ქეთევან ცერცვაძე • ევგენი გუგულაშვილი • პეტრე ბაბილუა

სტატისტიკა, ალბათობა და კომბინატორიკა – საწყისები

სახელმძღვანელოზე მუშაობდა ავტორთა ჯგუფი:

- **ქეთევან ცერცვაძე**
- **ევგენი გუგულაშვილი**
- **პეტრე ბაბილუა**

მადლობას ვუხდით მანანა დეისაძეს, გიორგი ნადარეიშვილს და ნატო გერგაიას სახელმძღვანელოს შექმნაში შეტანილი წვლილისთვის.

გრაფიკული დიზაინერი: **ვერა პაპასკირი**

საქართველო, თბილისი, 2024

მათემატიკური წიგნიერება

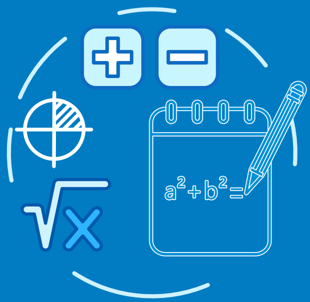
მათემატიკური წიგნიერება

თავი V
სტატისტიკა და ალბათობა

თანამედროვე სწრაფად ცვალებად ტექნოლოგიურ ხანაში კომპიუტერული მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების საფუძველი მათემატიკაა. მომავალ ინჟინრებსა და მეცნიერებს, რომლებმაც ტექნოლოგიების საზღვრები უნდა გაარღვიონ, მათემატიკაში ძლიერი საფუძველი უნდა ჰქონდეთ. კომპიუტერული ინჟინერია და ზოგადად ინჟინერია მეტწილად მათემატიკასა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებას იყენებს პრობლემების გადაჭრაში, მოვლენის მოდელირებასა და კვლევაში, რაც პროგრესისა და განვითარების საფუძველია.

მათემატიკა STEM განათლების საფუძველია, რაც პრობლემაზე და კვლევაზე დაფუძნებული სწავლების საშუალებას იძლევა.

I. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

ყოველდღიურ ცხოვრებაში სატელევიზიო საშუალებების თუ ინტერნეტ მედიის საშუალებით ჩვენ ვეცნობით სხვადასხვა კვლევის შედეგებს, რომელიც წარმოდგენილია გრაფიკულად, სიტყვიერად თუ ცხრილების მეშვეობით.

იმისათვის, რომ შევძლოთ ინფორმაციის სწორად წარმოდგენა, აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორ ხდება კვლევის ორგანიზება, საკვლევი კითხვის დასმა, ასევე ინფორმაციის მოსაძლიებელი კითხვების დასმა, მონაცემების შეგროვება, ანალიზი და ინტერპრეტაცია.

პროექტი

საკვანძო კითხვა:

- *როგორ არის შესაძლებელი კვლევის დაგეგმვა და მონაცემების ინტერპრეტირება?*

მონაცემების შეგროვების ერთ-ერთი მეთოდი არის კითხვარის გამოყენება, საკვლევი კითხვის ჩამოყალიბების შემდეგ, დგება კითხვების ჩამონათვალი, რომელსაც გამოკითხულებმა პასუხი უნდა გასცენ. შეგროვებული ინფორმაციის საფუძველზე კეთდება დასკვნა.

თქვენი დავალება

მოიფიქრეთ თქვენთვის საინტერესო საკითხი და ჩამოაყალიბეთ საკვლევი კითხვა. საკვლევ კითხვასთან დაკავშირებით შეადგინეთ კითხვარი და დაორგანიზეთ კვლევა; გამოკითხვა შეგიძლიათ აწარმოოთ Microsoft Forms *(MIcrosoft Forms – კითხვარის შედგენა, ვიდეო ინსტრუქცია)* ან Google Forms-ის მეშვეობით ინტერნეტით;

დავალება წარმოადგინეთ თქვენთვის მოსახერხებელი ფორმით; კითხვები და შედეგები გადაიტანეთ საპრეზენტაციო ფაილში:

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რას ეხებოდა თქვენი საკვლევი საკითხი? რატომ იყო საინტერესო თქვენთვის?
- ვის მოიაზრებთ სამიზნე აუდიტორიად?
- როგორ დაააორგანიზეთ კვლევა? რამდენად ობიექტურად და მიუკერძოებლად წარმართეთ პროცესი?
- როგორ წარმოადგინეთ კვლევის შედეგები? რამდენი სხვადასხვა მეთოდით არის შესაძლებელი?
- მონაცემების მოწესრიგების შემდეგ, რა აღმოაჩინეთ? რა დაადგინეთ კვლევის შედეგად?

დამხმარე ნიმუში დავალების პირობის გასააზრებლად

დავუშვათ, სკოლის მასწავლებლებმა ან განათლების სამინისტრომ გადაწყვიტა მოსწავლეების გამოკითხვა სასკოლო ცხოვრების შიდა კლიმატის დასადგენად. ამისათვის, მათ უნდა შეადგინონ კითხვარი.

გაგრძელება

მას შემდეგ, რაც მკვლევარი გადაწყვეტს, რომელი საკითხის შესწავლა სურს, კვლევის დაწყებამდე მას უნდა ჰქონდეს ცოდნა, როგორ აწარმოოს კვლევა სწორად.

- როგორ ხდება მონაცემების შეგროვება?
- რა ტიპის მონაცემები არსებობს?
- რა წესით უნდა შევადგინოთ საკვლევი ჯგუფი?
- რა რაოდენობის მონაცემია საკმარისი, რომ გამოვიტანოთ დასკვნა?
- რისთვის არის საჭირო დასკვნა?
- რა ხდის მონაცემების წარმოდგენას ეფექტურს?

კითხვარი

1. რომელ კლასში სწავლობთ?

2. თქვენი სქესი: მდედრობითი ◯ მამრობითი ◯

3. საშუალოდ რამდენ საათს ატარებთ სკოლაში ყოველდღე?

4. როგორ ფიქრობთ, აქვს თუ არა ბიჭს გოგოსთან შედარებით მეტი უფლებები?

   ◯ *ვეთანხმები* ◯ *არ ვეთანხმები* ◯ *ნაწილობრივ ვეთანხმები*

5. ეთანხმებით თუ არა: მოსწავლეს, რომელიც კარგად სწავლობს, მეტ ყურადღებას აქცევენ

   ◯ *ვეთანხმები* ◯ *არ ვეთანხმები* ◯ *ნაწილობრივ ვეთანხმები*

6. 10 ქულიანი სისტემით, როგორ შეაფასებდით სკოლას?

როგორც ნიმუშიდან ჩანს, არსებობს სხვადასხვა ტიპის მონაცემი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ სკოლაში არსებული კლიმატი, ახალგაზრდების დამოკიდებულებები თუ ხედვები გარკვეული საკითხის მიმართ.

კიდევ სცადეთ

თემა 1. მონაცემთა ანალიზი (წინა მასალის გამეორება)

1.1.მონაცემების შეგროვება

სტატისტიკა – არის მეცნიერება მონაცემების შეგროვების, დამუშავების, ანალიზისა და მასზე დაყრდნობით დასკვნების გაკეთების შესახებ. სტატისტიკაში შეგროვებულ ინფორმაციას მონაცემები ეწოდება.

სტატისტიკას იყენებს ბიზნესი, სპორტი, მეცნიერება, მთავრობა და ა.შ.

სტატისტიკური კვლევის განხორციელებისთვის ყოველთვის არის გამოკვეთილი სამიზნე აუდიტორია, რომელთა შესახებაც არის აუცილებელი ინფორმაციის შეგროვება და დამუშავება, რათა გამოითქვას საფუძვლიანი ვარაუდები, მოხდეს არსებული სიტუაციის ანალიზი, გაკეთდეს დასკვნა და მიღებულ იქნას ეფექტური გადაწყვეტილება.

მაგალითად, ინფორმაციის შეგროვება ხდება ხალხის გამოკითხვით. არსებობს გამოკითხვის წარმოების სხვადასხვა მეთოდი.

მაგალითად, თუ უნდა გამოიკითხოს, თბილისის ყველა მოსახლე, ვიტყვით, რომ უნდა გამოიკითხოს **პოპულაცია**. როდესაც უნდა გამოიკითხოს პოპულაცია, სამიზნე (გამოსაკითხი) აუდიტორიის თითოეული წევრი, ამბობენ, რომ ხდება **აღწერა**. ხშირად, კვლევებისას, გამოიკითხავენ მცირე ჯგუფს, რასაც ეწოდება **შერჩევითი მეთოდით** გამოკითხვა და შემდეგ, გარკვეული წესების დაცვით ხდება ინფორმაციის განზოგადება პოპულაციისთვის.

შერჩევითი მეთოდით წარმოებული გამოკითხვის დროს, გამოიკითხავენ პოპულაციის მცირე ჯგუფს.

მცირე ჯგუფი უნდა შეირჩეს ისე, რომ აღწერდეს სრულ პოპულაციას. მცირე ჯგუფის მონაცემების ანალიზით დასკვნა კეთდება სრული პოპულაციისთვის.

შერჩევითი ჯგუფის გამოკითხვისას პროცესი მიმდინარეობს სწრაფად და საორგანიზაციოდ იაფია, თუმცა აღწერასთან შედარებით არ არის დეტალური და ცდომილება შედარებით მაღალია.

ტელესკოლა

აღწერისას გამოკითხავენ პოპულაციის ყველა წევრს და აგროვებენ ინფორმაციას. აღწერა დეტალურია, ზუსტი, მაგრამ საორგანიზაციოდ ძვირი და შრომატევადი. შესაძლებელია ადამიანების ან ობიექტების აღწერა.

შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვა გულისხმობს მხოლოდ მოსახლეობის (ან გამოსაკითხი ჯგუფის) გარკვეული ნაწილის გამოკითხვას, რომელიც უნდა შეირჩეს შემთხვევითი წესით.

როგორც ვხედავთ, **აღწერისას** ხდება პოპულაციის გამოკითხვა, ხოლო შერჩევითი მეთოდით გამოკითხვისას კი – მცირე ჯგუფის გამოკითხვა.

გაგრძელება

ნიმუში 1

გვაინტერესებს, საქართველოში 12-18 წლის ახალგაზრდებს უყვართ თუ არა მათემატიკა და რატომ?

- პოპულაციიდან გამოვყავით **სამიზნე ჯგუფი** (ჯგუფი, რომელიც ჩვენი ინტერესის სფეროა) 12-18 წლის ახალგაზრდები.
- რადგან ყველას გამოკითხვა შრომატევადია, **შერჩევითი გამოკითხვის წესით** გამოვკითხავთ მცირე ჯგუფს და დასკვნას ვაკეთებთ 12-18 წლის ყველა ახალგაზრდის შესახებ.
- დასკვნის ობიექტურობისათვის, აუცილებელია გამოვკითხოთ **შემთხვევითი ახალგაზრდები.**
- თუ მონაცემების შემგროვებელი მივიდა მათემატიკურ სკოლასთან და იქ შეარჩია მცირე ჯგუფი, მაშინ დასკვნა არ იქნება რეალობასთან ახლოს, რადგან სავარაუდოდ, მათემატიკური სკოლიდან გამოსულ ბავშვებს ეყვარებათ მათემატიკა, ამიტომ აუცილებელია, გამოიკითხოს სხვადასხვა სკოლის ბავშვები.

? საკვანძო კითხვა: *რას ეწოდება მიკერძოებული გამოკითხვა?*

არსებობს სამუშაო ჯგუფის შედგენის რამდენიმე გზა, ერთ-ერთია მიკერძოებული გამოკითხვა. მაგალითად, თუ გვაინტერესებს, გავიგოთ, მოსწავლეებს სპორტი ურჩევნიათ თუ ცეკვა და გამოვკითხავთ მხოლოდ სპორტული სკოლის ბავშვებს და შედეგს განვაზოგადებთ ყველა მოსწავლეზე, მაშინ მივიღებთ მიკერძოებულ გამოკითხვას. აღნიშნულ წესს ჰქვია BIAS Sample – მიკერძოებული შერჩევა.

მონაცემების შეგროვება და დამუშავებისათვის საჭიროა დავიცვათ შემდეგი წესები, მოქმედებათა თანმიმდევრობა:

ნაბიჯი 1: ჩამოაყალიბეთ საკითხი, რომლის შესწავლაც იქნება შესაძლებელი და ჩამოწერეთ კითხვები, რომლებიც დაგეხმარებათ საკითხის შესწავლაში.

ნაბიჯი 2: შეაგროვეთ მონაცემები

ნაბიჯი 3: დაამუშავეთ მონაცემები

ნაბიჯი 4: შეაჯამეთ და წარმოადგინეთ მონაცემები

ნაბიჯი 5: მოახდინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია; გააანალიზეთ მონაცემები და დაწერეთ დასკვნა

ნიმუში 2

ქვემოთ ჩამოთვლილი საკითხების კვლევისათვის, კვლევის რომელი მეთოდის გამოყენება იქნება სასურველი და მეტად ეფექტური?

ა) თბილისში საგზაო შემთხვევების (ავარიების) გამომწვევი მიზეზები.

ბ) ბიზნესს აინტერესებს, რა უფრო უყვარს მოსახლეობას – კოკა-კოლა თუ პეპსი?

ა) აღწერა – პირველი საკითხის საკვლევად აუცილებელია ზუსტი და დეტალური ინფორმაციის ფლობა. ამიტომ სასურველია თუ მკვლევარი დააფიქსირებს ყველა საგზაო შემთხვევას.

ბ) შერჩევითი გამოკითხვა – მსგავსი საკითხის საკვლევად საკმარისია გამოიკითხოს მოსახლეობის გარკვეული ნაწილი, კერძოდ, „შემთხვევითი წევრები". თუ გამომკითხველი გამოიკითხავს მხოლოდ იმ ადამიანებს, რომლებმაც კოკა-კოლა იყიდეს, გამოკითხვა იქნება მიკერძოებული.

ნიმუში 3

მოსწავლემ გადაწყვიტა გაერკვია I-VII კლასის მოსწავლეებს რა უფრო უყვარდათ, კომპიუტერული თამაშები თუ გარე აქტივობები? (მაგ: ფეხბურთი, სირბილი და ა.შ).

მოცემული კითხვარის მიხედვით, შეძლებენ თუ არა მოსწავლეები გამოკითხვის სწორად წარმოებას?

მოცემული კითხვარის მიხედვით, შეძლებენ თუ არა მოსწავლეები სწორად გამოკითხვას?	რომელი თამაში გიყვართ?
გამოკითხვა იქნება მიკერძოებული და არ იქნება ზუსტი ყველა 1-7 კლასის მოსწავლეთა პოპულაციისთვის. ჩამონათვალში მითითებულია მხოლოდ კომპიუტერული თამაშების სახელები და არ არის არც ერთი გარე ან ფიზიკური აქტივობა. ადამიანები ხშირად, გამოიკითხავენ მიკერძოებულად, რათა დაასაბუთონ თავიანთი აზრის უპირატესობა.	ფორტნაითის თამაში ☐ მაინკრაფტის თამაში ☐ კიდევ სცადეთ *ფორტნაითი და მაინკრაფტი კომპიუტერული თამაშებია.* **გაფრთხილება:** *არ არის სასურველი კომპიუტერული თამაშების დიდი დროით თამაში*

სავარჯიშოები

1. დაწერეთ კვლევის რომელი მეთოდი უნდა იყოს გამოყენებული ჩამოთვლილი საკითხების ანალიზისთვის?

I. რომელია ყველაზე პოპულარული სატელევიზიო შოუ?

II. ფეხბურთის ჩემპიონატის დროს, კვირაში სულ რამდენი გოლი გადის?

III. 10 წლამდე ბავშვებს კატა უფრო უნდათ რომ ჰყავდეთ თუ ძაღლი?

IV. წლის განმავლობაში გოგო მეტი დაიბადა თუ ბიჭი?

ინფორმაციისთვის:

- ქვეყნის დემოგრაფიულ ვითარებაში გასარკვევად ატარებენ კვლევებს, იმასთან დაკავშირებით, იკლო შობადობამ თუ მოიმატა.
- მაგალითად, ბიზნესში მარკეტინგის წარმომადგენლებს რეკლამის განთავსების მიზნით აინტერესებთ, რომელი სატელევიზიო შოუ უფრო პოპულარულია და უყურებს მოსახლეობა და ა.შ.

2. აპლიკაციების კომპანიამ შექმნა ორი ახალი კომპიუტერული თამაში. იმისათვის, რომ გაეგოთ რომელი თამაში უფრო მოსწონთ ბავშვებს, რამდენიმე სკოლაში გამოკითხეს 500-მდე ბავშვი. გამოკითხვის რა მეთოდი გამოიყენეს კვლევისთვის?

3. მოსწავლეს უნდა დაამტკიცოს, რომ ახალგაზრდებს როკზე მეტად ჰიპ-ჰოპი მოსწონთ.

- როგორი მეთოდით უნდა ჩაატაროს გამოკითხვა: ჰკითხოს ყველას – აღწეროს ახალგაზრდები ვინ რომელ მიმდინარეობას უსმენს? ჰკითხოს შემთხვევითად შერჩეულ მოსწავლეებს, თუ ჰკითხოს მარტო მათ, ვისაც უყვართ ჰიპ-ჰოპი?
- შეადგინეთ კითხვარის ფორმა.

4. იმისათვის, რომ დაედგინა, ცურვა უფრო მეტად უყვართ თანატოლებს თუ ცეკვა, ნუცამ გამოკითხა აუზზე მისული მისი თანატოლები.

- გამოკითხვის რა მეთოდით ჩაატარა კვლევა ნუცამ?

5. იმისათვის, რომ დადგინდეს, მოსახლეობის რაოდენობა შემცირდა თუ გაიზარდა, რა ტიპის კვლევა არის ჩასატარებელი?

6. ჩამოთვლილი საკითხების საკვლევად გადაწყვიტეთ, რომელი მეთოდით აჯობებს კვლევის ჩატარება: პოპულაციის გამოკითხვა (აღწერა) თუ შერჩევითი მეთოდის გამოყენება?

ა) რამდენი საათის განმავლობაში მეცადინეობენ მოსწავლეები კვირაში მათემატიკას?

ბ) მოსახლეობას თანამედროვე ფილმები უფრო მოსწონს თუ ძველი ფილმები?

გ) 14 წლამდე მოსწავლეებს ბეტმენი უფრო მოსწონთ თუ სუპერმენი?

პასუხი დაასაბუთეთ. (ბეტმენი და სუპერმენი ფილმის პერსონაჟებია).

სავარჯიშოები

ჯგუფური სამუშაო

7. ლიზიმ, ელიმ და ანდრიამ გადაწყვიტეს მეშვიდე, მერვე და მეცხრე კლასელების გამოკითხვა თემაზე ზაფხულის კურორტები უყვართ თუ ზამთრის?

მეგობრებმა გადაწყვიტეს კვლევა ჩაატარონ შერჩევითი წესით და გამოკითხონ სულ 60 მოსწავლე.	მე-7 კლასი	მე-8 კლასი	მე-9 კლასი
	120	90	150

ა) რამდენი მოსწავლე უნდა გამოკითხონ თითო კლასიდან?

ბ) შეადგინეთ გამოკითხვის ფორმა, რომელშიც იქნება რამდენიმე მიზეზი თუ რა უპირატესობები აქვს თითოეულ კურორტს.

