3}{2}$							
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$							

შეგახსენებთ, წერტილის x კოორდინატი შეესაბამება *cosα*-ს, ხოლო y კოორდინატი შეესაბამება *sinα*-ს.



მინიშნება:

იმისათვის, რომ გაგიადვილდეთ პირველ მეოთხედთან დაკავშირება, ისარგებლეთ დიაგრამით



3. დაწერეთ რომელ მეოთხედს ეკუთვნის თითოეული ტრიგონომეტრიული ფარდობა და მათი ნიშანი?

სავარჯიშოები

ა) *sin* 445°	ვ) *ctg* 60°
ბ) *sin*(–150°)	ზ) *tg* 285°
გ) *sin*(–210°)	თ) *sin* 120°
დ) *cos*435°	ი) *cos* 125°
ე) *tg*145°	კ) *cos*150°

4. **მათემატიკის მოყვარულთათვის ***

ჯგუფური აქტივობა

საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ ერთეულოვანი წრე და მოვნიშნოთ მასზე წერტილები: *B, C, D, E* ისე, რომ *C* წერტილი არის *B* წერტილის სიმეტრიული *Oy* ღერძის მიმართ; *D* წერტილი არის *C*-ს სიმეტრიული *Ox* ღერძის მიმართ. E არის B-ს სიმეტრიული O*x* ღერძის მიმართ, ასევე D-ს სიმეტრიული O*y* ღერძის მიმართ.

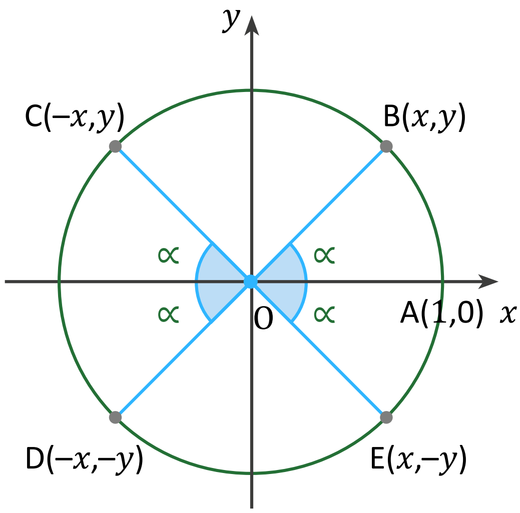
ვხედავთ როგორ იცვლება წერტილის კოორდინატები. ასევე ვხედავთ, რომ თუ თითოეულ წერტილს შევაერთებთ კოორდინატთა სათავესთან, მივიღებთ კუთხეს:

∠ *AOC* = 180°– α

∠ *AOD* = 180° + α

∠ *AOE* = 360°– α

როგორც ვხედავთ, თითოეული კუთხის დაკავშირება შეგვიძლია *α*-სთან და იმ წერტილის კოორდინატთან, რომელსაც *α* შეესაბამება.



დააკავშირეთ, *sinα*-თან

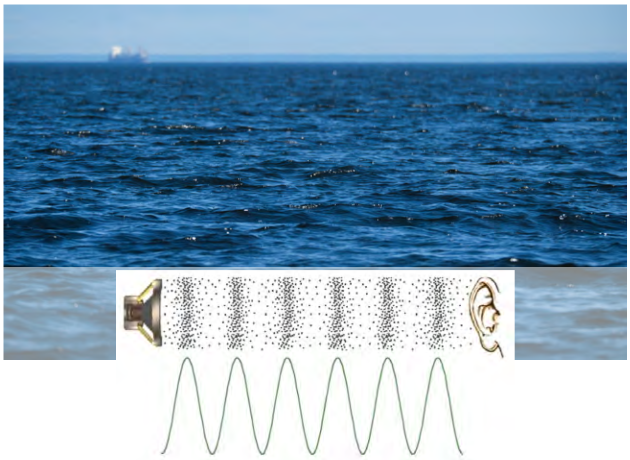
sin (180° – *α*)
sin (180° + *A*)
sin (360° – *α*)
sin (360° + α)

დააკავშირეთ, cosα-თან

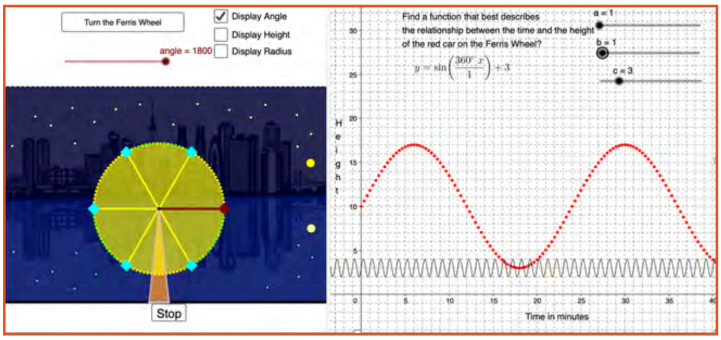
cos (180° – *α*)
cos (180° + *α*)
cos (360° – *α*)
cos (360° + *α*)

7.3. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ვხედავთ სხვადასხვა ტალღურ მოვლენას. ვხედავთ ტალღებს მდინარეებსა თუ ზღვებში. ასევე ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ ბგერა ტალღური მოვლენაა, ის ვრცელდება როგორც ტალღა.



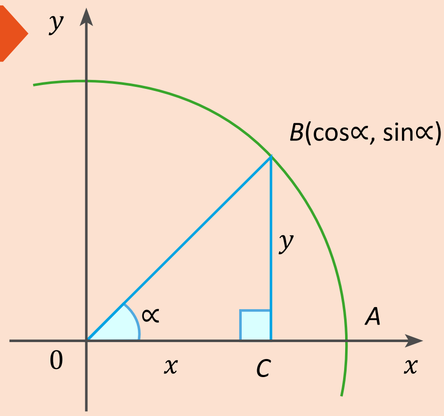
საკვანძო კითხვა: რა სხვადასხვა ხერხით არის შესაძლებელი წრეწირზე მოძრაობის წარმოდგენა?



ჩვენ ასევე ვიცით, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში ეშმაკის ბორბალზე მყოფი ადამიანის დაშორება მიწის ზედაპირიდან შეიძლება დავადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მეშვეობით.

აღნიშნული მაგალითების განხილვით ნათელია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დახმარებით შესაძლებელია სხვადასხვა რეალური მოვლენის აღმწერი მათემატიკური მოდელის შედგენა; გამოვიკვლიოთ როგორ არის აღნიშნული შესაძლებელი.

როგორც ვიცით, ერთეულოვან წრეწირზე აღებული ნებისმიერი B წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები დაკავშირებულია იმ კუთხესთან, რომელსაც ვიღებთ წერტილის კოორდინატთა სათავესთან შემაერთებელ მონაკვეთსა და Ox ღერძის დადებით მიმართულებას შორის. B წერტილის x კოორდინატი დაკავშირებულია კუთხის კოსინუსთან, ხოლო y კოორდინატი კუთხის სინუსთან.



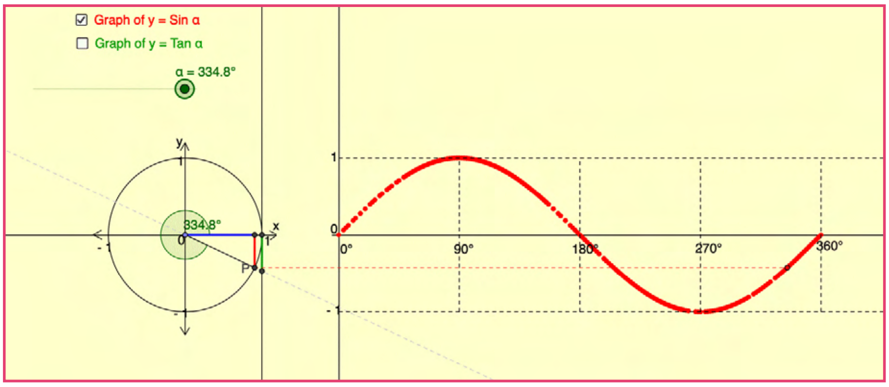
ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი წერტილისთვის დავწეროთ კოორდინატები შესაბამისი კუთხის სინუსის და კოსინუსის მეშვეობით.

თუ დავაწყვილებთ ინფორმაციას (კუთხე; კუთხის სინუსი) და ავაგებთ გრაფიკს, მას ექნება ტალღის ფორმა. აღნიშნული ფორმის გრაფიკით შესაძლებელია ტალღური მოვლენების მათემატიკური მოდელის შედგენა.

გაგრძელება

გაგრძელება

▶ გახსენით 🔗 [სიმულაცია](), ამოირჩიეთ y = sinα და გამოიკვლიეთ, როგორ ხდება გრაფიკის აგება.



საკვანძო კითხვა:

- *ტრიგონომეტრიულ თანაფარდობებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციებიც ეწოდებათ. დაფიქრდით, რატომ ეწოდებათ sinα, cosα, tgα, ctgα-ს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები?*

ჩვენ განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები მართკუთხა სამკუთხედში და ბლაგვკუთხა სამკუთხედში; შემდეგ გავეცანით ნებისმიერი ზომის კუთხის შემთხვევაში რა შეიძლება იყოს კუთხის სინუსი და კოსინუსი.

დავაორგანიზოთ ცხრილში α კუთხის თითოეული მნიშვნელობისთვის რა მნიშვნელობას იღებს *sinα*; დავაწყვილოთ ინფორმაცია (*α; sinα*) და გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.

ტექნოლოგიების მეშვეობით შეგვიძლია მარტივად დავადგინოთ კუთხის სინუსი სხვადასხვა კუთხეებისთვის.

α	$\sin\alpha$
–90°	–1
–30°	–0.5
0°	0
30°	0.5
60°	0.8660254
90°	1
120°	0.8660254
150°	0.5
180°	0
270°	–1
360°	0

y = *sinα* ფუნქციის გრაფიკის აგება

საკოორდინატო სიბრტყეზე *Ox* ღერძს შევუსაბამოთ გრადუსი, ხოლო *Oy* ღერძს რიცხვები;

დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია შემდეგნაირად (*α,sinα*).

წერტილები კოორდინატებით (α,sinα). გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და შევაერთოთ თანმიმდევრობით, მივიღებთ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც ეწოდება **სინუსოიდა**.

განსაზღვრის არე:
$D(f) = R$

მნიშვნელობათა სიმრავლე:
$E(f) = [-1; 1]$

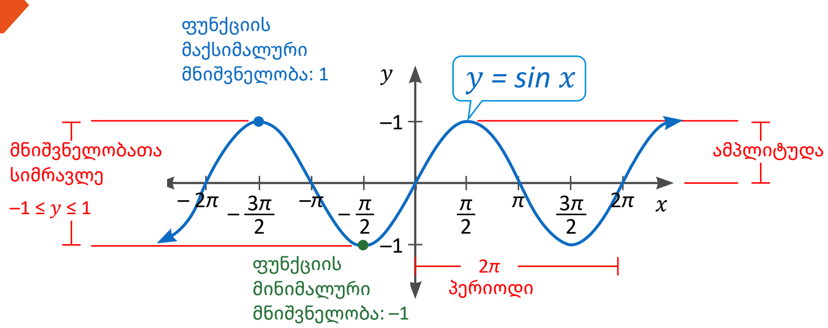
გრაფიკი აგებულია ისე, რომ OX ღერძზე გადაზომილია რადიანები:

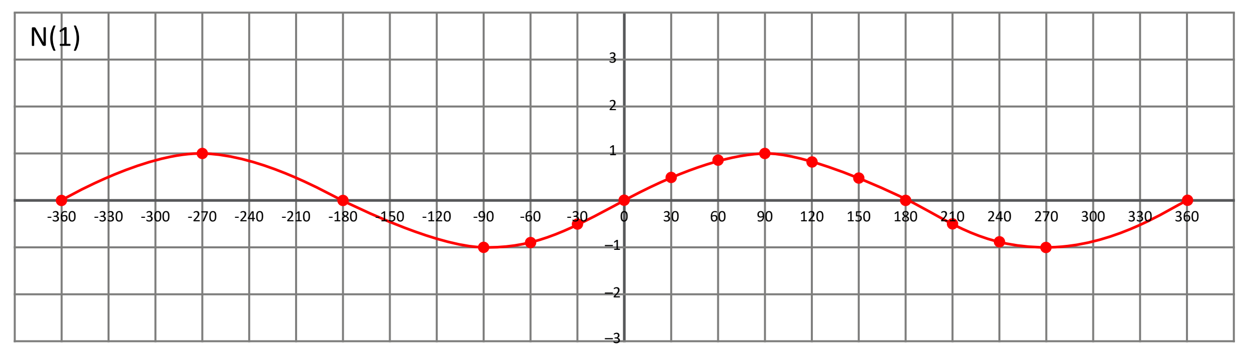
გრაფიკი N1 აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია გრადუსები. მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრის არეა:

$D(f) = [-360°; 360°]$

მნიშვნელობათა სიმრავლე:

$E(f) = [-1;1]$





სინუსიოდა იწყება სათავიდან და ერთი ბრუნი სრულდება ინტერვალზე [0°;360°], ყოველი შემდეგი 360°-ის ტოლ ინტერვალზე მეორდება გრაფიკის ერთი სრული ტალღის შესაბამისი ფორმა, ამიტომ პერიოდია 360°.

ზოგადად,

$sin\alpha = sin(\alpha + 360°)$

$sin\alpha = sin(\alpha + 360° \cdot 2)$ და ა.შ.

$sin\alpha = sin(\alpha + 360° \cdot k)$, სადაც

$k \in Z; k = ... -2; 1; 0; 1; 2; ...$

$\alpha \epsilon [0° ;360°]$

როდესაც მოცემულია

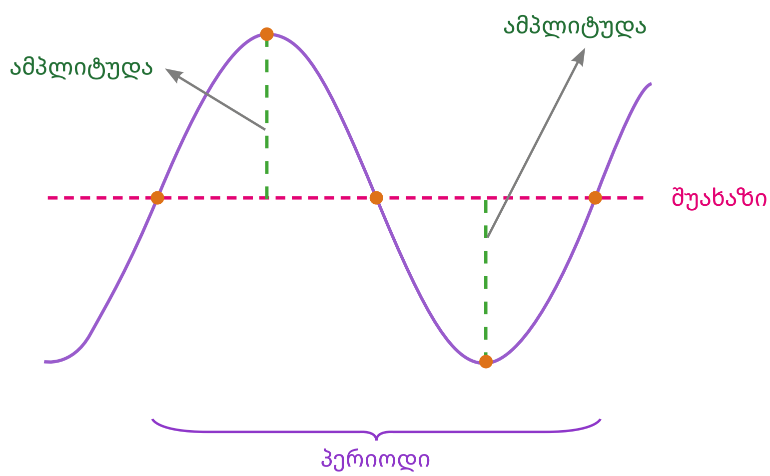
$y = a sin\ b(x - x_0) + c$

A – ამპლიტუდა $= |a|$;

T პერიოდი $= \frac{2\pi}{b} = \frac{360°}{b}$

c გვიჩვენებს სინუსოიდის შუახაზს, ასევე

$E(f) = [-a + c; a + c]$



პერიოდი აღინიშნება სიმბოლოთი T.
$y = sin\alpha$ ფუნქციის პერიოდია $T = 360°$

ამპლიტუდაა 1

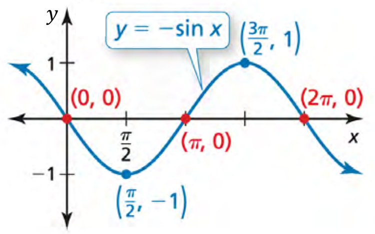
y = sin$x$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით სხვადასხვა ფუნქციის გარდაქმნებს და განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გარდაქმნები;

გარდაქმნა N1:

$y = -\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = \sin x$-ის სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ.



გარდაქმნა N2:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \sin x$

D(f) = [0 ;360°]

E(f) = [–1 ;1]

$y = \sin x + 2$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით ზემოთ.

D(f) =[0;360°]

E(f) =[1;3]

$y = \sin x - 3$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით ქვემოთ.

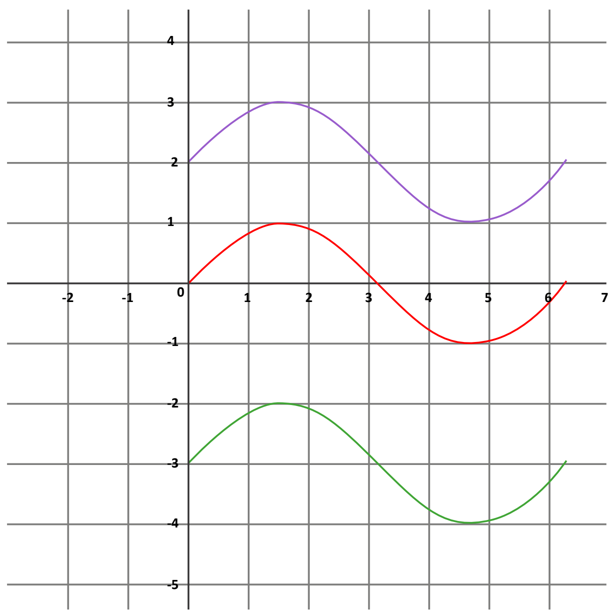
D(f) =[0; 360°]

E(f) =[–4;–2]

ამპლიტუდა A = 1

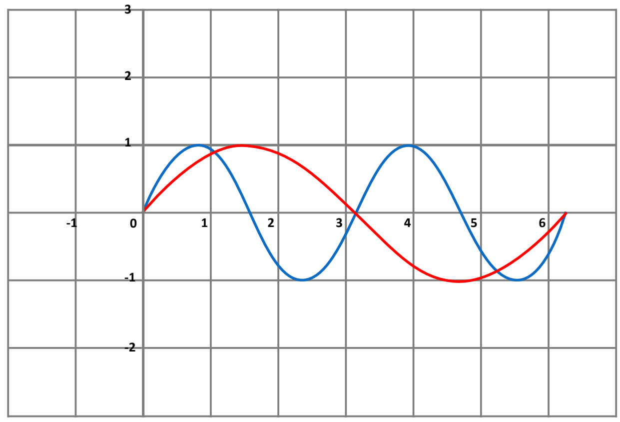
პერიოდი არ შეცვლილა

T = 360°



გარდაქმნა N3:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:



$y = \sin x$

$D(f) = [0; 2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$y = \sin 2x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის შეკუმშვით.