გ) რომელია სამიზნე აუდიტორია?

8. ეკამ და სერგიმ გადაწყვიტეს სპორტსმენების გამოკითხვა, თუ რომელი პერსონაჟი უფრო მეტად მოსწონთ, ჰარი პოტერი თუ აირონ მენი. იმისათვის, რომ დაადგინონ, რის გამო რომელი ფილმის პერსონაჟს ანიჭებენ უპირატესობას, უნდა შეადგინონ კითხვარი (ჰარი პოტერი წიგნია, რომლის მიხედვითაც გადაიღეს ფილმი)

- აღწერეთ, როგორ უნდა ჩაატარონ გამოკითხვა?
- რა ტიპის, კითხვები უნდა დაწერონ?
- რა შემთხვევაში იქნება გამოკითხვა მიკერძოებული?

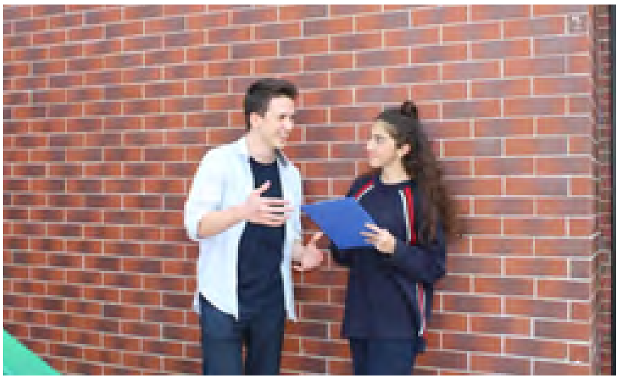
ტერმინები	გამოკითხვა	
პოპულაცია	მიკერძოებული გამოკითხვა	შემთხვევითი წესით მონაწილის არჩევა
სამიზნე აუდიტორია	შერჩევითი გამოკითხვა	კითხვარი
აღწერა	კვლევა	

1.2. მონაცემების კლასიფიკაცია

მონაცემების დამუშავება

როგორც აღვნიშნეთ, სტატისტიკაში შეგროვებულ ინფორმაციას ეწოდება მონაცემები. მონაცემები არის სხვადასხვა სახის: რაოდენობრივი და თვისებრივი.

თავის მხრივ, ხდება რაოდენობრივი და თვისებრივი მონაცემების კლასიფიკაცია



რაოდენობრივი მონაცემები	მიიღება თვლის ან დაკვირვების შედეგად და გამოისახება რიცხვებში. რაოდენობრივი, რიცხვებით გამოსახული ინფორმაციის წარმოდგენა შესაძლებელია სხვადასხვა სახით.
თვისებრივი მონაცემები	გამოხატავს ობიექტის მდგომარეობას ან თვისებას.

რაოდენობრივი მონაცემები

- **დისკრეტული** — მაგ.: ასაკი, წონა, გოლების რაოდენობა და ა.შ.
- **უწყვეტი** — მაგ.: 100 მეტრს რა დროში გარბის. მანქანა 100კმ-ზე რამდენ ლიტრ საწვავს წვავს და ა.შ.

თვისებრივი მონაცემები

- **ნომინალური (nominal)** — მაგ.: ფილმის ჟანრი, კატის ჯიში – სახეობა, და ა.შ.

  ერთ კატეგორიაში მოთავსებული საგნები იდენტურია ან თითქმის იდენტურია გარკვეული თვისების ან ნიშნის მიხედვით.
- **რიგობრივი (Ordinal)** — მაგ.: 10-ქულიანი სისტემით შეაფასეთ ფილმი. რამდენად ეთანხმებით დაწერეთ 1,2,3, ... 10.

განვიხილოთ მაგალითი და დავალაგოთ მონაცემები:

ნინიმ გადაწყვიტა ჩაეტარებინა გამოკითხვა კლასელებში, თუ რამდენი და-ძმა არის თითოეულის ოჯახში (რამდენი დედ-მამიშვილია თითოეულ ოჯახში), გამოიკითხა 14 კლასელი და ჩაიწერა მონაცემები შემდეგნაირად:	1, 2, 2 , 3, 3, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 1, 1, 2,

გაგრძელება

მოვაწესრიგოთ მონაცემები ცხრილის მეშვეობით. სტატისტიკაში მონაცემების ორგანიზებისათვის და დასათვლელად გამოიყენება პატარა ჯოხები (გამოისახება სიმბოლოთი |.

შედეგები	რაოდენობის დათვლა	რაოდენობა რიცხობ-რივად	ფარდობითი სიხშირე
1	𝍸	5	$\frac{5}{14}$
2	𝍸 |	6	$\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$
3	|||	3	$\frac{3}{14}$
სულ		14	1

ფარდობითი სიხშირე – მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემის საერთო რაოდენობას-თან.

ფარდობითი სიხშირეების ჯამი უდრის ერთს.

ერთი ჯოხი აღნიშნავს ერთს. 𝍸 – აღნიშ-ნავს 5-ს.

გამომდინარე იქიდან, რომ ცხრილი გვიჩვე-ნებს, რამდენად ხშირია თითოეული ვარიან-ტი (კატეგორია), ცხრილს ეწოდება სიხში-რის გამომსახველი ცხრილი.

ცხრილიდან ჩანს, რომ 14 გამოკითხული-დან, 5 ოჯახშია მხოლოდ ერთი ბავშვი,

6 ოჯახში – 2 ბავშვი და 3 ოჯახში – 3 ბავშვი.

გამოკითხვის პროცესში „ჯოხების“ გამოყე-ნება გვეხმარება მონაცემების შეგროვებასა და ორგანიზებაში. გამოკითხვისას, როდესაც რესპოდენტი გვპასუხობს, რომ ოჯახში არის 3 ბავშვი, ჩვენ 3-ის გასწვრივ ჩამოვუსვამთ სამ ჯოხს და ა.შ. სიხშირე და ფარდობითი სიხშირის სვეტი მარტივად აღქმადს ხდის ინფორმაციას, გვიჩვენებს რომელი მონაცემი უფრო ხშირად მეორდება.

შენიშვნა: *რესპონდენტი არის ადამიანი, ვისი გამოკითხვაც ხდება.*

მონაცემების წარმოდგენის ხერხები

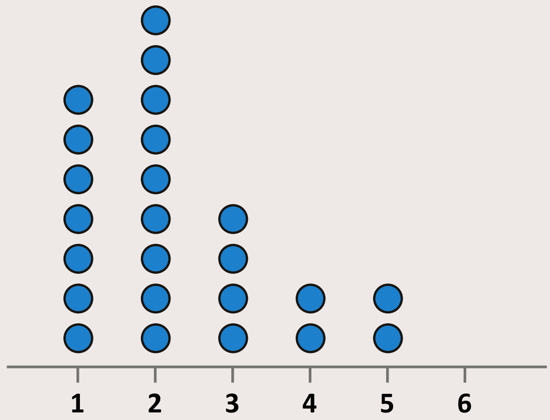
მონაცემების წარმოდგენა წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით

სიხშირეთა ცხრილის გრაფიკული წარმოდგენა ხდება წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით.

რიცხვით ღერძზე ინიშნება მონაცემები, ხოლო ვერტიკალურად ვსვამთ იმდენ წერტილს, რამდენჯერაც გამეორდა აღნიშნული მონაცემი. დიაგრამაზე განლაგებული ინფორმაცია იკითხება შემდეგნაირად:

თითოეული მონაცემი გამეორდა:

1 — 7-ჯერ
2 — 9-ჯერ
3 — 4-ჯერ
4 — 2-ჯერ
5 — 2-ჯერ



ნიმუში 1 – პროგნოზირება – პროპორციის გამოყენება სტატისტიკაში

კომპანიაში 1600 ადამიანია დასაქმებული, შემთხვევითი წესით შერჩეულ 50 აპლიკანტს შორის 18 თქვა, რომ ჰყავს ავტომობილი. ივარაუდეთ, რამდენ ადამიანს შეიძლება ჰყავდეს ავტომობილი 1600 ადამიანიდან?

იმისათვის, რომ მიახლოებით ვივარაუდოთ, რამდენ ადამიანს შეიძლება ჰყავდეს მანქანა 1600 თანამშრომლიდან, დავწეროთ პროპორცია:

თუ	50-დან ჰყავდა 18-ს
სავარაუდოდ	1600-დან ეყოლება X-ს

ვადგენთ პროპორციას შემდეგი წესით:

$$\frac{\text{გამოკითხულთაგან ავტომობილის მფლობელთა რაოდენობა}}{\text{გამოკითხულთა რაოდენობა}} = \frac{\text{ავტომობილის მფლობელთა სრული რაოდენობა}}{\text{თანამშრომელთა სრული რაოდენობა}}$$

$$\frac{18}{50} = \frac{x}{1600}$$

პროპორციაში ჯვარედინი წევრების ნამრავლი ტოლია:

$$50 \cdot x = 1600 \cdot 18$$

$$x = 576$$

რა საკვირველია, ამ შემთხვევაში, არ გამოიკითხა სრულად კომპანიაში დასაქმებული ყველა ადამიანი, პასუხი არ არის ზუსტი. პროპორციის გამოყენებით, მიახლოებით, 1600 თანამშრომლიდან მანქანა ეყოლება 576-ს.

სავარჯიშოები

მოსამზადებელი პრაქტიკა

1. რადიო სადგურმა ჩაატარა გამოკითხვა შემთხვევითი გამოკითხვის წესით, თემაზე, რა ჟანრის მუსიკა უფრო მოსწონს მსმენელს. შედეგები მოცემულია ცხრილით.

ა) სულ რამდენი მსმენელი გამოიკითხა?

ბ) რა არის თითოეული ჟანრის სიხშირე?

გ) რა არის თითოეულის ფარდობითი სიხშირე?

ჟანრი	რაოდენობის დათვლა	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
როკი	|||| |||		
პოპი	||||		
რეპი	|||| |		
ჰოპ-ჰოპი	|||| ||||		
ელექტრონული			

მითითება: *შეავსეთ ცხრილი, იმუშავეთ რვეულში.*

კიდევ სცადეთ

2. კომპანიაში 1200 თანამშრომელი მუშაობს. იმისათვის, რომ მოაწესრიგონ პარკინგის პრობლემა, ანუკიმ და ზუკამ გადაწყვიტეს დაადგინონ რამდენს ჰყავს მანქანა. რადგან ყველა თანამშრომლის გამოკითხვა დიდ დროს მოითხოვს, მათ გამოიყენეს შერჩევითი გამოკითხვის წესით ჩაატარეს. შემთხვევით შერჩეული 60 გამოკითხული აპლიკანტიდან 24-მა თქვა, რომ ჰყავდა მანქანა. რა დასკვნის გაკეთება შეუძლია ანუკის და სანდროს თანამშრომლების სრული რაოდენობისთვის? სავარაუდოდ, რამდენ თანამშრომელს ეყოლება მანქანა?

3. გამოკითხვა შერჩევითი წესით:

ქალაქში, სადაც მოსახლეობის რიცხვი არის 200000, გადაწყვიტეს ჩაეტარებინათ კვლევა, რომელი ბრენდის ნოუთბუქს ანიჭებენ უპირატესობას: ბრენდი A, ბრენდი B, ბრენდი C.

შემთხვევითი შერჩევის გამოკითხვის წესით გამოკითხეს 1000 მომხმარებელი. ცხრილში მოცემული შედეგების მიხედვით იპოვეთ:

ა) ფარდობითი სიხშირე და გამოსახეთ პროცენტებში.

ბრენდი	მომხმარებელი	ფარდობითი სიხშირე
ბრენდი A	350	
ბრენდი B	250	
ბრენდი C		

კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები

ბ) რისთვის შეიძლება გამოიყენოს ბიზნესმა აღნიშნული ინფორმაცია?

გ) დაწერეთ 2 მიზეზი მაინც, რატომ შეიძლებოდა ჩაეტარებინა გამოკითხვა კომპანია ბრენდ A-ს?

4. ლანამ გადაწყვიტა ყოველდღე ევარჯიშა და ერბინა ლისის ტბაზე.

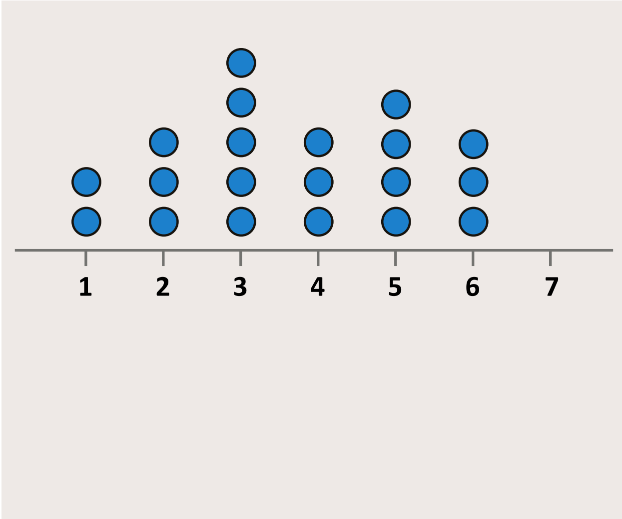
წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით მოცემულია ინფორმაცია რამდენ კმ-ს დარბოდა 20 დღის განმავლობაში თითოეულ დღეს.

ა) რამდენი დღის განმავლობაში ირბინა ლანამ 3კმ?

ბ) რამდენი დღის განმავლობაში ირბინა ლანამ 4 კმ და 5 კმ?

გ) სულ რამდენი კილომეტრი ირბინა ლანამ 20 დღის განმავლობაში?

დ) გამოითვალეთ თითოეული მონაცემის ფარდობითი სიხშირე.



5. ორმა მოსწავლემ გადაწყვიტა შეესწავლა, თუ რამდენად უყვართ კითხვა უფროსი კლასის მოსწავლეებს და ჩაატარეს გამოკითხვა:

კვლევა: მე-10 – მე-12 კლასელების წიგნის კითხვის სიყვარულის შესახებ	
კვლევის მეთოდი	**კვლევის შედეგი**
ელენემ გამოიკითხა 40 ნაცნობი მაღალკლასელი	75%-მა უთხრა, რომ მუდმივად კითხულობენ ნოველებს.
ტატამ გამოიკითხა სკოლის მასშტაბით 100 უფროსკლასელი შემთხვევითი შერჩევის წესით	40%-მა უთხრა, რომ მუდმივად კითხულობენ ნოველებს.

იმსჯელეთ და დაასაბუთეთ პასუხები:

ა) რომელმა რა მეთოდით ჩაატარა გამოკითხვა?

ბ) რომელი მოსწავლის გამოკითხვა მოგვცემს მეტად ობიექტურ სურათს?

6. რა განსხვავებაა პოპულაციის აღწერასა და შერჩევითი წესით მცირე ჯგუფის გამოკითხვას შორის?

7. რა განსხვავებაა შემთხვევითი წესით შერჩეული ადამიანების გამოკითხვასა და მიკერძოებულ გამოკითხვას შორის?

სავარჯიშოები

8. გიორგიმ გააგორა კამათელი და ჩამოწერა შედეგები, რაც მოვიდა კამათლის გაგორების შემდეგ. შედეგები გამოიყურება შემდეგნაირად:

3 , 1, 2, 1, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1, 1, 2, 4, 5

4 ,2, 6, 2, 4, 5, 5, 3, 1, 3, 1, 2, 5, 6

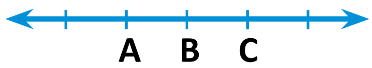
ა) წარმოადგინეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილის ან მონაკვეთის დახმარებით.

ბ) დაითვალეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის სიხშირე.

გ) დაითვალეთ თითოეული რიცხვის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე.

9. მოცემული მონაცემები გადაიტანეთ სიხშირის მონაკვეთზე და დაითვალეთ თითოეული მონაცემის მოსვლის სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე.

A	B	B	C	C	B	A	A	B	C
C	A	B	B	A	B	C	C	A	B



10. როკკონცერტის დასრულების შემდეგ, მარიამმა გამოკითხა კონცერტიდან გასული მსმენელი იმის დასადგენად, თუ რა ჟანრის მუსიკა მოსწონდათ მეტად.

ა) სწორად დაგეგმა მარიამმა კვლევა?

ბ) რა ტიპის მონაცემებს შეაგროვებს მარიამი, მიკერძოებულს თუ ობიექტურს?

კვლევა სპორტში

11. მაიას და სანდროს სურდათ კვლევის შედეგად დაედგინათ, რამდენი მოსწავლეა დაკავებული სპორტით. სკოლაში 630 მოსწავლე სწავლობს, სრული რაოდენობის გამოკითხვის ნაცვლად, მათ შემთხვევითი გამოკითხვის წესით გამოკითხეს 70 მოსწავლე და აღმოჩნდა, რომ 70-დან 14 მოსწავლე იყო სპორტით დაკავებული.

რა ვარაუდის გაკეთება შეუძლიათ მაიას და სანდროს თავიანთი კვლევისთვის? კიდევ, რა შეუძლიათ დაადგინონ აღნიშნულ საკითხთან დაკავშირებით?

მინიშნება: რამდენი სხვადასხვა სახეობის სპორტით არიან დაკავებულები. რა კითხვების დამატება შეუძლიათ კითხვარში კვლევის გამრავალფეროვნებისთვის? შეადგინეთ კითხვარის ნიმუში.

სავარჯიშოები

12. ბიზნესი: საბას საწარმო წელიწადში აწარმოებს 180 000 მაისურს. მას სურდა, დაედგინა, მიახლოებით, რამდენი დეფექტიან მაისურს აწარმოებს წლიურად. ამისათვის, მან შემთხვევითი შერჩევის წესით ამოარჩია 135 მაისური და აღმოჩნდა, რომ 15 იყო დეფექტით. რა ვარაუდის გაკეთება შეუძლია საბას? სავარაუდოდ, რამდენი დეფექტიანი მაისური იქნება 180 000 მაისურში?

კვლევის დაგეგმვა

13. იმუშავეთ ჯგუფებში. შეადგინეთ კითხვარი იმის დასადგენად თუ:

ა) რა ჟანრის ფილმები მოსწონთ კლასში? სკოლაში?

ბ) რამდენად მოსწონთ 1-6 კლასელებს კომპიუტერული თამაშები და რა დროს უთმობენ კვირაში თამაშს?

14. ოთომ და ნიკამ გადაწყვიტეს დაედგინათ თანატოლებს რა უფრო უყავრთ თეატრი თუ კინო? მათ გადაწყვიტეს 10 ქულიანი სისტემით შეეფასებინათ გამოკითხულთა მოწონების ხარისხი.

- თუ მოსწავლეს ძალიან უყვარს რომელიმე, უნდა დაუწეროს 9 ან 10.
- თუ საშუალოდ უნდა მიანიჭოს 5-8 ქულა.
- თუ არც ისე უყვარს, მაშინ 1-4 ქულა

	კინო	თეატრი
1-4		
5-8		
9-10		

დასკვნა: როგორი ტიპის მონაცემებს აგროვებენ ოთო და ნატა?

კიდევ სცადეთ

პ.ს. გამოკითხეთ კლასელები და დაწერეთ დასკვნა.

15. წლის ბოლოს სკოლაში ჩატარდა გამოცდა მათემატიკაში, რომელშიც მოსწავლეებმა მიიღეს შეფასებები A, B ან P.