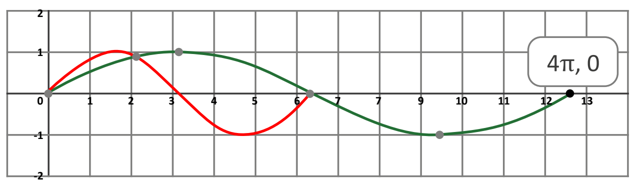
$D(f) = [0; 2\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; იგივე $T = 180°$

$A = 1$

$y = \sin 0.5x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის გაფართოებით.



$D(f) = [0; 4\pi]$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$; იგივე $T = 720°$

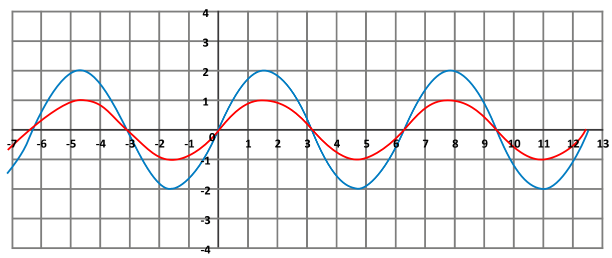
$A = 1$;

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).

როდესაც მოცემულია
$y = \sin bx$ ფუნქცია
პერიოდი გამოითვლება ფორმულით
$T = \frac{2\pi}{b}$

გარდაქმნა N4:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:



$y = \sin x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$;

$y = 2\sin x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის Oy ღერძის გასწვრივ გაწელვით

$D(f) = R$

$E(f) = [-2; 2]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 2$

გაგრძელება

გაგრძელება

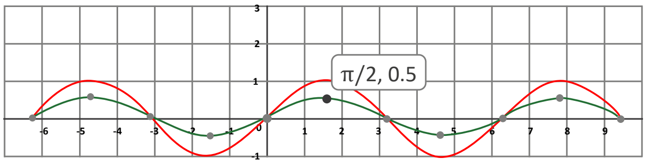
$y = 0.5 \sin x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის Oy ღერძის გასწვრივ შევიწროებით

$D(f) = R$

$E(f) = [-0.5; 0.5]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 0.5$



როდესაც მოცემულია
$y = a\sin x$ **ფუნქცია**

ამპლიტუდა $A = |a|$;
როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა დამოკიდებულია იმაზე თუ რა რიცხვზე მრავლდება ფუნქცია (ანუ y).

გარდაქმნა N5:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \sin x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ იგივე

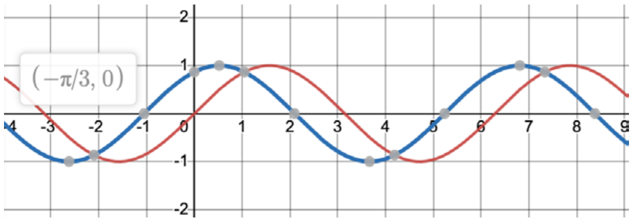
$y = \sin(x + 60°)$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{3}$ ერთეულით მარცხნივ.

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$



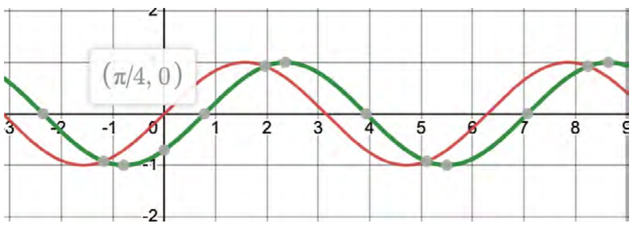
$y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით მარჯვნივ.

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$



სავარჯიშოები

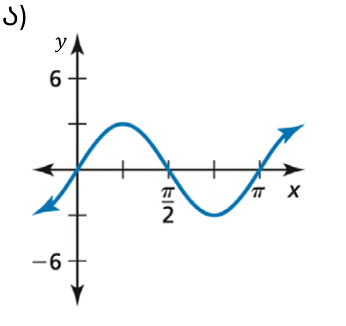
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

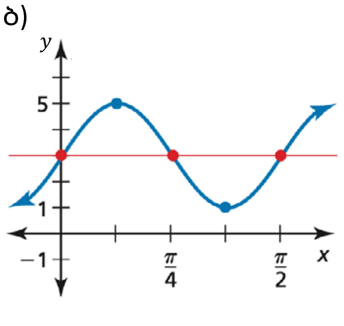
1. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები.

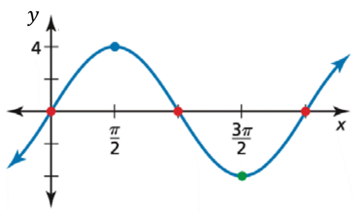
▪ აღწერეთ და გამოიკვლიეთ გარდაქმნები; ▪ თითოეულ შემთხვევაში დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.	ა) $y = sinx$; $y = \sin x + 4$; $y = sinx - 5$; ბ) $y = sinx$; $y = -sinx$; გ) $y = 2sinx$; $y = 2sinx + 1$; $y = 2sinx - 3$; დ) $y = \sin x$; $y = \sin(x + 30°)$; $y = \sin(x - 90°)$; ე) $y = sinx$; $y = \sin 4x$; ვ) $y = sinx$; $y = \sin 0.2x$; ზ) $y = sinx$; $y = -2sinx$; თ) $y = sinx$; $y = -2sinx + 4$; ი) $y = sinx$; $y = 2\sin(x + 90°) + 4$.

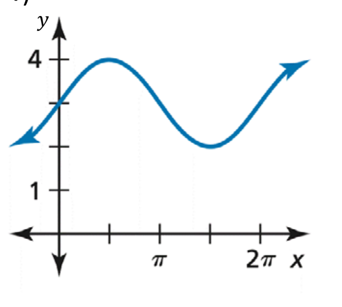
2. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები. თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

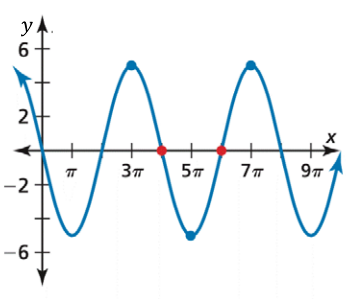
- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა);
- რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

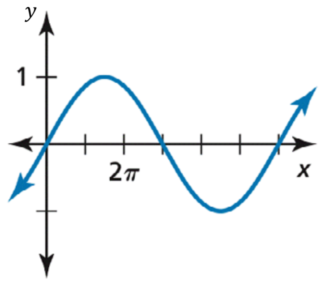
ა)


ბ)


გ)


დ)


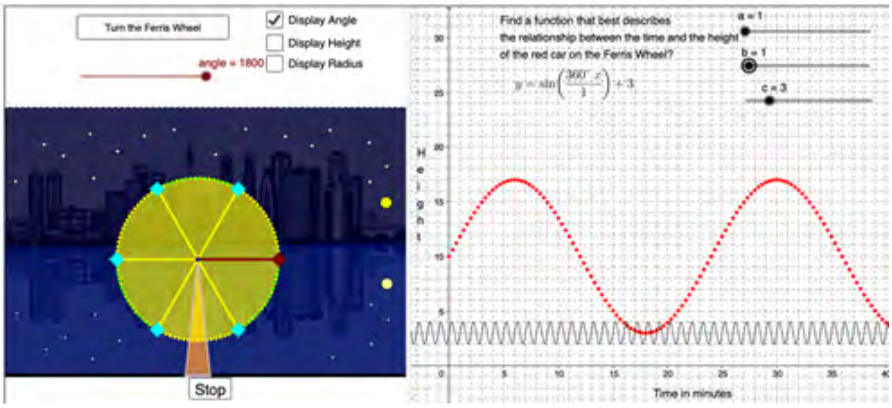
ე)


ვ)


სავარჯიშოები

3. თემის დასაწყისში მოცემულ VII კომპლექსურ დავალებასთან დაკავშირებული ამოცანა:

დავუშვათ, ვართ ეშმაკის ბორბალზე და გვაინტერესებს დავადგინოთ დროის ყოველ მომენტში რა სიმაღლეზე ვართ დაშორებული მიწიდან. გახსენით სიმულაცია, დააყენეთ სხვადასხვა პარამეტრი, გამოიკვლიეთ რა გავლენას ახდენს ეს პარამეტრები თითოეულ გრაფიკზე და რას შეიძლება შეესაბამებოდეს რეალურ სიტუაციაში;
აღნიშნული კვლევა მოამზადეთ საპრეზენტაციოდ.

სიმულაცია	

y = *cosα* კოსინუსოიდა

ჩვენ ვიცით, რომ დადგენილია კუთხის კოსინუსი სხვადასხვა კუთხეებისთვის.

α	$\cos\alpha$
–90°	0
–60°	0.5
0°	1
30°	0.8660254
60°	0.5
90°	0
180°	–1
120°	–0.5
150°	0.8660254
180°	–1
270°	0
360°	1

y = *cosα* ფუნქციის გრაფიკის აგება

საკოორდინატო სიბრტყეზე Ox ღერძს შევუსაბამოთ გრადუსი, ხოლო Oy ღერძს რიცხვები.

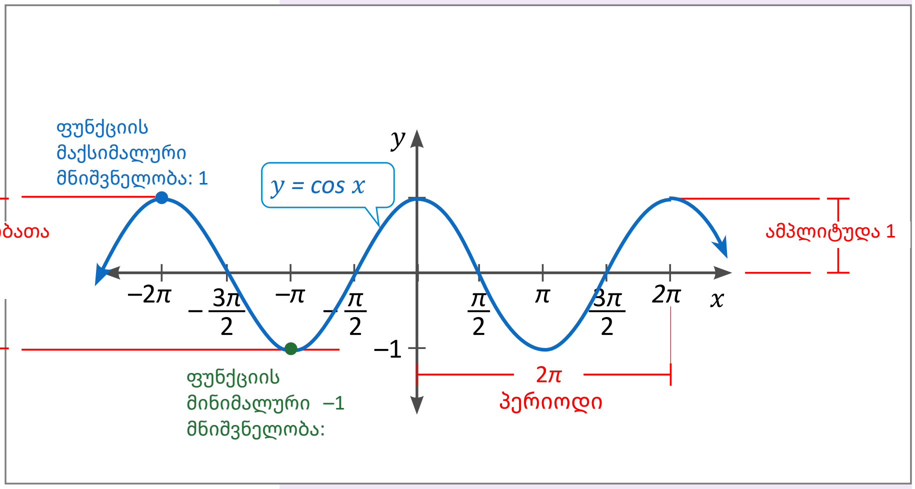
დავაწყვილოთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია შემდეგნაირად (α,cosα).

გადავიტანოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე და მივიღებთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც ეწოდება **კოსინუსოიდა**.

მოცემულ შემთხვევაში განსაზღვრის არეა:
$D(f) = R$

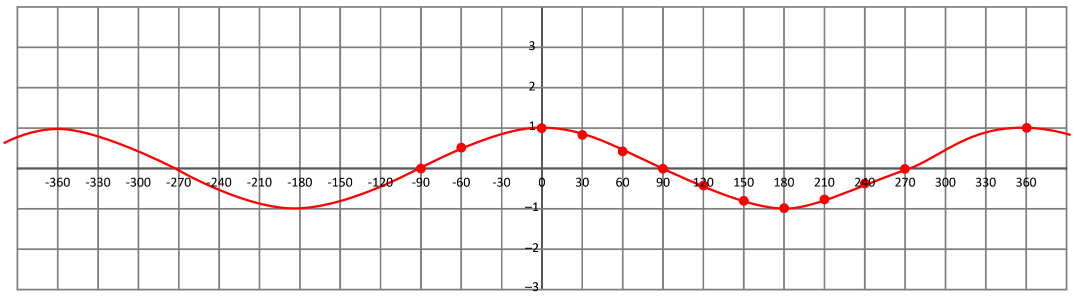
მნიშვნელობათა სიმრავლე:
$E(f) = [-1; 1]$

გრაფიკი აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია რადიანები



შენიშვნა: ისრები გვაჩვენებს, რომ გრაფიკი ორივე მიმართულებით გრძელდება.

გრაფიკი აგებულია ისე, რომ Ox ღერძზე გადაზომილია გრადუსები



მითითება: ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემისას აუცილებელია განსაზღვრის არის დაზუსტება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩაითვლება, რომ ფუნქცია მთელ რიცხვთა ღერძზეა განსაზღვრული და გრაფიკი უსასრულოდ გაგრძელდება როგორც მარჯვნივ, ასევე მარცხნივ.

გაგრძელება

როდესაც მოცემულია:

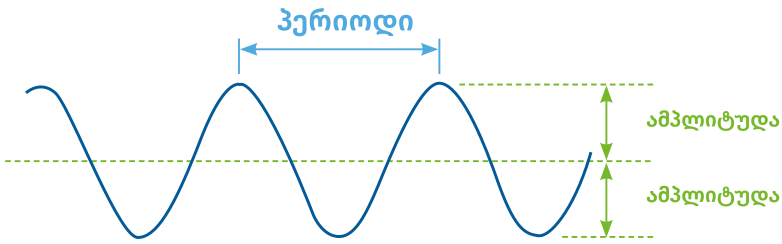
$y = a\cos b(x - x_0) + c$

A – ამპლიტუდა = $|a|$;

T პერიოდი = $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{360°}{b}$

c გვიჩვენებს კოსინუსოიდის შუახაზს.

ხოლო $E(f) = [-a + c;\ a + c]$.



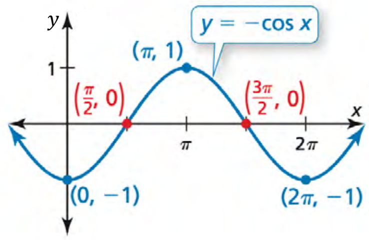
$y = \cos x$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გარდაქმნები

ჩვენ უკვე გავეცანით სხვადასხვა ფუნქციის გარდაქმნებს და განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გარდაქმნები:

გარდაქმნა N1:

$y = -\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = \cos x$-ის სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ.



გარდაქმნა N2:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1;1]$

$A = 1$

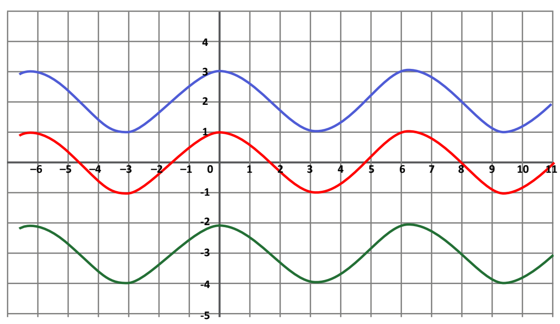
$y = \cos x + 2$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით ზემოთ (Oy ღერძის დადებითი მიმართულებით).

$D(f) = R$

$E(f) = [1;3]$

$T = 2\pi$; იგივე $T = 360°$

$A = 1$



გაგრძელება

გაგრძელება

$y = cosx - 3$ მიიღება საწყისი ფუნქციის პარალელური გადატანით 3 ერთეულით ქვემოთ (Oy ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).

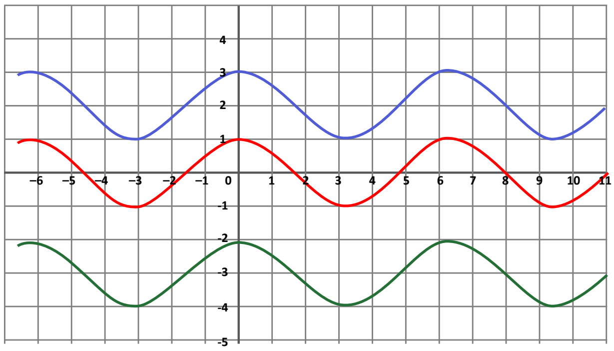
$D(f) = R$

$E(f) = [-4;-2]$

$T = 2\pi$; იგივე T = 360°

A = 1

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).



გარდაქმნა N3:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = cosx$

$D(f) = [0;2\pi]$

$E(f) = [-1;1]$

A = 1

$y = cosx\ 2x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის შეკუმშვით.

$D(f) = [0;2\pi]$

$E(f) = [-1;1]$

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; იგივე T = 180°

A = 1;

$y = cos0.5x$ მიიღება საწყისი ფუნქციის გაფართოებით.