A ნიშნავს, რომ მოსწავლეს ძალიან კარგად აქვს დაძლეული პროგრამა.

B ნიშნავს, რომ მოსწავლეს კარგად აქვს დაძლეული პროგრამა, იცის მთავარი საკითხები და კონცეფციები.

P ნიშნავს, რომ მოსწავლეს კიდევ სჭირდება დამატებითი მეცადინეობა და ცოდნის განმტკიცება.

გადაიტანეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილში და დაადგინეთ, მოსწავლეთა რამდენმა პროცენტმა მიიღო A, B ან P.

შედეგები გამოიყურება შემდეგნაირად:

A	B	B	P	A	A	A	B	A	P	P	A	A	A	B	B	A	A	A	B
B	B	B	A	A	P	P	A	A	P	B	B	B	A	B	B	A	B,	A	B
A	B	B	B	B	B	B	B	A	P,	P	A	A	A	A	B	A	A	B	A
P	B	B	P	P	P	A	B	B	B	P	P	P	A	B	B	B	A	A	B

1.3. მონაცემების წარმოდგენა

ჩვენ უკვე ვნახეთ როგორ ხდება მონაცემების წარმოდგენა წერტილოვანი დიაგრამით, გავეცნოთ მონაცემების წარმოდგენის სხვადასხვა ხერხს:

ალგებრის ნაწილში და წინა კლასებში ისწავლეთ

- სვეტოვანი დიაგრამა
- წრიული დიაგრამა
- პიქტოგრამა

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ მონაცემები არსებობს რაოდენობრივი და თვისებრივი.

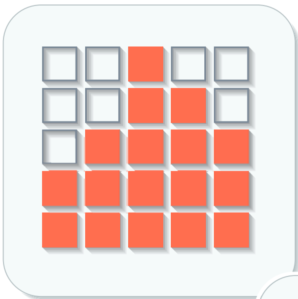
ხშირ შემთხვევებში, თვისებრივი მონაცემების წარმოსადგენად გამოიყენებენ სვეტოვან დიაგრამებს.

კვლევის ორგანიზებისას დგება კითხვარი, რომლის მეშვეობითაც გროვდება ინფორმაცია, ხოლო შემდეგ წარმოდგენილია ამ ინფორმაციის წარმოდგენა სხვადასხვა თვალსაჩინო ფორმით. სატელევიზიო საშუალებები, გაზეთები. ინტერნეტი ინფორმაციის წარმოსადგენად ხშირად იყენებენ გრაფიკებს, ცხრილებს, დიაგრამებს.

გავეცნოთ სხვადასხვა დიაგრამას, რომელსაც ხშირად ვხვდებით ყოველდღიურ ცხოვრებაში;

ფუნქციების შესწავლის დროს ჩვენ უკვე გავეცანით სხვადასხვა დიაგრამას და განვიხილეთ მათი აგების წესები; მოგვიანებით, ჩვენ დავაკავშირებთ ფუნქციებს სტატისტიკასთან. ამ ეტაპზე, გავიხსენოთ, როგორ ხდება ინფორმაციის წარმოდგენა;

- *როგორ და რა წესით გადააქვთ ანალიტიკოსებს ინფორმაცია ?*
- *როდის რა ტიპის დიაგრამების შერჩევა ხდება?*



დიაგრამები; წარმოვადგინოთ ინფორმაცია სხვადასხვა დიაგრამის გამოყენებით

სვეტოვანი დიაგრამა

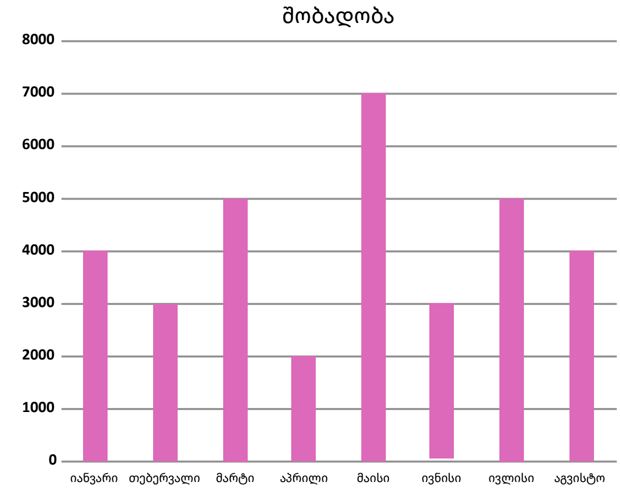
[ვიდეო ინსტრუქცია]

ცხრილით მოცემული ინფორმაცია გვაჩვენებს, თუ დაახლოებით რამდენი ახალშობილი დაიბადა თვეების მიხედვით (დავუშვათ 2020 წელს);

თვე	შობადობა
იანვარი	4000
თებერვალი	3000
მარტი	5000
აპრილი	2000
მაისი	7000
ივნისი	3000
ივლისი	5000
აგვისტო	4000

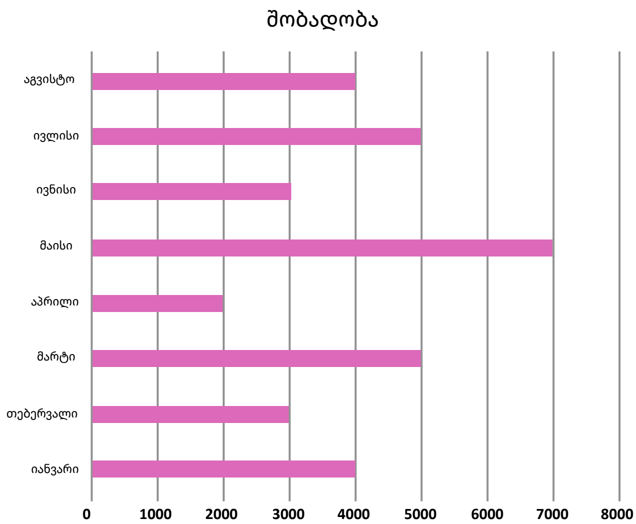
იმისათვის, რომ ინფორმაცია მეტად თვალსაჩინოდ იყოს მოწოდებული, ინფორმაცია წარმოვადგინოთ დიაგრამის მეშვეობით. კონკრეტულად, სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით

– **სვეტოვანი დიაგრამა** შესაძლებელია სვეტები აღმართული იყოს როგორც ვერტიკალურად, ასევე ჰორიზონტალურად;

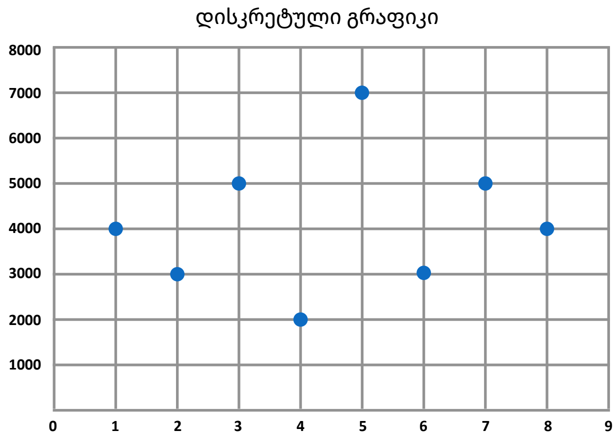


ორი სხვადასხვა ინფორმაციის დაჯგუფებით (თვე, შობადობა) და სიბრტყეზე გადატანით, მივიღეთ გრაფიკი. გრაფიკის ფორმას ეწოდება დიაგრამა (სვეტოვანი დიაგრამა)

ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავიტანოთ თვეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადავიტანოთ ახალშობილთა რაოდენობები. ჰორიზონტალურ ღერძზე აღმართული მართკუთხედების (სვეტების) სიმაღლეები გვაჩვენებს ახოლშობილთა რაოდენობებს. (ერთეულოვან მონაკვეთად აღებულია 1000);



(ასეთ შემთხვევაში ვერტიკალურ ღერძზე გადავზომავთ თვეებს. ხოლო ჰორიზონტალურზე ახალშობილთა რაოდენობებს). აღნიშნული სიტუაცია შეიძლება აღვწეროთ ასევე **დისკრეტული გრაფიკით.**



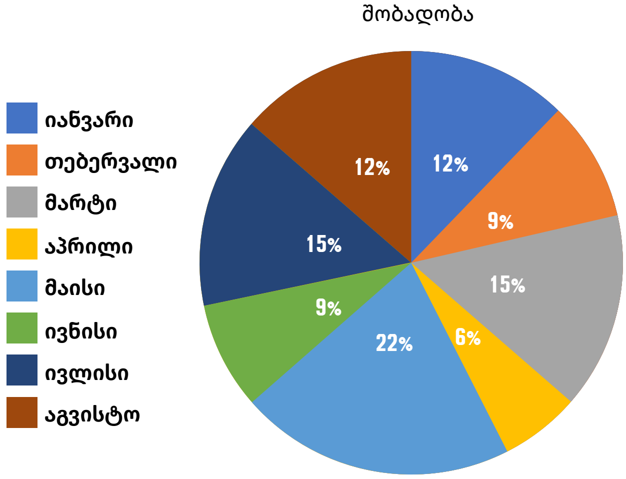
წრიული დიაგრამა

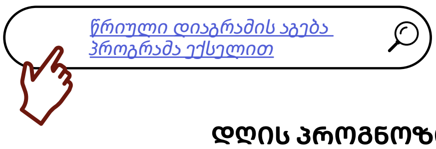
როგორც ხედავთ, ერთი და იგივე ინფორმაცია წარმოვადგინეთ 3 სხვადასხვა ფორმით;

გამომდინარე იქიდან, თუ როგორი ფორმით გვინდა ინფორმაციის

წარდგენა, ვირჩევთ ვიზუალიზაციას;

მაგალითად, აღნიშნულ მაგალითში წრიულ დიაგრამაზე ინფორმაცია მოცემულია პროცენტებით;

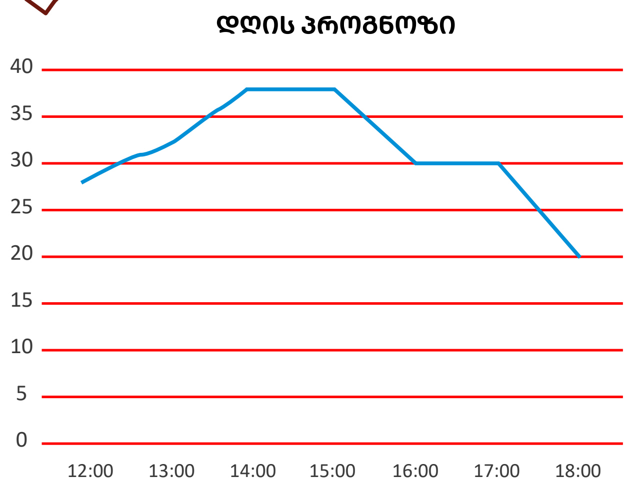




ხაზოვანი დიაგრამა

ჩვენ ვიცით, რომ რაოდენობრივი მონაცემები შეიძლება იყოს დისკრეტული ან უწყვეტი. გაზომვის შედეგად მიღებული მონაცემის (მანძილი, დრო, სიჩქარე და ა.შ.), წარმოდგენა მოსახერხებელია ხაზოვანი დიაგრამით.

მობილურის აპლიკაციით ჩვენ შეგვიძლია ამინდის ყოველდღიური ან ყოველკვირეული პროგნოზის შემოწმება, ასევე შეგვიძლია საათობრივი პროგნოზის ნახვა.



თუ ჩავთვლით, რომ ტემპერატურა თანაბრად იზრდებოდა, შეგვიძლია შევაერთოთ წერტილები სიბრტყეზე და ვივარაუდოთ, 12:00-დან 13:00 სთ-მდე შუალედში რა იქნებოდა ტემპერატურა ყოველი წუთისთვის.

განვიხილოთ დღის პროგნოზი;

სთ	ტემპ
12:00	28
13:00	32
14:00	38
15:00	38
16:00	30
17:00	30
18:00	20

გვაქვს ორი სხვადასხვა ტიპის ინფორმაცია, საათები და თითოეული საათისთვის შესაბამისი ტემპერატურა:

(სთ; ტემპერატურა)

პიქტოგრამა:

პიქტოგრამა (*pictus* – ლათინურად დახატულს ნიშნავს), ნახატით ან ნახატების მიმდევრობის საშუალებით აზრის გადმოცემის უძველესი ხერხია.

პიქტოგრამა არის მონაცემების ვიზუალიზაციის და დალაგების ისეთი ფორმა, როცა მონაცემი გამოსახულია ნახატით.

პიქტოგრამებს ჯერ კიდევ ქვის ხანაში იყენებდნენ უძველესი ადამიანები. პირველი პიქტოგრამა 30 000 წლის წინ გაჩნდა.

9000 წლის უკვე მსოფლიოში გავრცელდა, თუმცა აქტიური გამოყენება გავრცელებიდან 4000 წლის შემდეგ დაიწყეს.

თანამედროვეობაში, კომპიუტერის მომხმარებლები მას icon-საც ეძახიან.

პიქტოგრამებს თანამედროვეობაში ბევრი სხვადასხვა მიზნითა და დანიშნულებით გამოიყენებენ. მაგალითად, **იდეის მკაფიოდ და მოკლედ გადაცემისთვის, შეხსენებისთვის** და ა.შ.

მოიძიეთ ინფორმაცია პიქტოგრამებზე და გაუზიარეთ თანატოლებს.

პიქტოგრამას ადრეული ასაკიდან სწავლობენ სკოლის პერიოდში.

გრაფიკის მიხედვით, ჩვენ ვხედავთ, რომ დღის განმავლობაში ტემპერატურა იზრდებოდა 12:00-დან 14:00-მდე, 14:00 დან 15: 00-მდე ტემპერატურა იყო მუდმივი, 15:00 -დან დაიწყო კლება, 16:00-დან 17:00 სთ-მდე ისევ იყო მუდმივი, 17:00-დან კი დაიწყო კლება. შუადღისას დაფიქსირდა მაქსიმალური ტემპერატურა, დაახლოებით 38 გრადუსი.

უძველესი იეროგლიფები

ცეკვა	
სიმღერა	
ხატვა	

როდესაც მონაცემებს წარმოვადგენთ პიქტოგრამებით, ერთი პიქტოგრამა შეიძლება აღნიშნავდეს ერთს, ხუთს, ათს და სხვა. გამომდინარე იქიდან, თუ აღმწერი სიმარტივისათვის რამდენი მნიშვნელობის მინიჭებას მოინდომებს.

სავარჯიშოები

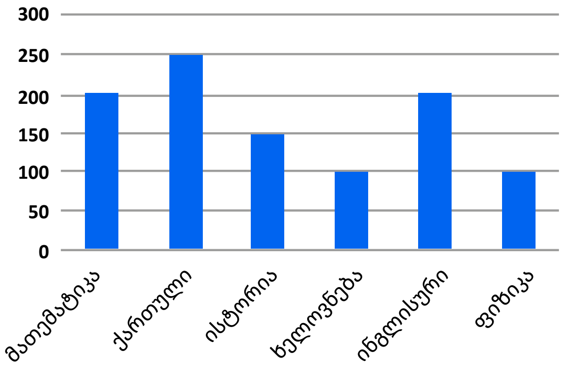
1. სტუდენტებმა გადაწყვიტეს გამოეკვლიათ, რომელი საგანი უფრო მეტად უყვართ სკოლის მოსწავლეებს მე-7 დან მე-12 კლასის ჩათვლით. ცხრილში მოცემულია გამოკითხვის შედეგები. (ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია საგნების ჩამონათვალი, ვერტიკალურზე იმ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებსაც ყველაზე მეტად უყვართ აღნიშნული საგანი).

დაამუშავეთ ცხრილით მოცემული ინფორმაცია:

ა) სულ რამდენი მოსწავლე გამოიკითხა?

ბ) რა არის თითოეული საგნის არჩევის ფარდობითი სიხშირე?

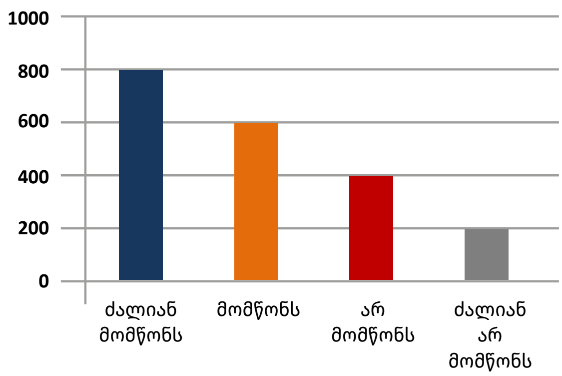
გ) გამოსახეთ პროცენტებში, გამოკითხულთა რაოდენობის რა პროცენტს უყვარს მათემატიკა ყველაზე მეტად?



2. ქალაქში ჩატარდა გამოკითხვა თემაზე: მოსწონდათ თუ არა რეკონსტრუქციის შედეგად შეცვლილი ქუჩის ახალი იერსახე?

გამოკითხვაში მონაწილეებს უნდა ეპასუხათ:

- ძალიან მომწონს
- მომწონს
- არ მომწონს
- ძალიან არ მომწონს



ა) რა ტიპს (მონაცემების კატეგორიას) მიეკუთვნება შეგროვებული მონაცემები?

ბ) რა არის დადებითი პასუხების საერთო პროცენტული მაჩვენებელი?

გ) რამდენი პროცენტით მეტია იმ ადამიანების რიცხვი, რომლითაც „ძალიან მოსწონს“ იმასთან შედარებით, რომელსაც „ძალიან არ მოსწონს“?

3. ცხრილში მოცემული სიხშირეების მიხედვით, ააგეთ სვეტოვანი, ასევე, წერტილოვანი დიაგრამები:

- იპოვეთ ფარდობითი სიხშირე;
- გამოსახეთ სიხშირე როგორც წილადის, ასევე პროცენტის მეშვეობით.

ა) ყველაზე ხშირად განმეორებადი მანქანის ფერი

ფერი	თეთრი	წითელი	ლურჯი	შავი	სხვა
სიხშირე	47	44	31	23	18
ფარდობითი სიხშირე					

კიდევ სცადეთ

სავარჯიშოები

ბ) აუდიტორიებში სტუდენტთა რაოდენობა

სტუდენტთა რაოდენობა	21	22	23	24	25	26	27
სიხშირე	1	4	7	9	15	8	2
ფარდობითი სიხშირე							

გ) სხვადასხვა პიცის გასაკეთებლად საჭირო დრო (დამრგვალებული წუთებში)

კიდევ სცადეთ

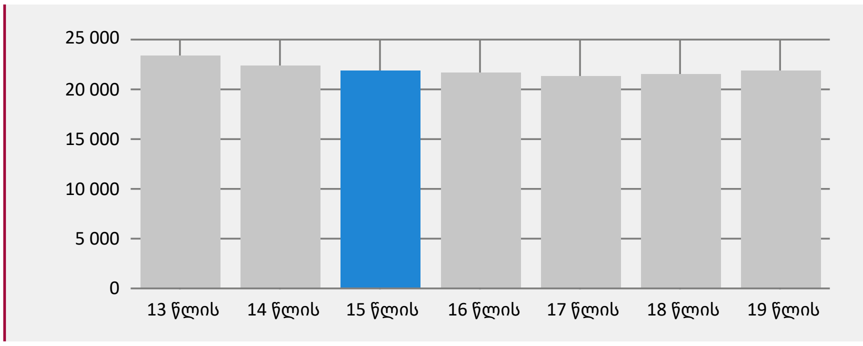
დრო	5	6	7	8	9	10	11
სიხშირე	1	2	3	7	10	8	5
ფარდობითი სიხშირე							

4. სვეტოვანი დიაგრამით მოცემულია რამდენი ბიჭი ცხოვრობს საქართველოში 13-წლიდან 19 წლამდე; დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

ა) 13-დან 19 წლამდე ბიჭების დაახლოებით რამდენ პროცენტს წარმოადგენს 14 წლის ბიჭები? 18 წლის ბიჭები?

ბ) წარმოადგინეთ აღნიშნული ინფორმაცია წრიული დიაგრამის მეშვეობით.

ინფორმაცია აღებულია ვებ-გვერდიდან



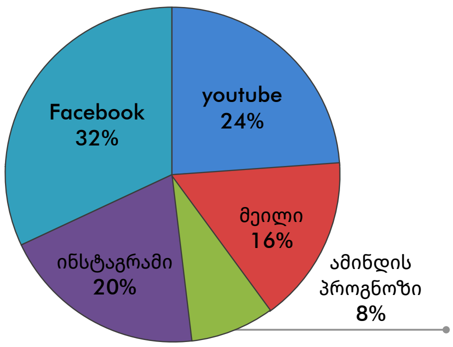
5. **წრიული დიაგრამა:**

წრიულ დიაგრამაზე მოცემულია მონაცემები მომხმარებლების მიერ მობილურის აპლიკაციების თუ ფუნქციების გამოყენების შესახებ.

ა) რომელი აპლიკაცია არის ყველაზე პოპულარული?

ბ) რა ტიპის მონაცემების შეგროვება და ანალიზი მოხდა?

გ) ჩაატარეთ გამოკითხვა კლასში: ჩამოთვლილთაგან, რომელი აპლიკაციით სარგებლობთ ყველაზე ხშირად და შეადარეთ მონაცემებს.



მინიშნება: Facebook – ფეისბუქი, სოციალური ქსელი, Youtube – პლატფორმა, სადაც განთავსებულია ვიდეო მასალა.

სავარჯიშოები

6. **ანალიტიკა**: მოცემულია სვეტოვანი დიაგრამები, რომელთა მეშვეობით შედარებულია ორი კომპანიის მონაცემები.

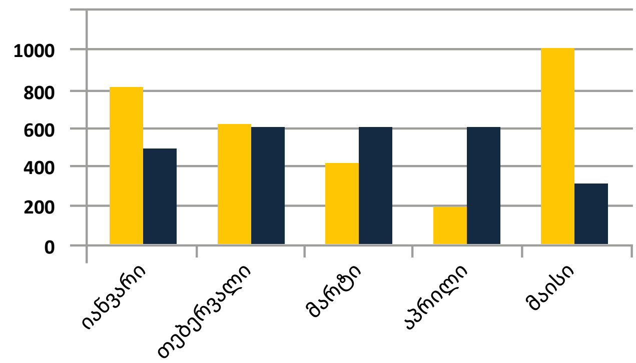
იმუშავეთ ჯგუფებში: ცხრილით მოცემულია კომპანია A-ს (ყვითელი ფერით) და კომპანია B-ს (შავი ფერით) გაყიდვების სტატისტიკა ერთ-ერთ ქალაქში თვეების მიხედვით.

ა) რომელ თვეს გაიყიდა ყველაზე მეტი კომპანია A-ს პროდუქცია?

ბ) სულ რამდენი კომპანია A-ს და B-ს პროდუქცია გაიყიდა მარტის თვეში?

გ) რამდენი პროცენტით მეტი გაიყიდა მარტის თვეში კომპანია A-ს პროდუქცია კომპანია B-სთან შედარებით?

დ) მაისის თვეში აპრილის თვესთან შედარებით, რამდენით მეტი კომპანია A-ს პროდუქცია გაიყიდა?



ე) იანვრის თვეში მაისის თვესთან შედარებით რამდენ პროცენტიანი კლება იყო ჯამურად გაყიდვებში?

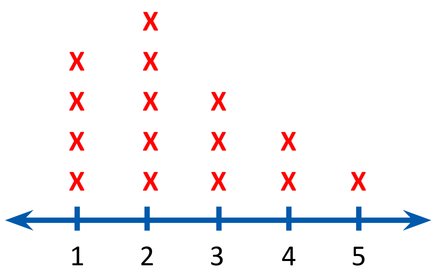
ვ) მოცემული ცხრილის მიხედვით, მოიფიქრეთ სამი კითხვა და უპასუხეთ.

■ ჯგუფური სამუშაო

7. ვენერამ გადაწყვიტა ვარჯიში, ის ყოველდღე ცურავდა აუზზე მინიმუმ 1 კმ-ს და მაქსიმუმ 5კმ-ს. წერტილოვან დიაგრამაზე მოცემულია ვენერამ რამდენჯერ რამდენი კმ გაცურა. გადაიტანეთ მოცემული ინფორმაცია ცხრილში.

კმ	სიხშირე	ფარდობითი სიხშირე
1		
2		
3		
4		
5		

კიდევ სცადეთ



8. გიორგიმ გადაწყვიტა გამოეკითხა სკოლის მოსწავლეები, თუ რა აქტივობით არიან დაკავებული. გამოკითხვის შედეგად მის მიერ მოგროვებული ინფორმაცია გამოიყურება შემდეგნაირად:

მოცემული ცხრილით დაადგინეთ, სულ რამდენი მოსწავლე იყო დაკავებული ხატვით, სიმღერით და ცეკვით, თუ ერთი პიქტოგრამა ნიშნავს 20-ს.

ცეკვა	
სიმღერა	
ხატვა	

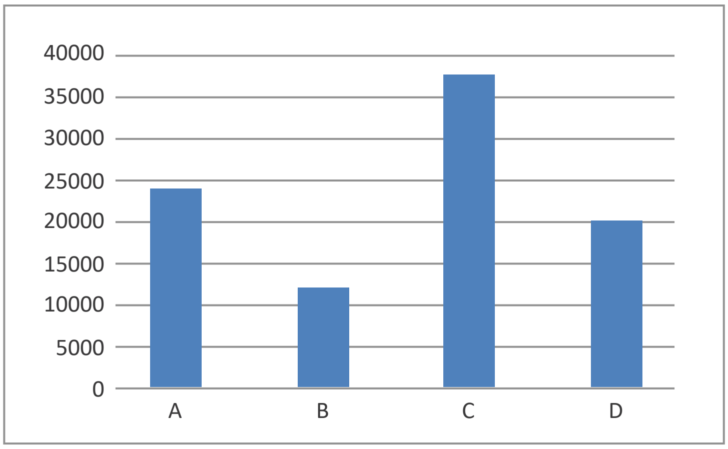
სავარჯიშოები

9. დიაგრამით წარმოდგენილია იმ სტუდენტთა რაოდენობა, რომლებიც ფლობენ ინგლისურ (A), გერმანულ (B), რუსულ (C) და ფრანგულ (D) ენებს.

ამ მონაცემების მიხედვით დაადგინეთ:

1) სტუდენტების რა ნაწილმა იცის ფრანგული ენა?

2) სტუდენტების რამდენმა პროცენტმა იცის გერმანული ენა?



გამეორება

10. კომპანიამ, რომელსაც კლიენტების ბაზაში 2700 მომხმარებელი ჰყავს, შემთხვევითი შერჩევის წესით გაუგზავნა მეილი 150 მომხმარებელს კითხვით: მოსწონთ თუ არა მათი მომსახურება?

ა) გამოკითხვის რა წესი გამოიყენა კომპანიამ?

ბ) როგორ ფიქრობთ, იქნება თუ არა მისი გამოკითხვა მიკერძოებული?

პასუხი დაასაბუთეთ.

11. სათამაშოების მწარმოებელმა მაღაზიამ მაღაზიაში შესული 250 ბავშვიდან 40 გოგონას ჰკითხა მოსწონდათ თუ არა მათი სათამაშოები. რამდენად ობიექტური დასკვნის გაკეთებას შეძლებს მაღაზია? როგორი წესით ჩატარდა გამოკითხვა?

1.4. ჰისტოგრამა, დაჯგუფებული მონაცემები

მონაცემების წარმოდგენისას ხშირად გამოიყენება როგორც სვეტოვანი დიაგრამა, ისე ჰისტოგრამა. ერთი მხრივ აღნიშნული დიაგრამები თითქოს ჰგავს ერთმანეთს, თუმცა არის განსხვავებები.

როგორც ვიცით, სვეტოვანი დიაგრამის შემთხვევაში ჰორიზონტალურ Ox ღერძზე გადაზომილია ცვლადები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე – სიხშირე;

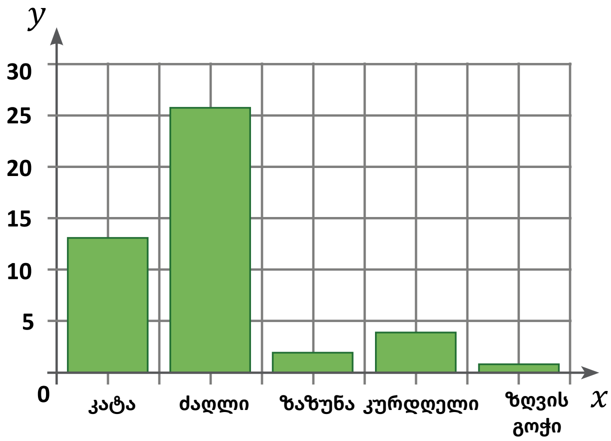
სვეტოვან დიაგრამაზე:

- როგორც ხედავთ, მართკუთხედებს აქვთ ერთი სიგანე
- მართკუთხედის სიმაღლე გვიჩვენებს სიხშირეს;
- მართკუთხედები არ ეხებიან ერთმანეთს.

ჰისტოგრამა გამოიყენება როგორც დისკრეტულ მონაცემების წარმოდგენისთვის, ასევე დაჯგუფებული მონაცემების წარმოდგენისთვის.

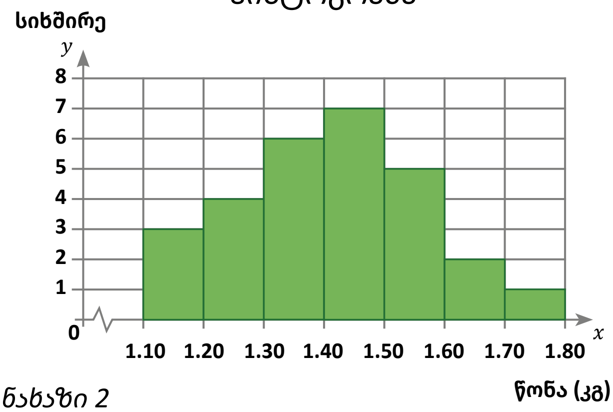
- ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავზომავთ ინტერვალებს
- ვერტიკალურ ღერძზე შესაბამის სიხშირეს
- ჰისტოგრამაში აგების დროს მართკუთხედებს შორის თავისუფალი ადგილი არ არის

სვეტოვანი დიაგრამა



ნახაზი 1

ჰისტოგრამა



ნახაზი 2

ნიმუში 1 – როგორ ავაგოთ ჰისტოგრამა?

წინა გვერდზე ნახ.2-ით მოცემულია მონაცემები, განვიხილოთ ამოცანა, რომელსაც შეესაბამება აღნიშნული ჰისტოგრამა.

დავუშვათ, მეთევზემ დაიჭირა თევზები, რომელთა წონებია 1.12; 1.41, 1.42, 1.32, 1.35, 1.44, 1.54, 1.14, 1.51, 1.36, 1.11, 1.61, 1.35, 1.59, 1.47, 1.24, 1.48, 1.72, 1.62, 1.38, 1.39, 1.27, 1.42, 1.44, 1.67, 1.29, 1.52, 1.55.

მოცემულ სიტუაციაში რთულია სვეტოვანი ან წერტილოვანი დიაგრამის აგება, იმიტომ, რომ თევზების წონა მცირედით განსხვავდება ერთმანეთისგან. ასეთ შემთხვევაში, ვაჯგუფებთ მონაცემებს ინტერვალებად, შემდეგნაირად:

ვიღებთ თანაბარ ინტერვალებს და ვადგენთ თითოეულ ინტერვალში მოთავსებული მონაცემების რაოდენობას, ანუ სიხშირეს.

დააკვირდით, როგორ არის ინტერვალები მოცემული;

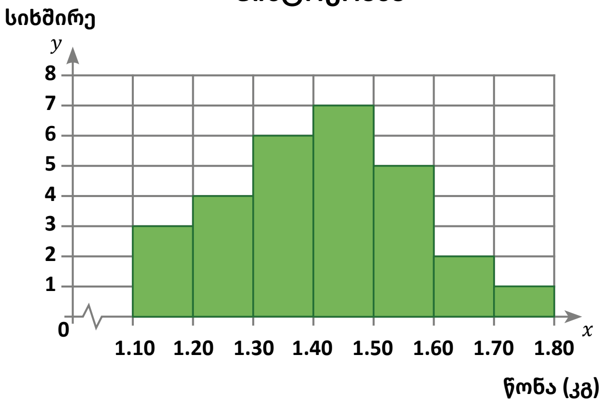
სიხშირის ცხრილის აგება

მონაცემები	სიხშირე
$1.1 \le x < 1.2$	3
$1.2 \le x < 1.3$	4
$1.3 \le x < 1.4$	6
$1.4 \le x < 1.5$	7
$1.5 \le x < 1.6$	5
$1.6 \le x < 1.7$	2
$1.7 \le x < 1.8$	1
სულ	28

ჰისტოგრამის აგება

ინტერვალებს გადავზომავთ ჰორიზონტალურ ღერძზე, ხოლო შესაბამის სიხშირეს ვერტიკალურ ღერძზე. მართკუთხედები იქნება გვერდიგვერდ, ისე, რომ მათ შორის არ იქნება თავისუფალი სივრცე;

ჰისტოგრამა



სავარჯიშოები

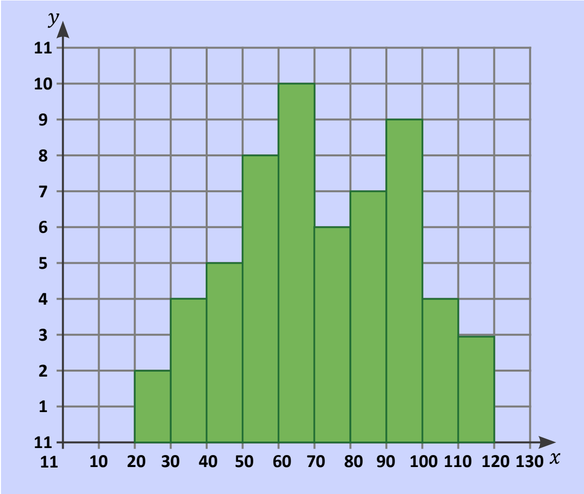
1. აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია

ა) მოცემულია ინფორმაცია მეთევზეზე და მის მიერ დაჭერილ თევზებზე;

ჰორიზონტალურ ღერძზე მოცემულია თევზის სიგრძე;

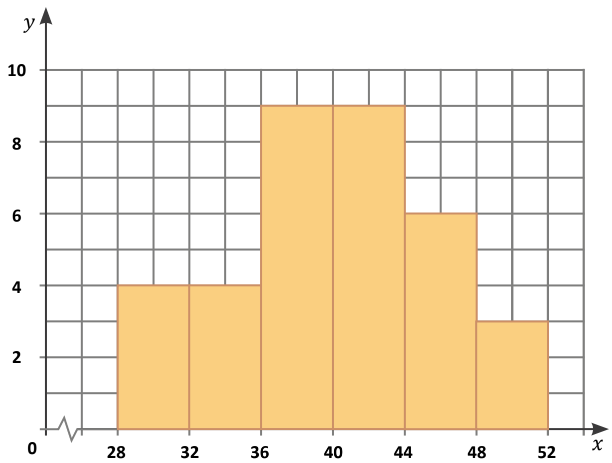
ვერტიკალურ ღერძზე კი თითოეული ინტერვალისთვის დაჭერილი თევზის რაოდენობა.

- აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია;
- სულ რამდენი თევზი დაიჭირა მეთევზემ?
- ყველაზე მეტი რა სიგრძის თევზი დაიჭირა?



ბ) ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია ეხება ერთ-ერთი სახეობის ჩიტების სიგრძეს.

- აღწერეთ ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაცია
- სულ რამდენი ჩიტის სიგრძე დაადგინეს?
- რა იყო ჩიტების მაქსიმალური სიგრძე? ყველაზე გრძელი რამდენი ჩიტი იყო?



2. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რომელიც დაკავშირებულია მამრობითი სქესის ფეხბურთის მოთამაშეების წონასთან.

ცხრილით მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე ააგეთ ჰისტოგრამა;

გაეცით პასუხი კითხვებს:

- რომელი ინტერვალიდან არის ყველაზე მეტი წონის ფეხბურთელი?
- სულ რამდენი ფეხბურთელია ისეთი, რომელთა წონაც არ აღემატება 85 კგ-ს?
- რამდენი მოთამაშის წონაა 90 კგ-ზე მეტი ან ტოლი?

წონა	**სიხშირე**
$70 \le x < 75$	2
$75 \le x < 80$	3
$80 \le x < 85$	6
$85 \le x < 90$	8
$90 \le x < 95$	5
$95 \le x < 100$	2
სულ	

სავარჯიშოები

3. ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, რომელიც დაკავშირებულია გამოცდების შედეგებთან:

ცხრილით მოცემული მონაცემებიდან გამომდინარე ააგეთ ჰისტოგრამა;

გაეცით პასუხი კითხვებს:

- რომელი ინტერვალის ქულის შედეგებია ყველაზე მეტი? ყველაზე ნაკლები?
- სულ რამდენი სტუდენტის ქულა აღემატება 70-ს?
- რამდენმა სტუდენტმა მიიღო 80 და მეტი ქულა?
- როგორ არის შესაძლებელი მონაცემთა საშუალოს პოვნა?

მითითება: იმისათვის, რომ იპოვოთ საშუალო, ყოველი ინტერვალიდან აიღეთ შუა მონაცემი, მაგალითად 25. დაუშვით, რომ აღნიშნული მონაცემის სიხშირეა აღებული სიდიდე და იპოვეთ მიახლოებითი საშუალო.

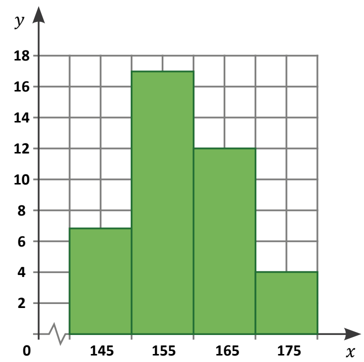
ქულა	სიხშირე
$20 \le x < 30$	6
$30 \le x < 40$	8
$40 \le x < 50$	14
$50 \le x < 60$	16
$60 \le x < 70$	20
$70 \le x < 80$	26
$80 \le x < 90$	12
$90 \le x < 100$	10
სულ	

4. ჩაატარეთ გამოკითხვა, ჰკითხეთ 14-17 წლის ახალგაზრდებს რა არის მათი სიმაღლე. წარმოადგინეთ ინფორმაცია სვეტოვანი დიაგრამის ან ჰისტოგრამის მეშვეობით.