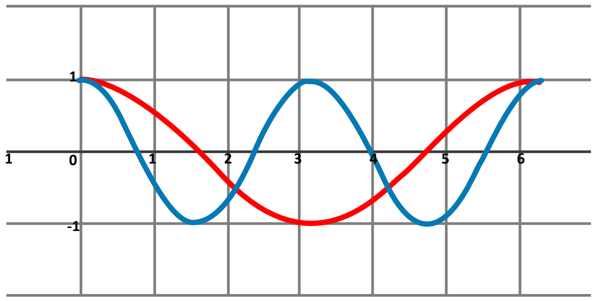
$D(f) = [0;4\pi]$

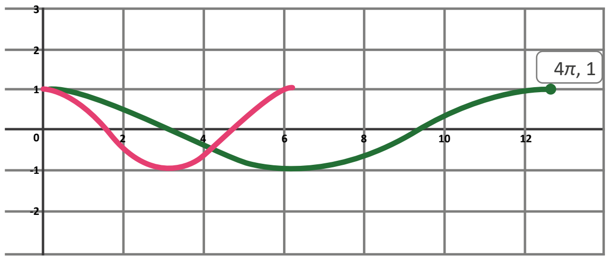
$E(f) = [-1;1]$

$T = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$; იგივე T= 720°

A = 1

როგორც ვხედავთ, პერიოდი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება არგუმენტი (ანუ x).





როდესაც მოცემულია

$y = cosbx$ ფუნქცია

პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$T = \frac{2\pi}{b}$

გარდაქმნა N4:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია:

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = 2\cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-2; 2]$

$T = 2\pi$; იგივე T = 360°

$A = 2$

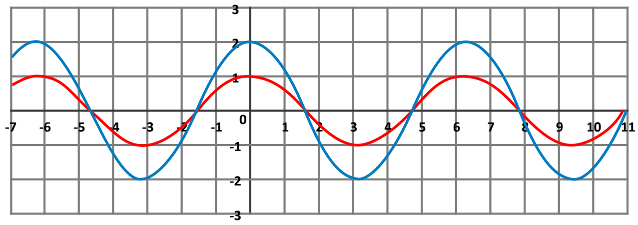
$y = 0.5\cos x$

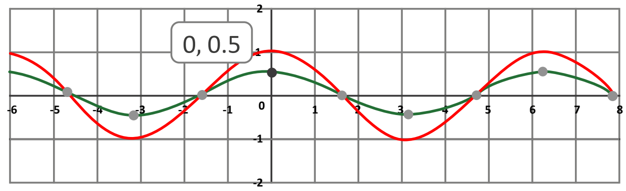
$D(f) = R$

$E(f) = [-0.5; 0.5]$

$T = 2\pi$; იგივე T= 360°

$A = 0.5$





როდესაც მოცემულია:
$y = a\cos x$ **ფუნქცია**

ამპლიტუდა = $|a|$;
როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა რიცხვზე მრავლდება ფუნქცია (ანუ y).

გარდაქმნა N5:

მოცემულია საწყისი ფუნქცია

$y = \cos x$

$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$A = 1$

$y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ იგივე

$y = \cos(x - 90°)$, მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{2}$ ერთეულით მარჯვნივ (Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით).

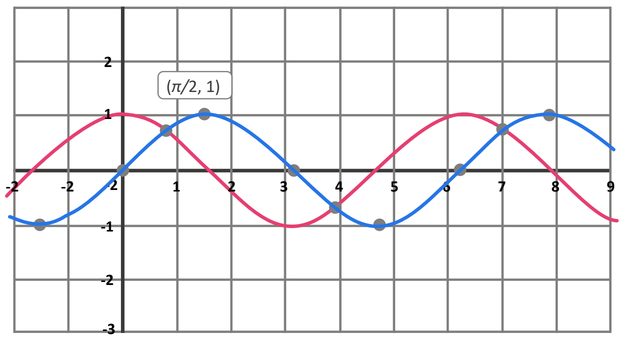
$D(f) = R$

$E(f) = [-1; 1]$

$T = 2\pi$; იგივე T = 360°

$A = 1$

$y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ მიიღება საწყისი გრაფიკის წანაცვლებით $\frac{\pi}{4}$ ერთეულით მარცხნივ (Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებით).



$y = \cos(x - 90°)$ გრაფიკი ემთხვევა $y = \sin x$ გრაფიკს, სინუსოიდა მიიღება კოსინუსოიდას წანაცვლებით მარჯვნივ **90°**-ით ($\frac{\pi}{2}$) ერთეულით.

გაგრძელება

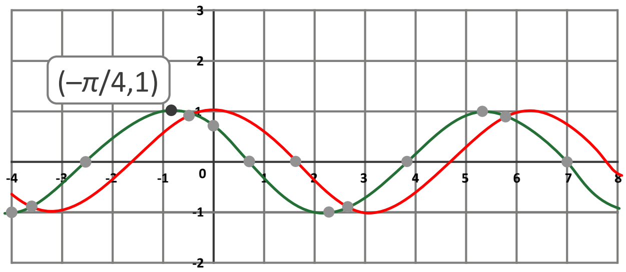
გაგრძელება

$D(f) = R$

$E(f) = [-1;1]$

$T = 2\pi$; იგივე T = 360°

A = 1



სავარჯიშოები

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები.

▪ აღწერეთ და გამოიკვლიეთ გარდაქმნები. ▪ თითოეულ შემთხვევაში დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.	ა) $y = cosx$; $y = cosx + 4$; $y = cosx - 5$; ბ) $y = cosx$; $y = -cosx$; გ) $y = 2cosx$; $y = 2cosx + 1$; $y = 2cosx - 3$; დ) $y = cos\, x$; $y = cos(x + 30°)$; $y = cos(x - 90°)$; ე) $y = cosx$; $y = cos\, 4x$; ვ) $y = cosx$; $y = cos\, 0.2x$; ზ) $y = cosx$; $y = -2cosx$; თ) $y = cosx$; $y = -2cosx + 4$; ი) $y = cosx$; $y = 2cos\,(x + 90°) + 4$.

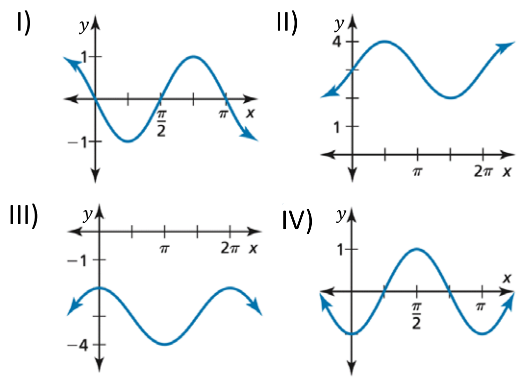
2. შეუსაბამეთ გრაფიკები ფუნქციებს:

ა) $y = 3 + sin\, x$;

ბ) $y = sin\, 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

გ) $y = -3 + cos\, x$;

დ) $y = cos\, 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.



3. როდესაც ადამიანი ისვენებს, მისი წნევა დროში შეიძლება აღიწეროს შემდეგი ფუნქციით:

$P = 100 - 20 \cdot cos\, \frac{8\pi}{3}\, t$

P–შეესაბამება წნევას.

დახაზეთ მოცემული ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი; რომლის მეშვეობითაც შეძლებთ აღწეროთ ერთი გულისცემა.

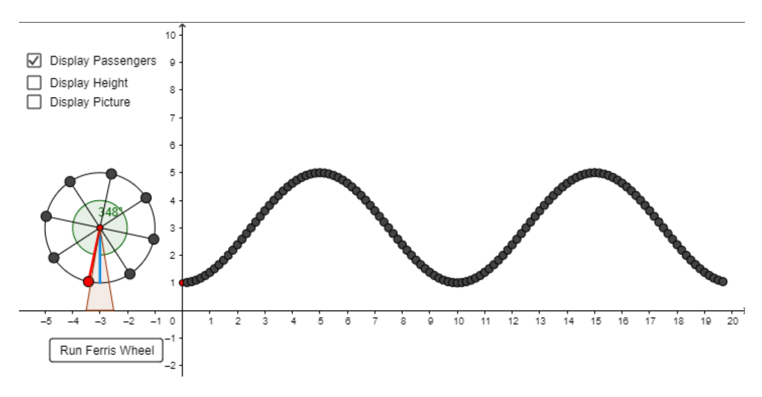
რა შეიძლება იყოს პულსი (გულისცემის რაოდენობა ერთ წუთში)?

სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო

4. პარაგრაფის ახსნის ნაწილში, მეხუთე გარდაქმნით ვნახეთ, რომ სინუსის და კოსინუსის ფუნქციები დაკავშირებულია ერთმანეთთან. განიხილეთ სათვალთვალო ბორბლის სიმულაცია; ცვალეთ პარამეტრები და თითოეული შემთხვევისთვის აღწერეთ სიტუაცია, როგორც სინუსის, ასევე კოსინუსის მეშვეობით.

სიმულაციის გვერდით ცხრილში მოცემულია მონაცემები: დრო და სიმაღლე. იფიქრეთ, რას გვიჩვენებს აღნიშნული ინფორმაცია და რასთან არის დაკავშირებული ფორმულაში?



ჩაწერეთ გრაფიკის შესაბამისი ფორმულა, როგორც სინუსის, ასევე კოსინუსის მეშვეობით.

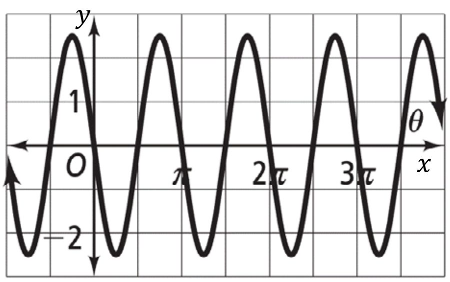
შეინახეთ თქვენი კვლევის შედეგები საპრეზენტაციოდ.

გახსენით სიმულაცია

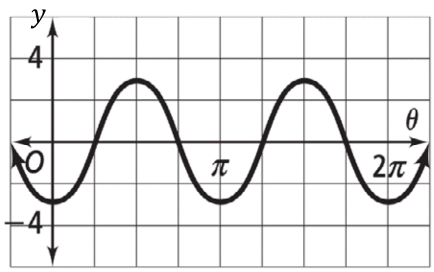
5. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები; თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა).
- დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ა)



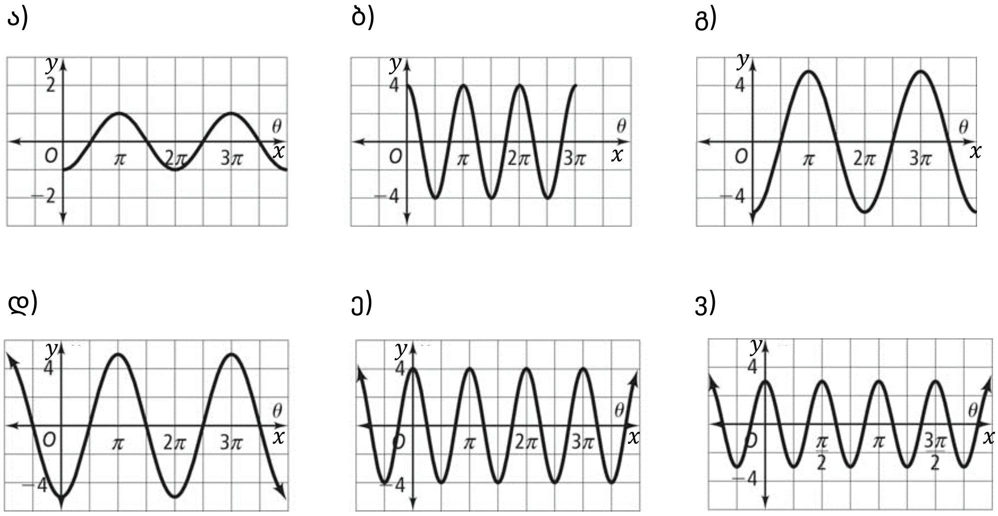
ბ)



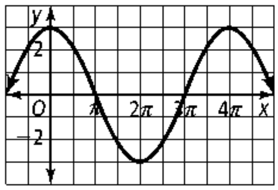
6. გააანალიზეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები; თითოეული შემთხვევისთვის დაწერეთ:

- ფუნქციის განტოლება (ფორმულა).
- დაწერეთ, რა არის ფუნქციის პერიოდი, ამპლიტუდა, განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

სავარჯიშოები



7. **შეცდომის ანალიზი:**

მოცემული ფუნქციის ანალიზის დროს სტუდენტმა დაწერა, რომ ფუნქციის ამპლიტუდა არის –2; ხოლო პერიოდი 180°. დაეხმარეთ სტუდენტს, რომ გამოასწოროს შეცდომა.	

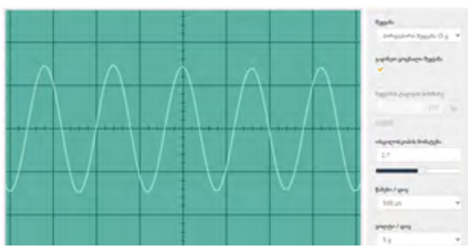
8. **ეს საინტერესოა:** იცით თუ არა, რომ ბგერის დანახვა შეგვიძლია?

დიახ, დღეს უკვე ძალიან მარტივია ბგერის ბუნების გამოკვლევა და ბევრი საინტერესო დეტალის გაგება იმაზე თუ როგორ წარმოიქმნება და ვრცელდება ბგერა, როგორ აღვიქვამთ მუსიკას და ა.შ.

გადადით მოცემულ ბმულზე, ჩართეთ თქვენი საყვარელი მელოდია და სცადეთ მისი დანახვა!
https://academo.org

- ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალეთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერის სიხშირე.
- დააკვირდით მიღებულ გრაფიკს, ეცადეთ მიიღოთ სინუსოიდას ფორმის გრაფიკი. გამოიკვლიეთ გრაფიკის ამპლიტუდა.

  დაუკავშირეთ ერთმანეთს ბგერის ფიზიკური მახასიათებლები მის შესაბამის მათემატიკური ფუნქციის პარამეტრებთან (ამპლიტუდას სიხშირე).



7.4. ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნა გრაფიკულად

ვიცით, რომ ერთ-ერთი ეშმაკის ბორბლის (სათვალთვალო ბორბლის) მოძრაობა აღიწერება შემდეგი ფუნქციით:

$h(t) = 85 sin \frac{\pi}{20} (t - 10) + 90$

როგორ დავადგინოთ, ჩაჯდომიდან რა დროის შემდეგ იქნება ადამიანი მიწის ზედაპირიდან 140 მეტრზე?

ამისათვის საჭიროა ამოვხსნათ განტოლება:

$$85 sin \frac{\pi}{20} (t - 10) + 90 = 140$$

🔗 [სიმულაცია]

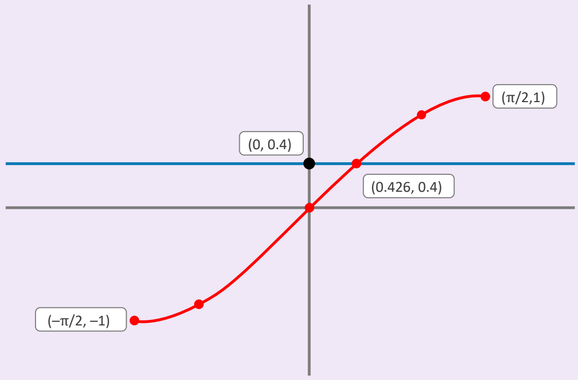
ვთქვათ, f ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი გარკვეულ ინტერვალზე, ხოლო a არის რიცხვი, რომელსაც f ფუნქცია იღებს აღნიშნულ ინტერვალზე. ასეთ შემთხვევაში: $f(x) = a$ განტოლებას აქვს მოცემულ ინტერვალზე ერთი ამონახსნი.

იპოვეთ $sin x = 0.4$ განტოლების ამონახსნი $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, ანუ $-90° \le x \le 90°$ შუალედში.

გვინდა დავადგინოთ x-ის რა მნიშვნელობისთვის იღებს $y = sin x$ ფუნქცია 0.4-ის ტოლ მნიშვნელობას.

ვიცით, რომ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია, შესაბამისად, განსახილველ განტოლებას ექნება ერთი ამონახსნი.



პროცედურა – როგორ ამოვხსნათ განტოლება გრაფიკულად?

1. შედით ვებ-გვერდზე 🔗 [Desmos];
2. ააგეთ $y = sin x$ ფუნქციის გრაფიკი;
3. ააგეთ $y = 0.4$ წრფის გრაფიკი და ნახეთ რა წერტილში იკვეთებიან გრაფიკები კონკრეტულ ინტერვალზე;
4. ამოწერეთ წერტილის კოორდინატები.

ვხედავთ, რომ წრფე გრაფიკს კვეთს წერტილში (0.426; 0.4); ე.ი. როდესაც კუთხის ზომაა 0.426 რადიანი, მაშინ ფუნქცია იღებს მნიშვნელობას 0.4.

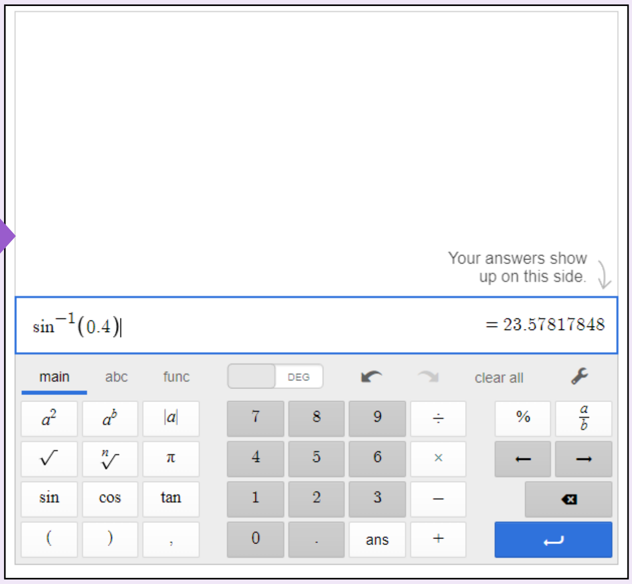
0.426 რადიანს შეესაბამება მიახლოებით 24°.