5. ჰისტოგრამით მოცემულია ინფორმაცია, თუ რა თანხა ეხარჯება ოჯახს კვირის განმავლობაში საკვები პროდუქტების შესაძენად;

ჰისტოგრამით მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე:

- რამდენი ოჯახი ხარჯავს 155 ლარს კვირაში?
- რამდენი ოჯახი ხარჯავს 165 ლარს კვირაში?
- რა არის განსხვავება უდიდეს და უმცირეს მონაცემს შორის?



სავარჯიშოები

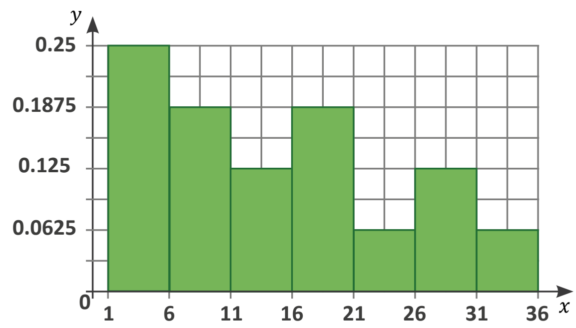
6. ქვემოთ მოცემულია 50 სირაქლემას წონა. მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე ააგეთ ჰის-ტოგრამა.

33	19	24	35	36	24	29	29	29	34
38	35	35	35	36	60	35	50	34	48
41	41	51	42	35	36	32	61	30	40
41	19	33	34	17	35	35	38	35	42
20	29	50	33	37	28	49	58	45	40

7. ქვემოთ მოცემული ინფორმაცია გვიჩვენებს საქველმოქმედო ღონისძიებაზე გაყიდული ნივთე-ბის რაოდენობას, ფასთან მიმართებით. სულ აუქციონზე გატანილი იყო 36 ნივთი.

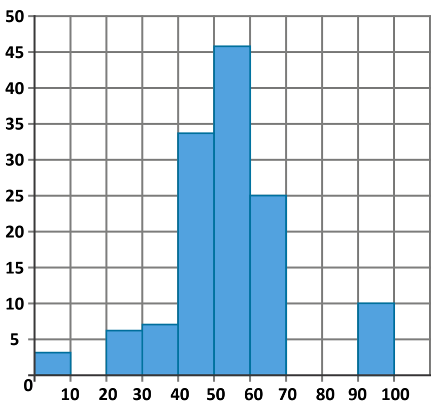
ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია ფასი, ხოლო ვერტიკალურზე **ფარდო-ბითი სიხშირე.**

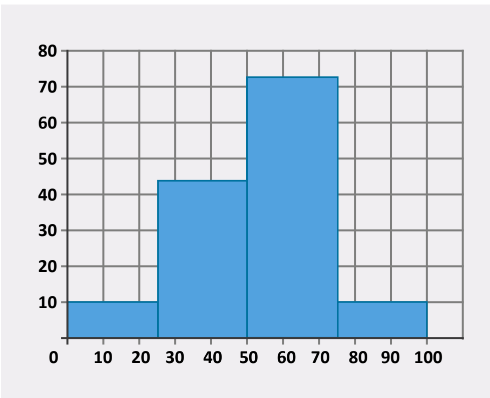
- **11-16 ლარის ღირებულების რამდენი ნივთი გაიყიდა?**
- **1-6 ლარის ღირებულების რამდენი ნივთი გაიყიდა?**



8. ქვემოთ მოცემულია ორი ჰისტოგრამა. ორივე დიაგრამაზე ჰორიზონტალურ ღერძზე ნაჩვენებია წონა, ხოლო ვერტიკალურზე – სიხშირე;

- რა შეგიძლიათ თქვათ აღნიშნული ჰისტოგრამებიდან გამომდინარე?
- რა შეგიძლიათ თქვათ ინტერვალებზე?
- შეადარეთ ერთმანეთს ჰისტოგრამებით მოცემული ინფორმაცია.





1.5. დაჯგუფებული დისკრეტული მონაცემები

ადგილობრივი საბავშვო ბაღი შეწუხებულია გამვლელი ავტომობილების რაოდენობით დილის 8:45-სა და 9:00-ს შორის. ისინი 30 დღის განმავლობაში ყოველდღე იწერდნენ მონაცემებს:

27, 30, 17, 13, 46, 23, 40, 28, 38, 24, 23, 22, 18, 29, 16, 35, 24, 18, 24, 44, 32, 52, 31, 39, 32, 9, 41, 38, 24, 32.

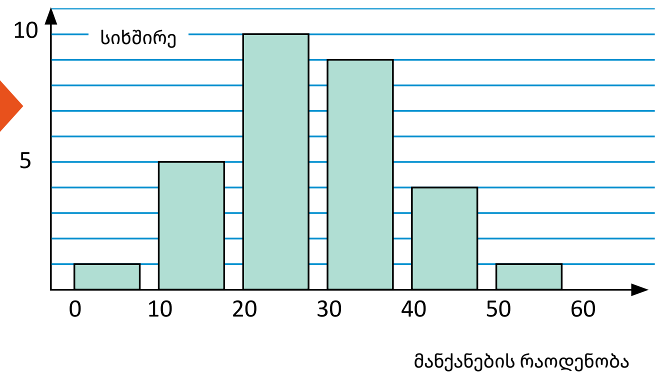
მსგავს სიტუაციებში მონაცემები ღებულობს უამრავ სხვადასხვა მნიშვნელობებს ძალიან მცირე სიხშირეებით. ეს მონაცემების განაწილების შესწავლას ართულებს. ასეთ შემთხვევაში უპრიანია, დავაჯგუფოთ მონაცემები კლასის ინტერვალებად და შემდეგ შევადაროთ კლასების სიხშირეები. მოცემული მონაცემებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ კლასის ინტერვალებს სიგანით 10.

მოცემულია სიხშირეთა განაწილების ცხრილი დაჯგუფებული მონაცემებისთვის.

მანქანების რაოდენობა	თვლის შედეგები	სიხშირე
0-დან 9-მდე	|	1
10-დან 19-მდე	~~||||~~	5
20-დან 29-მდე	~~||||~~ ~~||||~~	10
30-დან 39-მდე	~~||||~~ ||||	9
40-დან 49-მდე	||||	4
50-დან 59-მდე	|	1
	სულ	**30**

მოდალური კლასი ან უდიდესი სიხშირის მქონე კლასი არის 20-დან 29-მდე.

ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ასევე სვეტოვანი (გრაფიკი) დიაგრამა დაჯგუფებული დისკრეტული მონაცემებისთვის ისევე, როგორც მარტივ შემთხვევაში.



სავარჯიშოები

1. არტური ყოველდღე მგზავრობს მატარებლით სკოლიდან გარეუბნის სადგურამდე. ის 30 დღის განმავლობაში ითვლის სადგურზე მატარებლის მომლოდინე ადამიანების რაოდენობას, როდესაც მატარებელი შემოდის.

17	25	32	19	45	30	22	15	38	8
21	29	37	25	42	35	19	31	26	7
22	11	27	44	24	22	32	18	40	29

(ა) ააგეთ დაჯგუფებულ სიხშირეთა ცხრილი მოცემული მონაცემებისათვის, სადაც კლას-ინტერვალებია: 0-9, 10-19,..., 40-49.

(ბ) რამდენ დღეს იყო სადგურში 10-ზე ნაკლები ადამიანი?

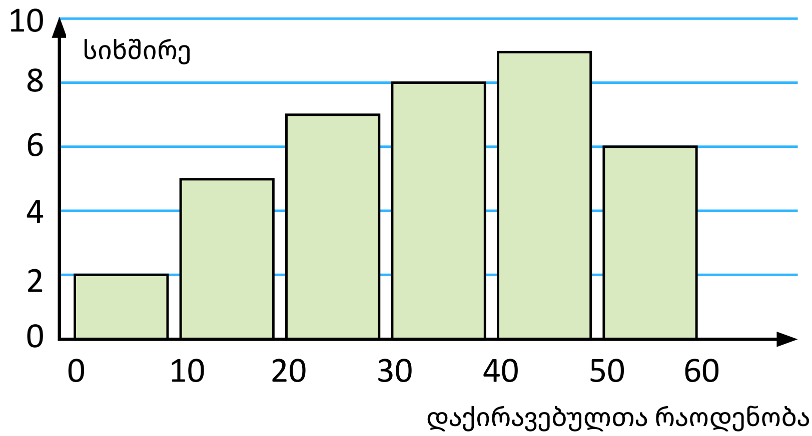
(გ) დღეების რამდენ პროცენტზე იყო სულ მცირე 30 ადამიანი სადგურში?

(დ) ააგეთ სვეტოვანი გრაფიკი მონაცემების წარმოსადგენად.

(ე) იპოვეთ მონაცემების მოდალური კლასი.

2. გამოკითხეს კომპანიები, თუ რამდენი თანამშრომელი ჰყავდათ მათ დაქირავებული. გამოკითხვის შედეგები წარმოდგენილია ქვემოთ სვეტოვან დიაგრამაზე.

თანამშრომელთა რაოდენობა



(ა) რამდენი კომპანია იყო გამოკითხული?

(ბ) იპოვეთ მოდალური კლასი.

(გ) აღწერეთ (დაახასიათეთ) როგორაა მონაცემები განაწილებული.

(დ) კომპანიების რამდენ პროცენტს ჰყავს დასაქმებული 30-ზე ნაკლები ადამიანი?

(ე) შეგიძლიათ განსაზღვროთ კომპანიების მიერ დასაქმებული თანამშრომლების მაქსიმალური რაოდენობა?

სავარჯიშოები

3. ქალაქის მერიას აინტერესებს გარეუბნის თითოეულ ქუჩაზე სახლების რიცხვი, რათა განსაზღვროს ნაგვის ურნების საჭირო რაოდენობა. მათ მიერ შეგროვილი მონაცემებია:

42	15	20	6	34	19	8	5	11	38	56	23	24	24
35	47	22	36	39	18	14	44	25	6	34	35	28	12
27	32	36	34	30	40	32	12	17	6	37	32		

(ა) ააგეთ დაჯგუფებულ სიხშირეთა ცხრილი მოცემული მონაცემებისთვის, სადაც კლას-ინტერვალებია: 0-9, 10-19,..., 50-59.

(ბ) ააგეთ სვეტოვანი დიაგრამა მოცემული მონაცემებისთვის.

(გ) იპოვეთ მოდალური კლასი.

(დ) ქუჩების რამდენი პროცენტზეა სულ მცირე 20 სახლი?

1.6. მედიანა, მოდა, საშუალო, გაბნევის დიაპაზონი

წინა თემებში ჩვენ უკვე ვისწავლეთ, როგორ შეიძლება გამოკითხვის ორგანიზება, კვლევის დაგეგმვა, მონაცემების წარმოდგენა.

მონაცემების შეგროვების შემდეგ აუცილებელია მონაცემების დამუშავება.

ამოცანების ამოხსნისას შევნიშნეთ, რომ არსებობს მონაცემები, რომლებიც ხშირად მეორდება. ვიპოვეთ მონაცემების სიხშირე, ფარდობითი სიხშირე. არსებობს მონაცემების დამუშავების წესი, რომლის მეშვეობითაც პოულობენ მონაცემების:

- საშუალოს
- მედიანას
- მოდას

საშუალოს (საშუალო არითმეტიკულს), მედიანასა და მოდას ცენტრალური ტენდენციის საზომი ეწოდებათ.

ტელესკოლა

მაგალითი სპორტიდან: ნიმუში როგორ ვიპოვოთ მედიანა, მოდა , საშუალო

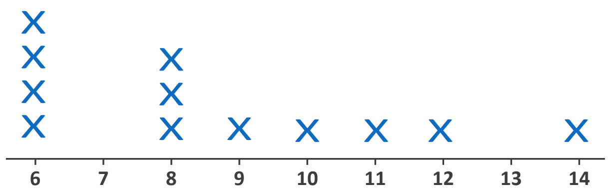
ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, ლიონელ მესის მიერ 12 წლის განმავლობაში წელიწადში გატანილი გოლების რაოდენობის შესახებ ჩემპიონთა ლიგის თამაშის დროს.

წელი	2018	2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007
გოლი	6	6	11	6	10	8	8	14	12	8	9	6

დავამუშაოთ ინფორმაცია, ვიპოვოთ მედიანა, მოდა და საშუალო.

მონაცემების დამუშავებამდე, იმისათვის, რომ შეცდომისაგან თავი დავიზღვიოთ, ჩავწეროთ მონაცემები ორგანიზებულად, გადავიტანოთ მონაკვეთზე ან სიხშირის გამომსახველ ცხრილში.

დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით:



6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14

მონაცემების მოდა

- მონაცემების **მოდა** არის რიცხვი, რომელიც ყველაზე ხშირად მეორდება მონაცემებში.

ზემოთ მოყვანილ ნიმუშში, მონაცემებში რიცხვი 6 გამეორდა 4-ჯერ, ე.ი. მონაცემების მოდა არის 6.

შენიშვნა: მონაცემებს შეიძლება ჰქონდეს ორი ან მეტი მოდა, მაგ.:

2	5	5	5	5	7	8	8	8	8	12	14	14	14	14	18	100

მონაცემების მოდა 5; 8; 14 თითო მონაცემი მეორდება 4-4 ჯერ

მონაცემების საშუალო

მონაცემების საშუალო არის, მონაცემების ჯამის შეფარდება მათსავე რაოდენობასთან. (საშუალო, იგივე საშუალო არითმეტიკული გამოისახება სიმბოლოთი $\overline{x}$).

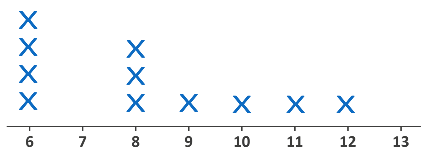
საშუალო $\overline{x} = \dfrac{6+6+6+6+8+8+8+9+10+11+12+14}{12} = \dfrac{104}{12} = 8\dfrac{2}{3}$

აღნიშნულ მაგალითში გვაქვს 12 წლის განმავლობაში თითოეულ წელს გატანილი გოლების რაოდენობა.

ვხედავთ 6 გოლი განმეორდა 4-ჯერ, 8-3 ჯერ და ა.შ.

საშუალო

$\dfrac{6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 9 + 10 + 11 + 12 + 14}{12} = \dfrac{104}{12} = 8\dfrac{2}{3}$



საშუალოს გამოთვლა გამარტივდება თუ მონაცემები გვექნება ორგანიზებული სიხშირის ცხრილის ან წერტილოვანი დიაგრამის მეშვეობით:

გამომდინარე იქიდან, რომ გოლების რაოდენობა ნატურალური რიცხვით აღიწერება, ჩვენ შეგვიძლია დავამრგვალოთ ერთეულამდე და ვთქვათ, რომ მესი საშუალოდ, ჩემპიონთა ლიგაზე წლიურად იტანს 9 გოლს.

მონაცემების მედიანა

- მონაცემების **მედიანა** არის ზრდის (ან კლების) მიხედვით დალაგებულ მონაცემებში შუა ელემენტი (მონაცემი), თუ გვაქვს მონაცემთა კენტი რაოდენობა, ხოლო იმ შემთხვევაში თუ გვაქვს მონაცემების ლუწი რაოდენობა, მაშინ შუა ორი ელემენტის საშუალო არითმეტიკული.

6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14
6	6	6	6	8	8	8	9	10	11	12	14

ლუწი რაოდენობის მონაცემის შემთხვევაში მედიანა შუა ორი წევრის ჯამის ნახევარია: $\dfrac{8+8}{2} = 8$

მითითება: როდესაც გვაქვს კენტი რაოდენობის მონაცემი, მაშინ მედიანა შუა წევრია:

მაგ., 2 3 5 8 9 მედიანა = 5

მონაცემების დიაპაზონი (გაბნევის დიაპაზონი)

- მონაცემების დიაპაზონი – **გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება მონაცემების მაქსიმუმის და მინიმუმის სხვაობას.

მაგალითის შემთხვევაში დიაპაზონია: 14 – 6 = 8.

!! ყურადღება მიაქციეთ:

საშუალომ შეიძლება არაობიექტური სურათი მოგვცეს ერთი წესრიგიდან ამოვარდნილი მინიმალური ან მაქსიმალური მონაცემის გამო. აღნიშნულ მაგალითში 100 ძალიან არის დაშორებული და გაცილებით მეტია ძირითად და უმეტეს მონაცემებზე, ამიტომ 100-მა შეიძლება რადიკალურად შეცვალოს საშუალო. კვლევებისთვის მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ: **მედიანა, მოდა, საშუალო და გაბნევის დიაპაზონი.**

მედიანას, მოდას და საშუალოს ცენტრალური ტენდენციის საზომი ერთეულები ეწოდებათ.

ნიმუში 1

კომპანიაში დასაქმებულია 12 თანამშრომელი, ქვემოთ მოცემულია მათი ხელფასები; იპოვეთ საშუალო, მოდა და მედიანა .

ხელფასებია: 1200, 1200, 1200, 1200, 1200, 1500, 1500,1800, 1800, 2000, 2400, 15 000

მოდა:

როგორც ვხედავთ, ყველაზე ხშირად გამეორებადი მონაცემია 1200; გამოდის, რომ მოდა არის 1200

მედიანა:

მონაცემები დალაგებულია ზრდადობით, სულ არის 12 მონაცემი, გამომდინარე აქედან, მედიანა იქნება მეექვსე და მეშვიდე მონაცემის საშუალო:

$$\frac{1500 + 1500}{2} = 1500$$

დიაპაზონი:

მინიმალური მონაცემი – 1200
მაქსიმალური მონაცემი – 15 000
დიაპაზონი = 15000 – 1200 = 13 800

საშუალო არითმეტიკული:

საშუალო არითმეტიკული ნიშნავს — მონაცემების ჯამი გაყოფილი მათ რაოდენობაზე; ხშირად, მოსახერხებელია ცხრილში ჩაწერა და ისე დათვლა ჯამის.

მონაცემები სიხშირის ცხრილში:

მონაცემი	სიხშირე	ჯამური მნიშვ.
1200	5	6000
1500	2	3000
1800	2	3600
2000	1	2000
2400	1	2400
15 000	1	15 000
სულ		32 000

$$\text{საშუალო} = \frac{32\,000}{12} \approx 2667$$

როგორც ხედავთ, საშუალო არ ასახავს ობიექტურ სურათს, იმიტომ, რომ ერთ-ერთი თანამშრომლის ხელფასი არის **მონაცემებიდან ამოვარდნილი;**

დიაპაზონიც მონაცემებს შორის არის დიდი;

სავარჯიშოები

1. წარმოადგინეთ მონაცემები სიხშირის ცხრილის მეშვეობით და იპოვეთ მოცემული მონაცემების: მედიანა, მოდა, საშუალო და დიაპაზონი.

გააანალიზეთ სიტუაცია:

ა) 4 ; 1; 2; 1; 4; 5; 6; 1; 3; 5; 6; 4; 4; 1; 3;

ბ) 2 ; 1; 1; 1; 4; 2; 5; 8; 1; 1; 2; 8; 100; 5; 10;

გ) 150 ; 120; 120; 100; 180; 80; 200; 10; 200; 100.