განტოლების ამოხსნა კალკულატორით:

შედით ვებ-გვერდზე:

🔗 www.desmos.com/scientific, ამოირჩიეთ ღილაკი func (Functions), შემდეგ ჩაწერეთ *sin*$^{-1}$ 0.4

როდესაც გვინდა ვიპოვოთ კუთხე, მაშინ ვწერთ აღნიშვნას *sin*$^{-1}$ a. თანამედროვე გრაფიკულ კალკულატორებში დაიწყეს აღნიშნული სიმბოლოს გამოყენება. ზოგადად, *sin*$^{-1}$ a სიმბოლოს ნაცვლად მათემატიკაში ვიყენებთ აღნიშვნას: *arcsin* a;



ყურადღება მიაქციეთ შუაში ღილაკს, რომლის მეშვეობითაც პასუხი შეიძლება იყოს წარმოდგენილი რადიანებში ან გრადუსებში.

ზემოთ მოცემულ მაგალითში ჩვენ განვიხილეთ კონკრეტული ინტერვალი, როდესაც ფუნქცია იყო ზრდადი. რა მოხდება, თუ გვინდა მთელ განსაზღვრის არეზე ყველა ამონახსნის დაწერა?

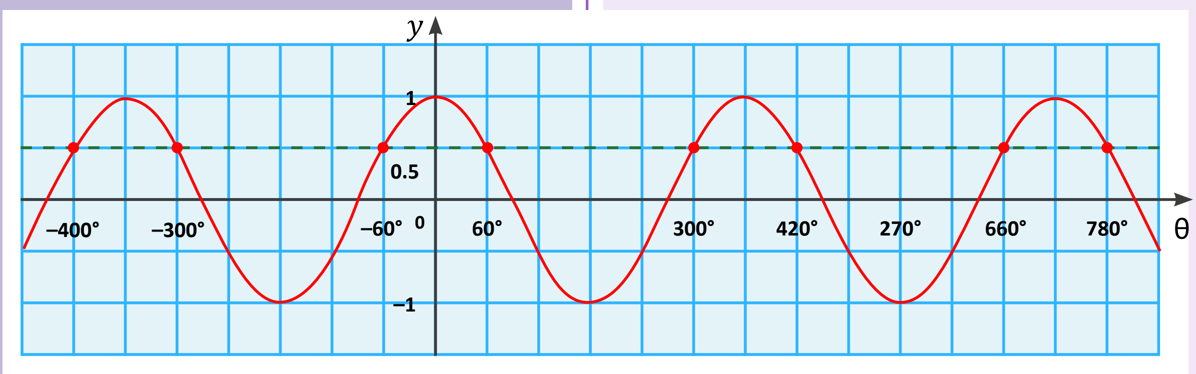
იპოვეთ *cos*θ = 0.5 განტოლების ამონახსნი:

ა) [–180°;180°] ინტერვალზე;

ბ)** სრულ განსაზღვრის არეზე.

როგორ ამოვხსნათ განტოლება გრაფიკულად?

1. შედით ვებ-გვერდზე 🔗 [Desmos;](Desmos)
2. ააგეთ y = *cos*θ ფუნქციის გრაფიკი;
3. ააგეთ y = 0.5 წრფის გრაფიკი და ნახეთ რა წერტილში იკვეთებიან გრაფიკები კონკრეტულ ინტერვალზე;
4. ამოწერეთ წერტილის კოორიდინატები.



ა) განვიხილოთ განტოლება

$$\cos\theta = 0.5$$
$$\theta = \cos^{-1} 0.5$$

პასუხი არის $\theta_1 = 60°$ $\theta_2 = -60°$

გაგრძელება

ბ) **მათემატიკის მოყვარულთათვის:**

თუ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე, შესაბამისად წრფე კოსინუსოიდას კვეთს ერთზე მეტ წერტილში; განტოლებას აქვს უსასრულო ამონახსნთა რაოდენობა.

- *როგორ ჩავწეროთ თითოეული?*

ვიცით, რომ [–180°;180°] ინტერვალზე განტოლებას აქვს ორი ამონახსნი:

$\theta_1 = 60°$ $\theta_2 = -60°$

პასუხი ასევე იქნება ყოველი შემდეგი კუთხე, რომელიც მეტია აღნიშნულ კუთხეებზე 360°-ით ან ნაკლებია 360°-ით.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ წერტილი არის წრეწირზე, მაშინ ყოველი სრული კუთხით მობრუნებისას წერტილი დაუბრუნდება საწყის პოზიციას.

$\theta = \pm 60° + 360°k$, სადაც $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

მათემატიკის მოყვარულთათვის:

როდესაც მოცემულია $\cos x = a$ განტოლება, რომელიც განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე, მაშინ განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$x = \pm\cos^{-1} a + 360°k$, სადაც $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

როდესაც მოცემულია $\sin x = a$, მაშინ განტოლების ამონახსნია:

$x = (-1)^k \sin^{-1} a + 180°k$, სადაც $k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

შეგახსენებთ, წიგნებში $\cos^{-1}$-ის ნაცვლად შეხვდებით აღნიშვნას *arccos*, $\sin^{-1}$-ის ნაცვლად კი *arcsin*; ტექნოლოგიების გამოყენების შედეგად დაინერგა აღნიშვნები $\sin^{-1}$ და $\cos^{-1}$;

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [–90°;90°] ინტერვალზე. ამოხსენით გრაფიკული მეთოდით (გრაფიკის და წრფის აგებით) ან კალკულატორის დახმარებით.

ა) $cos\alpha = 1$	ე) $cos\alpha = 0.8$
ბ) $2cos\alpha = 1$	ვ) $cos\alpha = -0.9$
გ) $2sin\alpha = \sqrt{3}$	ზ) $2sin\alpha = -\sqrt{2}$
დ) $-2sin\alpha = \sqrt{3}$	თ) $2sin\alpha = 0.3$

2. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0°; 360°] ინტერვალზე. ამოხსენით თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით.

ა) $cos^2\alpha = 1$	ე) $cos^2\alpha - cos\alpha = 0$
ბ) $cos^2\alpha = 4$	ვ) $sin^2\alpha + sin\alpha = 0$
გ) $4\ sin^2\alpha = 1$	ზ) $2sin\alpha - sin^2\ \alpha = 0$
დ) $cos^2\alpha = 0.4$	თ) $2sin\alpha - 0.1 = 0$

3. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0; 360°] ინტერვალზე.

ა) $cos\ (\alpha - 90°) = 1$	ე) $sin(2\alpha + 40°) = -1$
ბ) $cos\ (\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	ვ) $cos(\alpha + 20°) = -1$
გ) $sin\ (2\alpha - 30°) = \frac{1}{2}$	ზ) $cos(20° - 4\alpha) = 1$
დ) $sin\ (2\alpha + 90°) = 0$	თ) $cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. ამოხსენით პარაგრაფის დასაწყისში მოცემული ამოცანა.

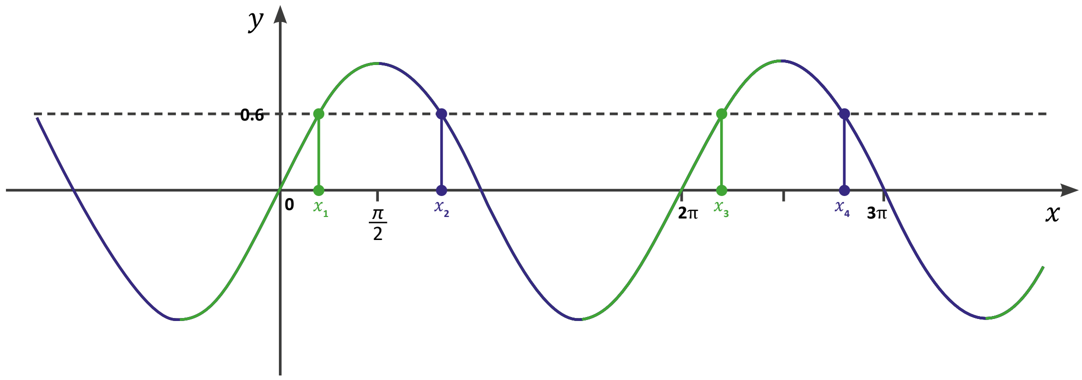
ვიცით, რომ ერთ-ერთი ეშმაკის ბორბლის (სათვალთვალო ბორბლის) მოძრაობა აღიწერება შემდეგი ფუნქციით:

$h(t) = 85sin\ \frac{\pi}{20}\ (t - 10) + 90$

- *როგორ დავადგინოთ, ჩაჯდომიდან რა დროის შემდეგ იქნება ადამიანი მიწის ზედაპირიდან 140 მეტრზე? 100 მეტრზე?*

სავარჯიშოები

5. $y = sinx$ ფუნქციის გრაფიკი $y = 0.6$ წრფეს კვეთს წერტილებში x_1, x_2, x_3, x_4. იპოვეთ აღნიშნული წერტილების რიცხვითი მნიშვნელობა გრადუსებში.



6. **გამოწვევა:** იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0°; 360°] ინტერვალზე. ამოხსენით თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით.

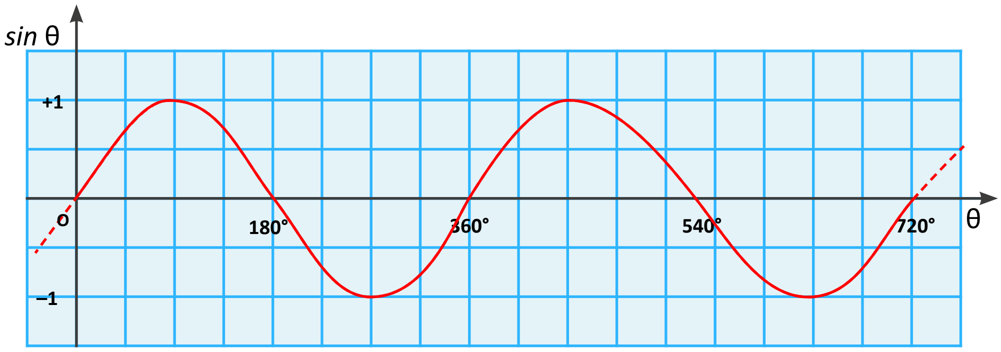
ა) $cos^2\alpha - 3cos\alpha + 4 = 0$	გ) $2sin^2\alpha + sin\alpha - 1 = 0$
ბ) $cos^2\alpha + cos\alpha - 2 = 0$	დ) $sin^2\alpha + 5sin\alpha + 6 = 0$

7. იპოვეთ ქვემოთ მოცემული განტოლებების ამონახსნები [0; 360°] ინტერვალზე.

ა) $2cos(\alpha - 90°) = 1$	ე) $2sin(2\alpha + 40°) = -1$
ბ) $3cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	ვ) $2cos(\alpha + 20°) = -1$
გ) $-1sin(2\alpha - 30°) = \frac{1}{2}$	ზ) $-4cos(20° - 4\alpha) = 1$
დ) $4sin(2\alpha + 90°) = 0$	თ) $-1cos(\alpha + 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

პერიოდული ფუნქციები, $y = tgx$ ფუნქცია

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, და ვიცით, რომ $y = sinx$ და $y = cosx$ ფუნქციების პერიოდია 2π.



ეს ნიშნავს იმას, რომ ნებისმიერი x რიცხვისთვის სრულდება პირობა:

$sin(x + 2\pi) = sinx$ და $cos(x + 2\pi) = cosx$

სინუსის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა ყველა იმ წერტილში, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდება $2\pi k$ პერიოდით, სადაც $k = ...\ -2, -1, 0, 1, 2...$

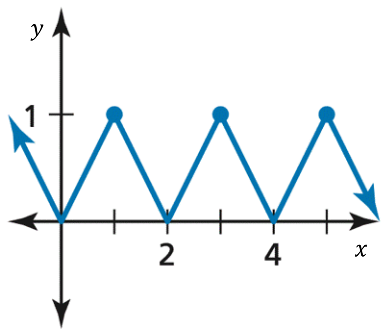
ასევე, კოსინუსის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა ყველა იმ წერტილში, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდება $2\pi k$ პერიოდით, სადაც $k = ...-2, -2, 0, 1, 2\ ...$

განვიხილოთ სხვადასხვა პერიოდული ფუნქციების გრაფიკები:

f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული $T \neq 0$ პერიოდით, თუ ყოველი x-თვის f-ის განსაზღვრის არიდან, $(x + T)$-ც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და ამ ფუნქციის მნიშვნელობები x და $(x + T)$ წერტილებში ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $f(x + T) = f(x)$.

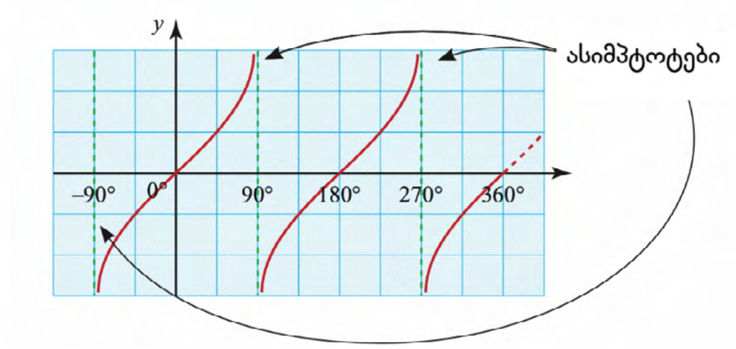
ნიმუში 2 – იპოვეთ ფუნქციის პერიოდი

განვიხილოთ $y = f(x)$ფუნქციის გრაფიკი. აღნიშნული ფუნქციის პერიოდია 2.



ნიმუში 2

გამოვიკვლიოთ $y = tgx$ ფუნქციის გრაფიკი და ვიპოვოთ მისი პერიოდი.

$y = tgx$ ფუნქციის პერიოდია π	

$x = 90°+ \pi$k, სადაც k = ... –2, –2, 0, 1, 2... მნიშვნელობებზე ფუნქცია განსაზღვრული არაა; შესაბამისად, აღნიშნულ წეტილებზე გავლებული Oy ღერძის პარალელური წრფეები წარმოადგენენ $y = tgx$ ფუნქციის ასიმპტოტებს; გრაფიკი არასოდეს გადაკვეთს აღნიშნულ წრფეებს.

ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა რიცხვი გარდა $x = 90°+ \pi k$ რიცხვებისა, სადაც:

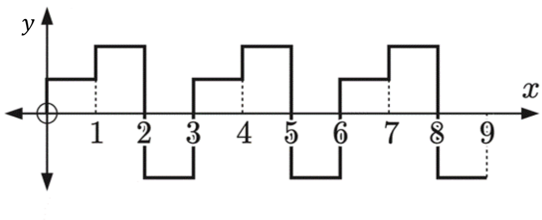
k = ... –2, –1, 0, 1, 2 ...

ფუნქციას არ აქვს მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილი.

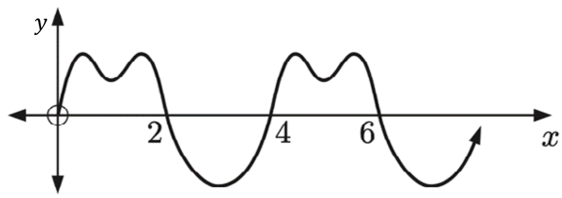
სავარჯიშოები

1. დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციების პერიოდი:

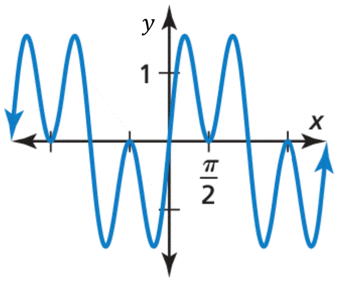
ა)



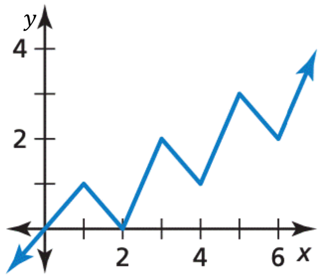
გ)



ბ)



დ)



2. დამოუკიდებლად ააგეთ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკები.

3. **გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციის გარდაქმნები:**

ა) $y = tgx$; $y = tgx + 4$; $y = tgx - 5$;	დ) $y = tgx$; $y = tg4x$;
ბ) $y = tgx$; $y = -tgx$;	ე) $y = tgx$; $y = tg(x - 90°)$; $y = tg(x + 30°)$.
გ) $y = tgx$; $y = 2tgx$;	

4. ვირტუალური ოსცილოგრაფის მეშვეობით ექსპერიმენტულად გამოთვალეთ თქვენი ან მუსიკალური ინსტრუმენტით წარმოქმნილი ბგერის სიხშირე.

დააკვირდით მიღებულ გრაფიკს, ეცადეთ მიიღოთ სინუსოიდას ფორმის გრაფიკი. გამოიკვლიეთ გრაფიკის ამპლიტუდა.