2. მოცემული ცხრილები ასახავს ორი კალათბურთის ტურნირის დროს ორი კალათბურთელის მიერ დაგროვებულ ქულათა რაოდენობას 5 თამაშის განმავლობაში.

მოცემული ცხრილის მიხედვით იპოვეთ:

ა) პირველი კალათბურთელის მონაცემების: მედიანა, მოდა და საშუალო.

ბ) მეორე კალათბურთელის მონაცემების: მედიანა, მოდა და საშუალო.

გ) შეადარეთ კალათბურთელების მონაცემები.

როგორ და როდის შეიძლება გამოიყენოს მწვრთნელმა აღნიშნული მონაცემები?

კალათბურთელი N 1

თამაში	1	2	3	4	5
ქულა	19	14	14	11	17

კალათბურთელი N 2

თამაში	1	2	3	4	5
ქულა	22	11	8	8	16

3. იპოვეთ შემდეგი მონაცემების ცენტრალური ტენდენციის საზომი ერთეულები: მედიანა, მოდა და საშუალო, ასევე გაბნევის დიაპაზონი.

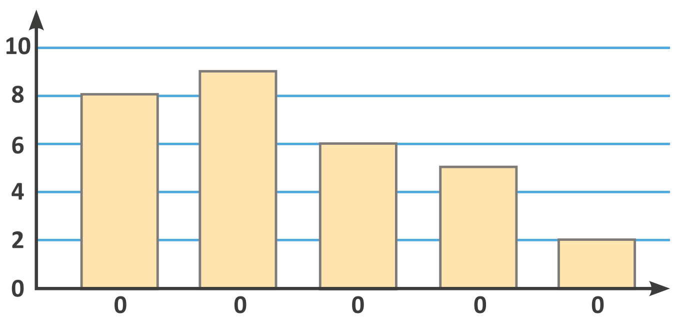
ა) 4 ,1,7,5,3,8,200;   ბ) 7,1 ,2,5,0,2,0,1;   გ) 2,6,3,8,3,5,10,2;   დ) 7 ,2,4,5,1,0,6,10.

4. სამმა მეგობარმა გადაწყვიტა საახალწლოდ მოხუცთა თავშესაფარში მიეტანათ ტკბილეული და იყიდეს სხვადასხვა კანფეტი. კანფეტების წონის საშუალო არის 30 კგ, რამდენი კილოგრამი იყიდა პირველმა მეგობარმა, თუ მეორემ იყიდა 40 კგ და მესამემ 15 კგ?

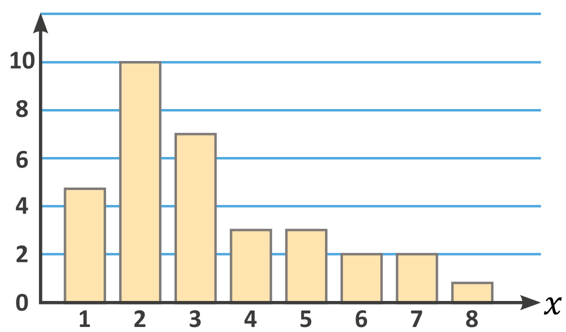
5. დიაგრამით მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ მონაცემების მედიანა, მოდა, საშუალო და დაიპაზონი.

რეკომენდაცია: შეგიძლიათ ინფორმაცია ჯერ დაორგანიზოთ ცხრილში

ა)

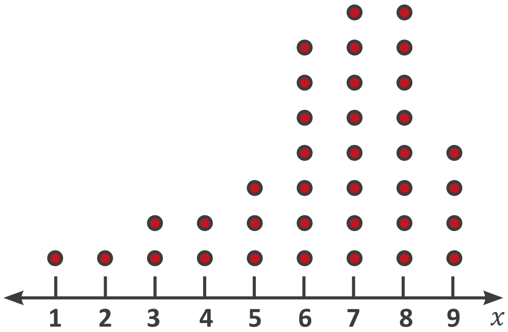


ბ)

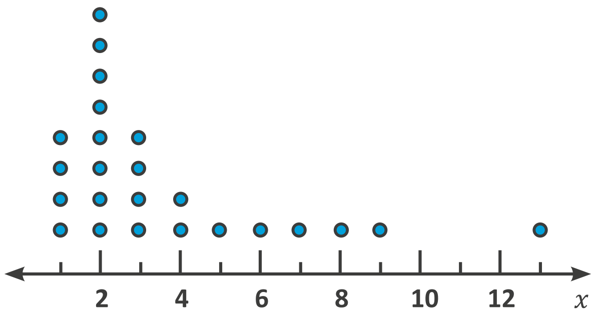


სავარჯიშოები

გ)



დ)



6. ცხრილში მოცემულია ბაკურიანში იანვრის თვის ტემპერატურა. მოცემულ ინფორმაციაზე დაყრდნობით, იპოვეთ საშუალო ტემპერატურა, ასევე ტემპერატურის მედიანა და მოდა.

თარიღი	1.02	2.02	3.02	4.02	5.02	6.02	7.02	8.02	9.02	10.02
°C	2°C	4°C	–1°C	–3°C	0°C	5°C	8°C	2°C	–4°C	–3°C

7. ყოველწლიურად ამერიკის შეერთებულ შტატებში სხვადასხვა ქვეყნიდან საცხოვრებლად ბევრი ადამიანი ჩადის. ერთ-ერთი წლის მონაცემები რამდენიმე ასეთი ქვეყნის შესახებ ცხრილითაა მოცემული.

ინდოეთი	ჩინეთი	რუსეთი	მექსიკა	ფილიპინები	კუბა
45800	43800	22700	160500	58900	28500

1. იპოვეთ ამ მონაცემების საშუალო;
2. მონაცემები წარმოადგინეთ პოლიგონის სახით;
3. აშშ-ში ამ წელს ჩასული მოსახლეობის რამდენი პროცენტია აზიის კონტინენტიდან?
4. რამდენი პროცენტით მეტი ჩავიდა აშშ-ში ამ წელს ამერიკის კონტინენტიდან აზიის ქვეყნებთან მიმართებაში?

8. მოცემულია 6 მთელი რიცხვი. უმცირესი რიცხვი არის 8, უდიდესი — 14. ამ რიცხვების მედიანა, მოდა და საშუალო არის 11-ის ტოლი. რას უდრის დანარჩენი ოთხი რიცხვი? იპოვეთ ერთი სავარაუდო პასუხი.

9. მოცემულია 7 მთელი რიცხვი, რომელთაგან უმცირესი 10-ის ტოლია, უდიდესი – 20-ის. იპოვეთ დანარჩენი ხუთი რიცხვი თუ ვიცით, რომ მედიანა არის 16, მოდა – 12 და საშუალო 15-ის ტოლი.

10. ექვსი რიცხვის საშუალო 8-ის ტოლია, სხვა ექვსი რიცხვის საშუალო კი – 20-ის. რის ტოლი იქნება მოცემული 12 რიცხვის საშუალო?

11. მაკომ პირველ სამ ტესტში 100 დან 89 ქულა მიიღო, მეოთხე ტესტში 100-დან – 92 ქულა. რა ქულა უნდა მიიღოს მაკომ მეხუთე ტესტში, რომ საშუალო ქულა გამოუვიდეს 90?

12. ოთომ მათემატიკის ოთხ ტესტში ზედიზედ აიღო 100-დან 95 ქულა, შემდეგ ავადმყოფობის გამო გააცდინა მეოთხე ტესტი და მიიღო 0 ქულა, ამის შემდეგ მას დასაწერი აქვს კიდევ ორი ტესტი. მინიმუმ რა ქულა უნდა მიიღოს ოთომ მომდევნო ორ ტესტში, რომ საშუალო ქულა გამოუვიდეს 85?

1.7. უწყვეტი ტიპის მონაცემები

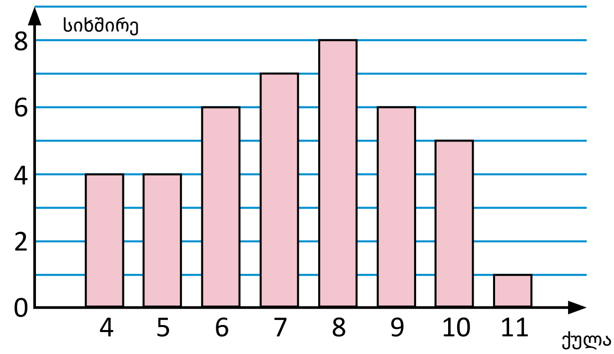
როდესაც ჩვენ ვზომავთ მონაცემებს, რომლებიც უწყვეტია, ჩვენ არ შეგვიძლია დავწეროთ ზუსტი მნიშნელობა. ამის ნაცვლად ჩვენ ვწერთ მიახლოებულ მონაცემებს, რომელიც იმავე სიზუსტისაა, რაც გამზომი ხელსაწყო.

ვინაიდან არც ერთი ორი მონაცემი არ იქნება ზუსტად იგივე, აზრს მოკლებულია ვისაუბროთ კონკრეტული მონაცემების სიხშირეზე. ნაცვლად ჩვენ ვაჯგუფებთ მონაცემებს ერთი და იგივე სიგანის კლასის ინტერვალებში. შემდეგ შეგვიძლია ვისაუბროთ თითოეულ კლას-ინტერვალი-ს სიხშირეზე.

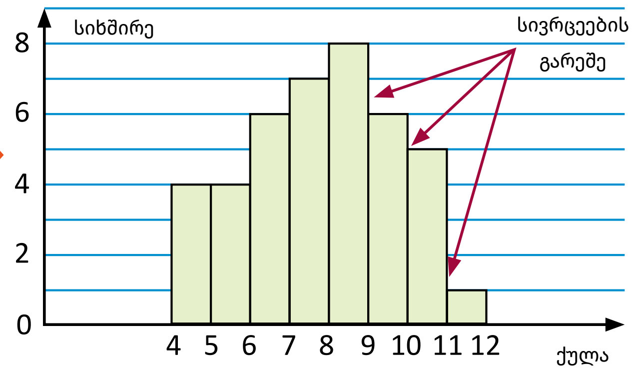
უწყვეტი ტიპის მონაცემების წარმოსადგენად განიხილავენ სპეციალური ტიპის გრაფიკს და უწოდებენ სიხშირულ ჰისტოგრამას, ან უბრალოდ ჰისტოგრამას. ის არის სვეტოვანი დიაგრამის მსგავსი, მაგრამ „სვეტები“ შეერთებულია ერთმანეთთან და თითოეული სვეტის ფუძის მნიშვნელობები მიუთითებს კლას-ინტერვალების საზღვრებს.

მოდალური კლასი ანუ იმ მნიშვნელობების კლასი, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება არის ადვილი დასადგენი ჰისტოგრამიდან.

სვეტოვანი დიაგრამა



ჰისტოგრამა



გაგრძელება

განვიხილოთ მაგალითი.

აუზში, რომელშიც ასეულობით პატარა ლობსტერია, შემთხვევით შეარჩიეს 20 ლობსტერი. თითოეული სიგრძე გაზომეს და შედეგები წარმოდგენილია ცხრილში:

4.9	5.6	7.2	6.7	3.1	4.6	6.0	5.0	3.7	7.3
6.0	5.4	4.2	6.6	4.7	5.8	4.4	3.6	4.2	5.4

(ა) წარმოადგინეთ მონაცემები სიხშირული ცხრილის სახით და შემდეგ ააგეთ გრაფიკი.

(ბ) დაადგინეთ მოდალური კლასი და ახსენით მისი მნიშვნელობა.

(გ) აღწერეთ როგორია ამ მონაცემების განაწილება.

ამოხსნა:

(ა) ცვლადი – ლობსტერის სიგრძე არის უწყვეტი ტიპის, მიუხედავად იმისა, რომ სიგრძე შეიძლება დამრგვალდეს მილიმეტ-რამდე. უმცირესი სიგრძეა 3.1 სმ და უდიდე-სი კი 7.3 სმ, ასე რომ ჩვენ გამოვიყენებთ კლას-ინტერვალებს 1 სმ სიგანით.

სიგრძე (l სმ)	სიხშირე
$3 \le l < 4$	3
$4 \le l < 5$	6
$5 \le l < 6$	5
$6 \le l < 7$	4
$7 \le l < 8$	2

(ბ) მოდალური კლასია $4 \le l < 5$ ვინაიდან ის ყველაზე ხშირია. ლობსტერების უმეტესო-ბას აქვს სიგრძე ამ საზღვრებში.

(გ) განაწილება არის დადებითად ასიმეტ-რიული.

სავარჯიშოები

1. გვერდით მოცემულია ფრენბურთელთა ნაკრების წევრების სიმაღლეების სიხშირული ცხრილი.

სიგრძე (l სმ)	სიხშირე
$170 \le H < 175$	1
$175 \le H < 180$	8
$180 \le H < 185$	9
$185 \le H < 190$	11
$190 \le H < 195$	9
$195 \le H < 200$	3
$200 \le H < 205$	3

(ა) ახსენით რატომ არის სიმაღლე უწყვეტი ტიპის ცვლადი.

(ბ) ააგეთ ჰისტოგრამა მოცემული მონაცემებისთვის.

(გ) რა არის მოდალური კლასი? ახსენით მისი მნიშვნელობა.

(დ) აღწერეთ როგორია ამ მონაცემების განაწილება.

2. ქვემოთ მოცემული მონაცემებისათვის დაადგინეთ, რომელი უნდა გამოვიყენოთ. ჰისტოგრამა თუ სვეტოვანი დიაგრამა და ააგეთ შესაბამისი გრაფიკი.

(ა) ასანთის ღეროების რაოდენობა 30 ასანთის კოლოფში

ღეროების რაოდენობა თითოეულ კოლოფში	47	49	50	51	52	53	55
სიხშირე	1	1	9	12	4	2	1

(ბ) 25 ტანმოვარჯიშის სიმაღლე (უახლოეს სმ-ბში)

სიგრძე (l სმ)	სიხშირე
$120 \le h < 130$	1
$130 \le h < 140$	2
$140 \le h < 150$	7
$150 \le h < 160$	14
$160 \le h < 170$	1

3. სკოლაში ჩატარდა გამოკითხვა და გამოიკითხა 60 მოსწავლე. გამოკითხვის მიზანი იყო დაედგინათ, თუ რა დრო ეხარჯებათ მოსწავლეებს სკოლამდე მგზავრობაში. ქვემოთ მოცემულია მოსწავლეების მიერ დახარჯული დრო უახლოეს წუთებამდე სიზუსტით.

12	15	16	8	10	17	25	34	42	18	24	18	45	33	38
45	40	3	20	12	10	10	27	16	37	45	15	16	26	32
35	8	14	18	15	27	19	32	6	12	14	20	10	16	14
28	31	21	25	8	32	46	14	15	20	18	8	10	25	22

გაგრძელება

სავარჯიშოები

(ა) მგზავრობაზე დახარჯული დრო დისკრეტული თუ უწყვეტი ცვლადია?

(ბ) ააგეთ დაჯგუფებულ სიხშირეთა ცხრილი მოცემული მონაცემებისთვის, სადაც კლასის ინტერ-ვალებია: $0 \le t < 10$, $10 \le t < 20$, ... , $40 \le t < 50$.

(გ) მოცემული მონაცემების საფუძველზე ააგეთ ჰისტოგრამა.

(დ) აღწერეთ როგორია ამ მონაცემების განაწილება.

(ე) რა არის მოდალური კლასი?

4. ჯგუფი, რომელშიც არის 25 სპორტსმენი, მონაწილეობს შეჯიბრში. ქვემოთ მოცემულია მათ მიერ მიღწეული შედეგები მანძილები მეტრებში:

17.6	25.7	21.3	30.9	13.0	31.6	22.3	28.3	7.4
38.4	19.1	24.0	40.0	16.2	42.9	31.9	28.1	41.8
13.6	27.4	33.7	9.2	23.3	39.8	25.1		

(ა) მოცემული მონაცემების დაჯგუფებისთვის აარჩიეთ შესაბამისი კლას-ინტერვალები.

(ბ) წარმოადგინეთ ეს მონაცემები დაჯგუფებულ სიხშირული ცხრილის სახით.

(გ) მოცემული მონაცემებისთვის ააგეთ ჰისტოგრამა.

(დ) იპოვეთ მოდალური კლასი.

(ე) სპორტსმენების რამდენ პროცენტს აქვს შედეგი 30 მ და მეტი?

5. მებაღე აკვირდება ნერგებს სანერგეში და ზომავს ნერგების სიმაღლეებს. ის არჩევს ნერგებს შემთხვევითი პრინციპით. შედეგები მოცემულია ცხრილის სახით.

სიგრძე (h მმ)	სიხშირე
$300 \le h < 325$	12
$325 \le h < 350$	18
$350 \le h < 375$	42
$375 \le h < 400$	28
$400 \le h < 425$	14
$425 \le h < 450$	6

(ა) წარმოადგინეთ ეს მონაცემები ჰისტოგრამის სახით.

(ბ) რამდენი ნერგის სიმაღლე არის 400 მმ და მეტი?

(გ) ნერგების რამდენი პროცენტის სიმაღლე არის 350 მმ-სა და 400 მმ-ს შორის?

(დ) სანერგეში ჯამში სულ არის 1462 ნერგი. შეაფასეთ რაოდენობა იმ ნერგებისა, რომელთა სიმაღლეები:

1. 400 მმ-ზე ნაკლებია
2. 375-სა და 425 მმ-ს შორისაა.

სავარჯიშოები

6. ქვემოთ მოცემულია 50 საცდელი ვირთხის წონები.

261	133	173	295	265	142	140	271	185	251
166	100	292	107	201	234	239	159	153	263
195	151	156	117	144	189	234	171	233	182
165	122	281	149	152	289	168	260	256	156
239	203	101	268	241	217	254	240	214	221

(ა) ამ მონაცემების დაჯგუფებისთვის აარჩიეთ შესაბამისი კლას-ინტერვალები.

(ბ) წარმოადგინეთ ეს მონაცემები დაჯგუფებულ სიხშირეთა ცხრილის სახით.

(გ) ამ მონაცემების საფუძველზე ააგეთ ჰისტოგრამა.

(დ) ვირთხების რამდენი პროცენტის წონაა 200 გრ და ნაკლები.

სავარჯიშოები

13. მოცემული ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 120-ის ტოლია, სხვა 5 რიცხვის საშუალო არითმეტიკული კი – 90-ს, რა იქნება მოცემული ყველა რიცხვის საშუალო არითმეტიკული?

14. მოცემული ხუთი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 70-ის ტოლია, ამ რიცხვებიდან ოთხი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული 60-ის. რას უდრის მეხუთე რიცხვი?

15. თორნიკემ და მარიამმა მაღაზიაში იყიდეს 8კგ შოკოლადის კანფეტი, კილოგრამი – 8.5 ლარად და 12 კგ კანფეტების ასორტი, კილოგრამი – 6.5 ლარად. რა იქნება კანფეტების კილოგრამის საშუალო ფასი?

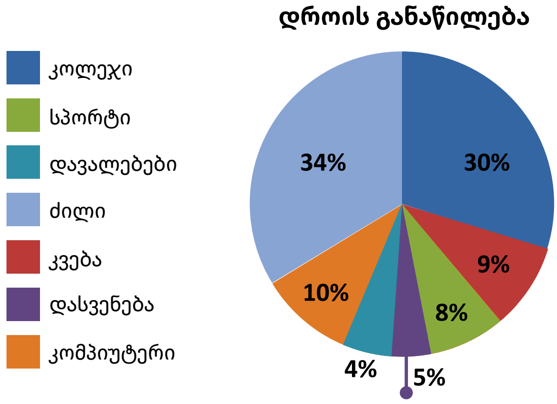
16. ინტერნეტის მეშვეობით მოიძიეთ თქვენი საყვარელი სპორტსმენის ბოლო 10 თამაშის შედეგები და იპოვეთ მოძიებული მონაცემების: მედიანა, საშუალო, მოდა და დიაპაზონი.

17. ვიქტორიას უნდა დაედგინა, უყვარს თუ არა მოსახლეობას სატელევიზიო სერიალები. ამისათვის, იგი დადგა მეტროსთან და გამოკითხა ყოველი მეხუთე გამვლელი. რამდენად ობიექტურ სურათს მოგვცემს ვიქტორიას გამოკითხვა?

18. დიაგრამაზე მოცემულია ინფორმაცია, თუ როგორ ანაწილებს დროს სტუდენტი ერთი წლის განმავლობაში.

მოცემულია აქტივობები:

- კოლეჯი
- ძილი
- სპორტი
- დავალებების შესრულება
- კვება
- კომპიუტერი
- დასვენება



- რას უთმობს ყველაზე ნაკლებ დროს სტუდენტი?
- რას უთმობს ყველაზე მეტ დროს?
- როგორია თანაფარდობა კოლეჯში გატარებულ დროსა და ძილს შორის?
- წარმოადგინეთ მოცემული მონაცემები სვეტოვანი დიაგრამის მეშვეობით
- 24 საათიდან რამდენ საათს უთმობს თითოეულ აქტივობას სტუდენტი?
- თუ ავიღებთ 200 საათს, რა აქტივობას რა დროს უთმობს სტუდენტი?
- შეადგინეთ დიაგრამა, თქვენ რა დროს უთმობთ თითოეულ აქტივობას?

19. **გამოწვევა:** 25 კაციანი ჯგუფის საგამოცდო შედეგები წარმოდგენილია სიხშირული ცხრილის სახით. ჯგუფის საშუალო შეფასებაა 1.08.

შეფასება	0	1	2	3	4	5	ჯამი
სიხშირე	15	3	2	1	x	y	25

1. იპოვეთ ყველაზე მაღალი შეფასების სიხშირეები (x და y)
2. იპოვეთ მოდა და მედიანა
3. მონაცემები წარმოადგინეთ წრიული დიაგრამის სახით, სადაც ყოველი ნიშნის სექტორზე მონიშნული იქნება მისი პროცენტი

1.8. მონაცემთა განაწილების ფორმები

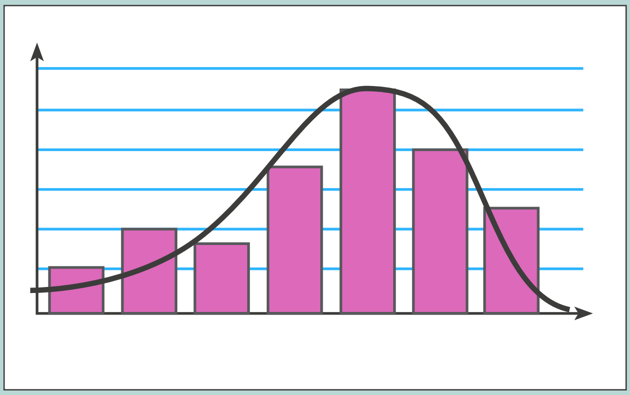
მოდა არის მონაცემთა განაწილებაში ყველაზე ხშირად განმეორებადი მონაცემი. მონაცემთა სიხშირეთა განაწილებამ შეიძლება მიიღოს განსხვავებული ფორმები. იმის მიხედვით თუ სად აღმოჩნდება მოდა.

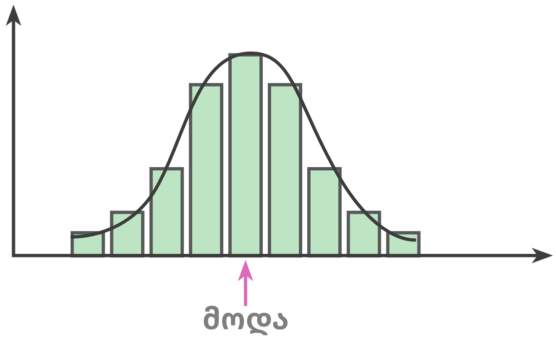
განაწილების 3 ძირითადი ფორმა მოყვანილია ქვემოთ. წყვეტილი ხაზი მიანიშნებს მონაცემთა მოდაზე.

ასიმეტრიული ეწოდება განაწილებას, როდესაც მონაცემები თავმოყრილია განაწილების ერთ ბოლოში განაწილების მეორე ბოლოში (ე.წ. კუდში) განლაგებულია იშვიათად დაფიქსირებული მონაცემები.

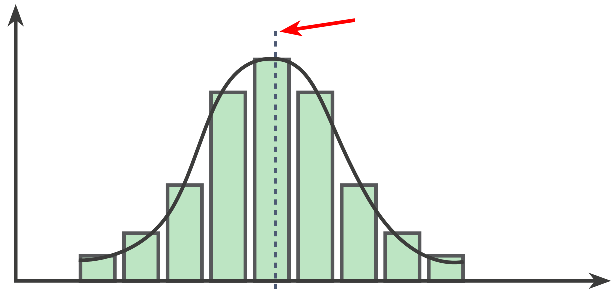
ნიმუში 1

განხილული მაგალითის მიხედვით, განაწილება არის უარყოფითად ასიმეტრიული.

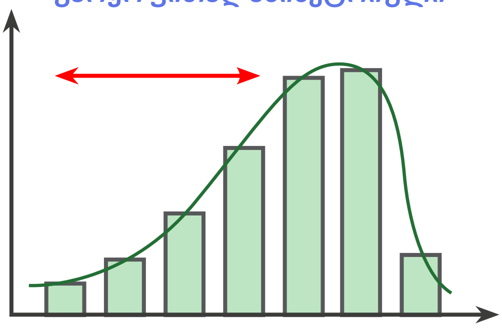




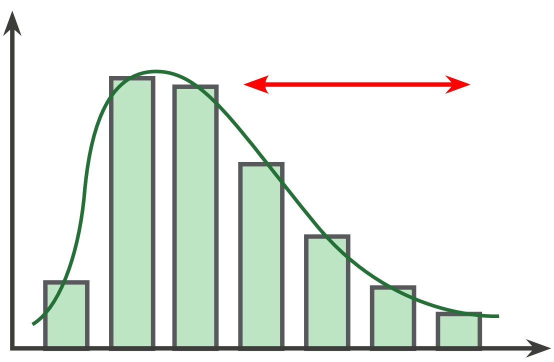
- სიმეტრიული განაწილება



- უარყოფითად ასიმეტრიული

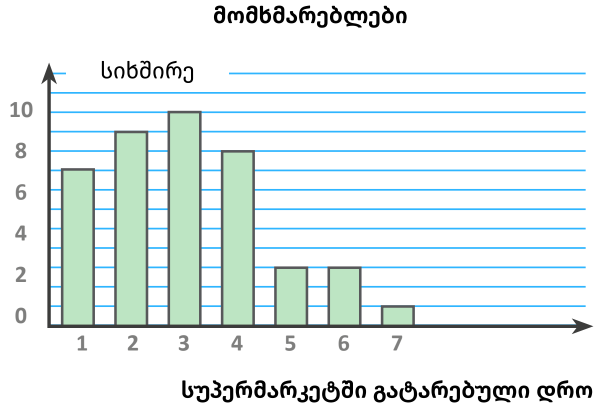


- დადებითად ასიმეტრიული



სავარჯიშოები

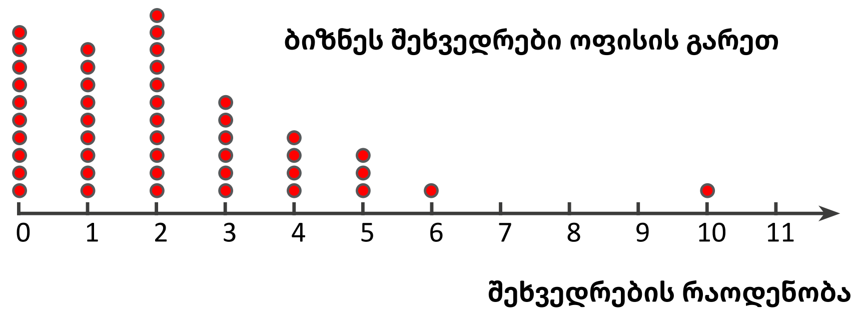
1. გამოკითხეს შემთხვევითი წესით შერჩეული მომხმარებლები. მათ დაუსვეს კითხვა: „რამდენჯერ იყავით საყიდლებზე სუპერმარკეტში ბოლო კვირას?“
მონაცემთა დამუშავების შემდეგ, წარმოადგინეთ სვეტოვანი დიაგრამის სახით.



დიაგრამიდან გამომდინარე უპასუხეთ კითხვებს:

- რამდენმა მომხმარებელმა მიიღო მონაწილეობა გამოკითხვაში?
- რამდენი მომხმარებელი იყო საყიდლებზე ერთხელ, ორჯერ?
- რამდენი პროცენტი მიდის საყიდლებზე სუპერმარკეტში 5-ჯერ და მეტჯერ?
- აღწერე მონაცემთა განაწილება.

2. ერთ-ერთი კომპანიის თანამშრომლებს სთხოვეს ჩაენიშნათ, რამდენჯერ უხდებოდათ კვირის განმავლობაში ოფისის დატოვება საქმიანი შეხვედრების გამო. დიაგრამაზე მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.



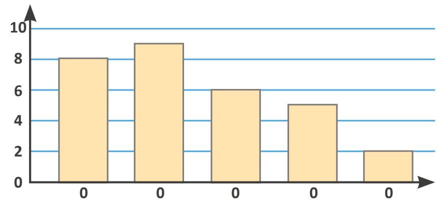
უპასუხეთ შეკითხვებს:

- რა არის ცვლადი ამ კვლევაში?
- ახსენით, რატომაა ეს მონაცემები დისკრეტული რიცხვითი მონაცემები?
- რამდენმა პროცენტმა არ დატოვა ოფისი?
- რამდენმა პროცენტმა დატოვა ოფისი 5-ჯერ და მეტჯერ?
- რომელია ამ მონაცემების ყველაზე ხშირად განმეორებადი მონაცემი?
- როგორ დაახასიათებდით მონაცემს, რომლის მნიშვნელობა არის 10-ის ტოლი?

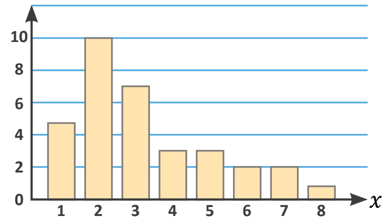
სავარჯიშოები

3. როგორ არის განაწილებული მონაცემები დიაგრამაზე?

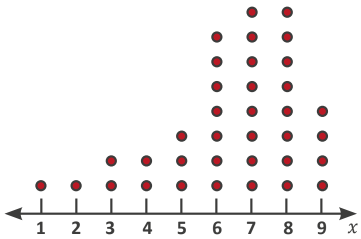
ა)



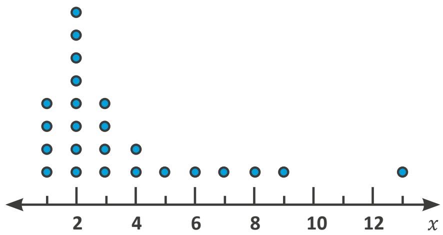
ბ)



გ)



დ)



გამეორება

4. ცხრილში მოცემულია ფრენბურთის გუნდის მოთამაშეთა წონები.

ა) ცხრილის მიხედვით, ააგეთ სიხშირეთა ჰისტოგრამა. გარკვევით დაიტანეთ ღერძებზე ინტერვალები, გაითვალისწინეთ, რომ ჰისტოგრამის დასათაურება აუცილებელია;

ბ) აღწერეთ როგორია მონაცემთა განაწილება;

წონა (კგ)	სიხშირე
$75 < x \le 80$	2
$80 < x \le 85$	5
$85 < x \le 90$	8
$90 < x \le 95$	7
$95 < x \le 100$	5
$100 < x \le 105$	1

5. პროფესიულმა სასწავლებელმა გამოიკითხა 50 სტუდენტი იმის გასარკვევად, თუ რა დროს ხარჯავდნენ ისინი სასწავლებელში მისვლამდე. მოცემულია მონაცემები წუთებში:

16	8	10	17	25	34	42	18	24	18	45	33	40
3	20	12	10	10	27	16	37	45	15	16	26	16
14	18	15	27	19	32	6	12	14	20	10	16	
21	25	8	32	46	14	15	20	18	8	10	25	

ა) როგორ დაახასიათებდით დროს?

ბ) დაალაგეთ მონაცემები ზრდის მიხედვით;

გ) როგორია მონაცემთა განაწილება?

მონაცემების დამუშავება მართკუთხედის ფორმის ყუთისა და მონაკვეთის მეშვეობით (Box and Whisker Plot)

ტელესკოლა

9:30-დან განიხილება აღნიშნული საკითხი

კვლევა

ინტერნეტის მეშვეობით მოიპოვეთ ინფორმაცია და შეადარეთ აღნიშნული მეთოდით თქვენი საყვარელი სპორტსმენების მონაცემები და დაადგინეთ, რომელი უფრო ეფექტური მოთამაშე იყო წლის განმავლობაში.

დაფიქრდით:

შეიძლება თუ არა ერთი მოთამაშის მაქსიმუმი იყოს მეორეზე გაცილებით მაღალი, მაგრამ მეორე მოთამაშე გაცილებით ეფექტური და სტაბილური მოთამაშე იყოს? როგორი სახე ექნება მსგავსი სიტუაციის დიაგრამას?

აღნიშნულ მონაცემთა დამუშავების წესით, ხშირად ხდება ორი სპორტსმენის ან ორი კომპანიის მონაცემების შედარება, იმისათვის, რომ მიიღონ გადაწყვეტილება, რომელი უფრო ეფექტური ან მომგებიანი იქნება.

ვთქვათ, მოცემულია რამდენი ქულა მოუტანა რომელიღაც კალათბურთელმა გუნდს ბოლო 12 თამაშში: 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 9, 10, 12, 12, 14.

ვისწავლოთ მონაცემების დამუშავების და წარმოდგენის კიდევ ერთი ძალიან პრაქტიკული მეთოდი. აღნიშნული მეთოდი მოიცავს შემდეგ ნაბიჯებს:

- ვიპოვოთ მონაცემების მედიანა
- მედიანის მეშვეობით გავყოთ მონაცემები ორ ნაწილად და ვიპოვოთ ზედა და ქვედა დანაყოფის მედიანები (წესი: მონაცემებს ვყოფთ შუაზე და ვპოულობთ ცალ-ცალკე თითოეული ნახევრის მედიანებს).
- ვიპოვოთ მონაცემების მაქსიმუმი და მინიმუმი.
- წარმოვადგინოთ მონაცემები მონაკვეთზე შემდეგი წესით:

მაქსიმუმი	14
მინიმუმი	4
მედიანა (Q_2)	8
მარცხენა ნახევრის მედიანა (ქვედა კვარტილი Q_1)	6
მარჯვენა ნახევრის მედიანა (ზედა კვარტილი Q_3)	11

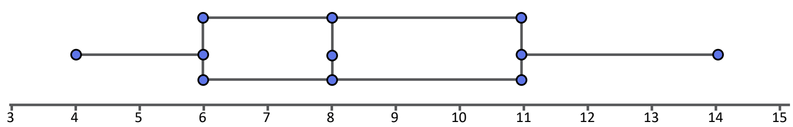
4 5 $\underbrace{6\ \ 6}_{6}$ 8 8 | 8 9 $\underbrace{10\ \ 12}_{11}$ 12 14

წარმოვადგინოთ მონაცემები რიცხვით სხივზე შემდეგი წესით:

- გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე მონაცემების მინიმუმი და მაქსიმუმი, შესაბამისად 4 და 14.
- გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე მედიანა 8.

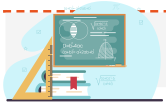
გადავიტანოთ რიცხვით სხივზე ქვედა და ზედა დანაყოფების მედიანები (კვარტილები), 6 და 11.

- შევაერთოთ მართკუთხედით მედიანები ისე, როგორც ქვემოთ დიაგრამაზეა ნაჩვენები
- შევაერთოთ მართკუთხედის გვერდები მინიმუმთან და მაქსიმუმთან.



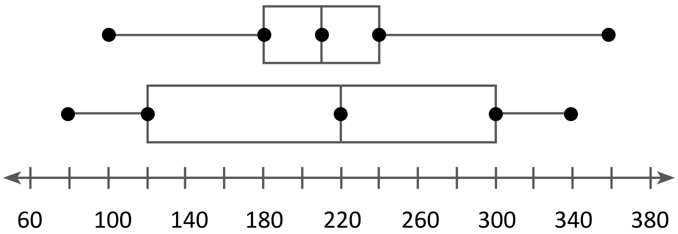
ზედა და ქვედა კვარტილების სხვაობა გვიჩვენებს თუ როგორ არის განაწილებული მონაცემები მედიანასთან მიმართებით. აღნიშნული დიაგრამა გვაძლევს საშუალებას გავაანალიზოთ და შევადაროთ ორი სიმრავლე მონაცემებისა.

სავარჯიშოები

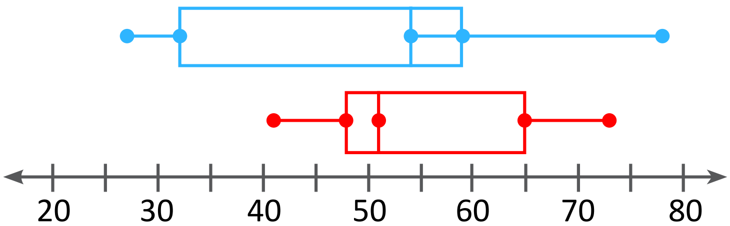


MATH Lab – გააანალიზეთ შემდეგი დიაგრამა

1. აღნიშნული დიაგრამა გვაწვდის ინფორმაციას ორი კომპანიის გაყიდვების რაოდენობაზე. რისი თქმა შეგვიძლია? რომელი უფრო ეფექტურად მუშაობს? თქვენი აზრით, რომელია მეტად სტაბილური კომპანია გაყიდვებში?

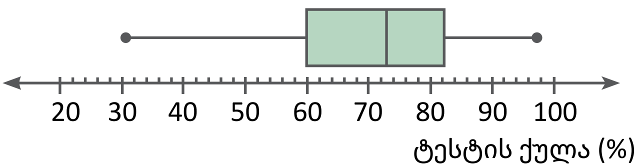


2. ქვემოთ დიაგრამით შედარებულია ორი მეწარმის მიერ დღეში გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა (ჩავთვალოთ, რომ მეწარმეები ყიდიან ერთსა და იმავე პროდუქციას). N1-მეწარმის დიაგრამა მოცემულია ლურჯი ფერით, N2 მეწარმის – წითელი ფერით.



- რომელ დიაგრამაზეა მედიანა მეტი?
- რომელი დიაგრამით არის მოცემული უფრო დიდი დიაპაზონი?
- რას უდრის ზედა და ქვედა ნახევრების მედიანების სხვაობა და რატომ შეიძლება იყოს აღნიშნული ინფორმაცია საჭირო? გამოთქვით ვარაუდი.

3. სურათზე მოცემული ყუთისებრი დიაგრამა გვიჩვენებს, კლასის მიერ ტესტში დაგროვებული ქულების განაწილებას. მისი მიხედვით უპასუხეთ:



ა) რამდენი იყო: I) ყველაზე მაღალი ქულა?

სავარჯიშოები

II) ყველაზე დაბალი ქულა?

ბ) რამდენი იყო ქულათა მედიანა?

გ) რამდენი იყო გაბნევის დიაპაზონი?

დ) თუ შენ დააგროვე 70 ქულა, მაშინ მოხვდები თუ არა საუკეთესო ქულების მქონე სტუდენტების 50%-ში?

გამოთქვი მოსაზრება მოცემული ყუთისებრი დიაგრამის სიმეტრიულობის შესახებ.

4. მარიამმა გადაწყვიტა დაითვალოს და აღწეროს 33 სხვადასხვა პარკში არსებული ვაშლების რაოდენობა. მან ასეთი შედეგი მიიღო:

5, 8, 10, 4, 2, 12, 6, 5, 7, 7, 5, 5, 5, 13, 9, 3, 4, 4, 7, 8, 9, 5, 5, 4, 3, 6, 6, 6, 6, 9, 8, 7, 6.

ა) იპოვე მონაცემთა მედიანა, ზედა და ქვედა მეოთხედები;

ბ) დახაზე ამ მონაცემების შესაბამისი ყუთისებრი დიაგრამა.

5. ქვემოთ ცხრილით მოცემულია ინფორმაცია, თუ დღის განმავლობაში რამდენი საათი სძინავს მოსწავლეს და რამდენი — მასწავლებელს;

- წარმოადგინეთ მონაცემები ყუთისებრი ფორმის დიაგრამით (Box and Whisker plot)
- გააანალიზეთ მონაცემები

	ძილის დროის საშუალო ხანგრძლივობა ყოველ დღე
მოსწავლე	9, 7, 10, 6, 11, 7, 9, 10, 10, 7, 9, 10, 8, 9, 11
მასწავლებელი	7, 6, 8, 9, 8, 7, 10, 6, 7, 9, 6, 7, 5, 7, 8

ტესტის ნიმუში

1. დემეტრემ და საბამ გადაწყვიტეს ჩაეტარებინათ კვლევა, რომელი ტელეფონი უფრო ურჩევნიათ მომხმარებლებს: აიფონი თუ სამსუნგი? დაადგინეთ:

- რომლის კვლევის შედეგი იქნება უფრო მიახლოებული რეალობასთან?
- რა მეთოდით ჩაატარა კვლევა საბამ და რა მეთოდით დემეტრემ?

კითხვა: აიფონით უფრო კმაყოფილი ხართ თუ სამსუნგით?	
კვლევის წესი	**შედეგები**
დემეტრე გამოკითხა შემთხვევით მეტროდან ამოსული 800 ადამიანი.	65 % — მოსწონს სამსუნგი
საბა გამოჰკითხა აიფონის მაღაზიიდან გამოსული მომხმარებელი	95 % — მოსწონს აიფონი

შენიშვნა: ამოცანაში მოცემული მონაცემები არ არის რეალური კვლევიდან აღებული.

2. დაწერეთ კვლევის რომელი მეთოდი უნდა იყოს გამოყენებული ჩამოთვლილი საკითხების ანალიზისთვის? (უნდა აღიწეროს სრული მოსახლეობის ანუ პოპულაციის თუ შერჩევითი წესით გამოკითხვა საკმარისია?).

ა) რომელია ყველაზე პოპულარული კომპიუტერული თამაში?
ბ) 15 წლამდე მოსწავლეებს კალათბურთის ყურება უფრო უნდათ თუ ფეხბურთისა?
გ) გაიზარდა თუ არა შობადობის რიცხვი წელს წინა წელთან შედარებით?

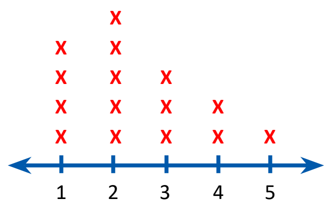
3. იპოვეთ მოცემული მონაცემების მედიანა, მოდა, საშუალო და დიაპაზონი:

4 2 5 1 1 2 7 9 1.

4. სიხშირის მონაკვეთზე განთავსებული მონაცემების მიხედვით, იპოვეთ:

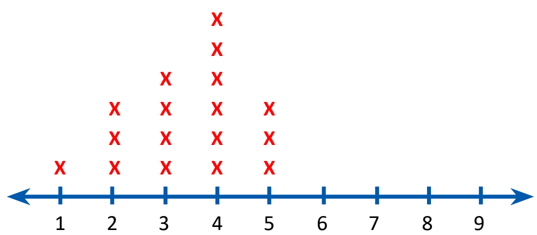
მონაცემების მედიანა, მოდა და საშუალო.

ნახაზზე მოცემული რიცხვები.

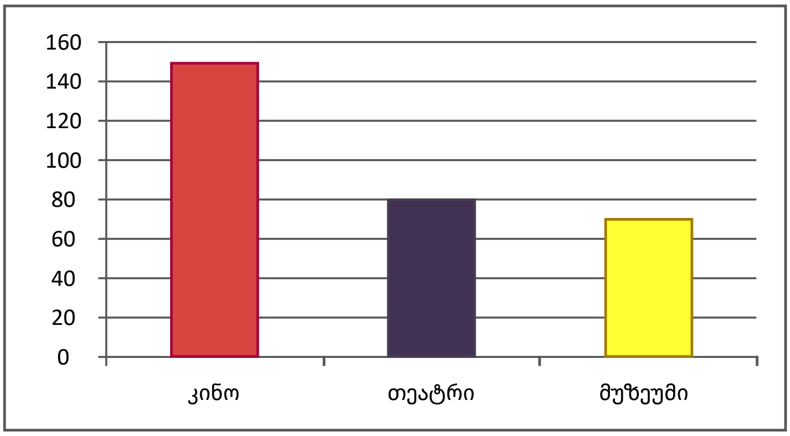


5. უნივერსიტეტის საკალათბურთო გუნდს ჰყავს 4500 ერთგული გულშემატკივარი, რომელთა ნაწილი შეჯიბრებებზე მუდმივად დადის გუნდის კალათბურთის მაისურებით. ლუკამ გამოკითხვა ჩაატარა შემთხვევითი შერჩევის წესით და ჰკითხა გულშემატკივრებს: ვინ ჩაიცვამდა მაისურს მომავალი თამაშისთვის? გამოკითხული 30 გულშემატკივრიდან 24-მა განაცხადა, რომ მოვიდოდა მაისურით. რა ვარაუდის გამოთქმა შეუძლია ლუკას? სრული რაოდენობიდან სავარაუდოდ რამდენი გულშემატკივარი მოვა აღნიშნული მაისურით?

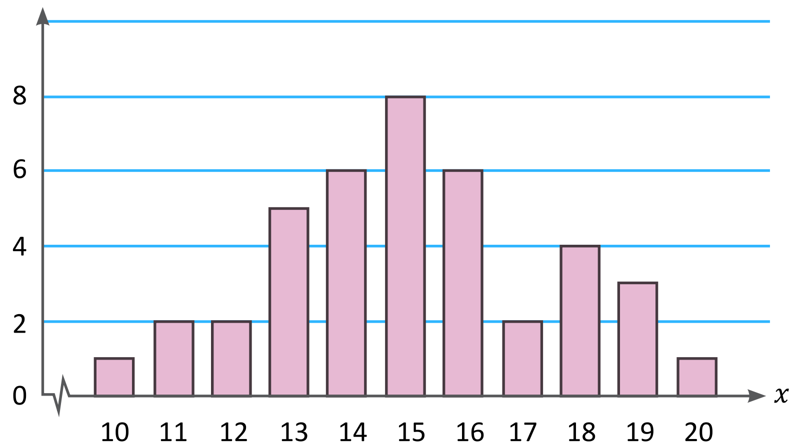
6. რა არის ცხრილით მოცემული მონაცემების მოდა?



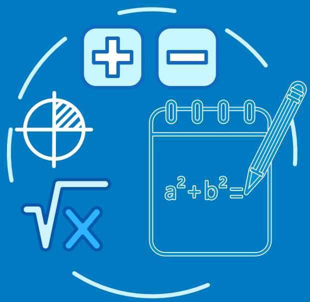
7. აღნიშნული ინფორმაციის მიხედვით დაადგინეთ, საერთო გამოკითხულიდან რამდენს მოსწონს კინო? ინფორმაცია ჩაწერეთ ფარდობითი სიხშირის და პროცენტის მეშვეობით.



8. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, იპოვეთ მონაცემების მოდა და დაახასიათეთ განაწილება.



II. დავალების წარდგენა



პროექტი

საკვანძო კითხვა:

- *რა კავშირია ნიადაგის ეროზიასა და ნალექების რაოდენობას შორის?*

თქვენი დავალება

დაგეგმეთ კვლევა და შეისწავლეთ, არის თუ არა კავშირი (კორელაცია) ნალექების პირობებში დროსა და ნიადაგის ეროზიას შორის. გაეცანით ნიადაგის ეროზიასთან დაკავშირებულ ინფორმაციას

ნიადაგის ეროზია

კვლევის დასაორგანიზებლად მოიქეცით შემდეგნაირად:

1. აიღეთ სილა (ან მიწა) და მოზილეთ მისგან მასა, რომელსაც ექნება კლდის ან მომცრო მთის ფორმა;
2. გაზომეთ თქვენ მიერ მოზელილი მასის სიმაღლე, შემდეგ დროის თანაბარ ინტერვალებში დაასხით თანაბარი რაოდენობის წყალი და შეასრულეთ გაზომვები;

- მაგალითად, გაზომეთ თქვენ მიერ მოზელილი მასის სიმაღლე, შემდეგ დაასხით წყალი და 20 წამში (ან 30 წამში, ან 10 წამში) გაზომეთ სიმაღლე, შემდეგ ისევ დაასხით წყალი და 20 წამში გაზომეთ სიმაღლე, გაიმეორეთ პროცედურა მანამ, სანამ სრულიად არ დაიშლება მასა. ყოველი წყლის დასხმის შემდეგ, მეორე წყლის დასხმამდე შეგროვებული მონაცემები ჩამოწერეთ ცხრილში; ყურადღება მიაქციეთ, რომ აიღოთ დროის ერთი და იგივე ინტერვალები; დაითვალეთ რა დროში დაიშლება სრულად მოცემული მასა;

დრო	სიმაღლე
საწყისი დრო	საწყისი სიმაღლე
20 წმ	
40 წმ	
60 წმ	
80 წმ	
და ა.შ.	

კიდევ სცადეთ

გაგრძელება

II. დავალების წარდგენა

კომპლექსური დავალება

შენი დავალება

3. გადაიტანეთ მონაცემები საკოორდინატო სიბრტყეზე და დაფიქრდით, რისი თქმა შეგიძლიათ?

კვლევის შედეგები წარმოადგინეთ რეფერატის სახით, რომელსაც თან დაურთავთ ექსპერიმენტის ფოტო-მასალას და დაორგანიზებულ მონაცემებს;

ნაშრომის წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- რატომ არის მნიშვნელოვანი კვლევის დაგეგმვა და მონაცემების შეგროვება?
- რა დაადგინეთ, არის თუ არა კავშირი დროში ნალექების რაოდენობასა და ნიადაგის ეროზიას შორის? დაწერეთ სიტუაციის აღმწერი მათემატიკური მოდელი.
- რეალური მოვლენის კვლევისას, შეიძლება თუ არა მეცნიერებმა გამოთქვან ვარაუდი, რა დროში და რა პირობებში შეიძლება მოხდეს მთის (ან კლდის) ჩამოშლა?
- თქვენი აზრით, კიდევ რა მოვლენებს აქვს გავლენას ნიადაგის ეროზიაზე? როგორ გააუმჯობესებდით ექსპერიმენტს?

თემა 2. მოდელირება ფუნქციით

2.1.კორელაცია, მისადაგების წრფე

ჩვენ უკვე გავეცანით ცენტრალური ტენდენციის საზომ ერთეულებს: მონაცემების საშუალო არითმეტიკულს, მედიანას, მოდას; აღნიშნული საზომი ერთეულები ახასიათებს ერთი ცვლადით წარმოდგენის მონაცემებს.

განვიხილოთ ორი ცვლადი სიდიდე, რომლებიც შეიძლება დაკავშირებული იყოს ერთმანეთთან; ჩვენ უკვე განვიხილეთ და ვიცით ცვლად სიდიდეებს შორის ფუნქციური კავშირი. როდესაც ვცდილობთ დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ორი სიდიდე, ვიცით რომ, ერთი შეიძლება იყოს დამოუკიდებელი ცვლადი, მეორე დამოკიდებული.

როდესაც ორ სიდიდეს შორის არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი დამოკიდებულება, ან ორი სიდიდე დაკავშირებულია ერთმანეთთან, აღნიშნული დამოკიდებულება შეიძლება წარმოდგენილი იყოს რამდენიმე სახით: სიტყვიერად, ცხრილის სახით, ანალიზურად (ფორმულა) ან გრაფიკის მეშვეობით.

სტატისტიკური კვლევების შედეგად, ხშირად ფიქსირდება ცვლადებს შორის, სხვადასხვა მონაცემთა ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის კავშირი; აღნიშნული კავშირი ფუნქციური კავშირისგან იმით განსხვავდება, რომ შეიძლება დამოკიდებული იყოს შემთხვევით ფაქტორებზეც, (საკონტროლო ცვლადზე/პარამეტრზე, რომლის კვლევაც ძალიან საინტრესოა). როდესაც სტატისტიკაში იკვლევენ ორ ცვლადს შორის კავშირს, აღნიშნულ კვლევებს უწოდებენ **კორელაციურ** კვლევებს.

კორელაცია (ლათინურად – correlation) – სიტყვა ნიშნავს გარკვეულ ობიექტებს შორის კავშირს, დამოკიდებულებას; სტატისტიკაში ორ ან მეტ ცვლადს შორის კავშირს, როდესაც ერთი ცვლადის მნიშვნელობის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის მნიშვნელობის სისტემატური ზრდა ან კლება; ⇨

სტატისტიკაში როდესაც ორ ცვლადს შორის კავშირს ვიკვლევთ, აუცილებლად უნდა დავსვათ შემდეგი კითხვები:

1. არსებობს თუ არა კავშირი ორ ცვლადს (მონაცემთა ორ სიმრავლეს) შორის?
2. რა მიმართულება აქვს ამ კავშირს? (ზრდადია თუ კლებადი?)
3. რამდენად ძლიერია ეს კავშირი?

საკვლევი კითხვა

არის თუ არა კავშირი ადამიანის სიმაღლესა და მის ფეხის ზომას შორის?

განვიხილოთ ორი ცვლადი:

- სიმაღლე და ფეხის ზომა;
- გამოკითხვით შევაგროვოთ მონაცემები, რომლებიც განეკუთვნებიან რაოდენობრივი მონაცემების ტიპს;
- 10 ადამიანს ვკითხოთ სიმაღლე და ფეხის ზომა და დავადგინოთ, ადამიანის ფეხის ზომა როგორ არის დამოკიდებული სიმაღლეზე.

წარმოვადგინოთ ცხრილით

სიმაღლე (სმ)	ფეხის ზომა
160	36
162	37
165	39
168	38
170	39
172	41
174	39.5
176	40
178	41
180	42

სტატისტიკაში შეგროვებულ ინფორმაციას ეწოდება – **მონაცემები**. თავის დასაწყისში წარმოდგენილ კითხვარს თუ დავაკვირდებით მივხვდებით, რომ მონაცემები არის სხვადასხვა სახის: **რაოდენობრივი** და **თვისებრივი**.

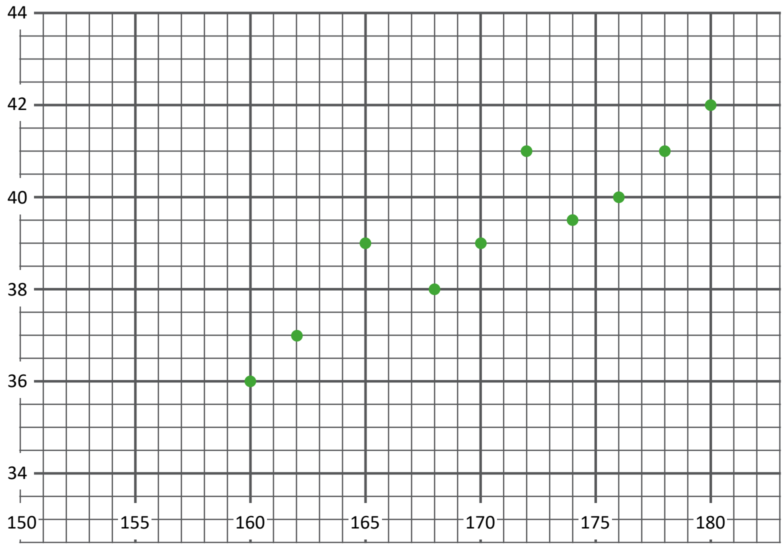
თავის მხრივ ხდება რაოდენობრივი და თვისებრივი მონაცემების კლასიფიკაცია.

Ox ღერძზე გადავზომოთ სიმაღლე, ხოლო Oy ღერძზე კი ფეხის ზომა.

დავინახავთ, რომ წერტილთა სიმრავლე არ არის განლაგებული წრფეზე, მაგრამ თვალის ზომით თუ გავავლებთ წრფეს, მონაცემები იქნება წრფესთან ახლოს.

ჩვენ უკვე ვიცით, როგორ დავწეროთ წრფის განტოლება; ავარჩიოთ ორი წერტილი, ვთქვათ (170; 39), (176,40) რომელზეც გავავლებთ წრფეს; დავწეროთ წრფის განტოლება;

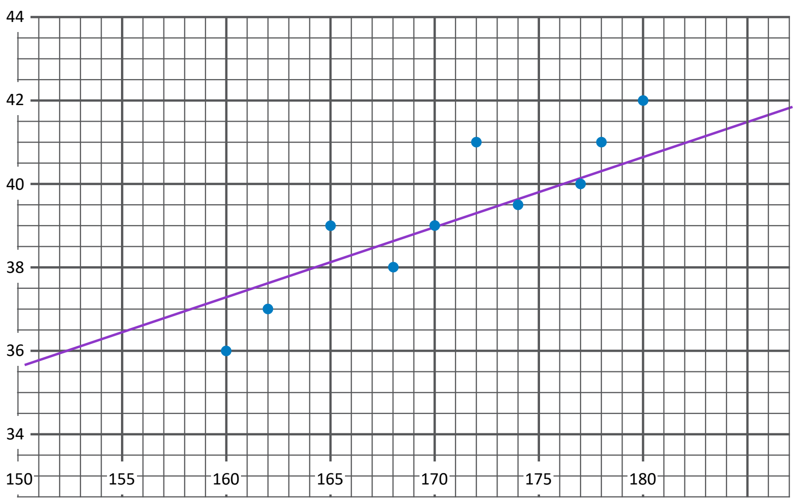
ვიცით, რომ $y = kx + b$



მონაცემების წარმოდგენის შემდეგ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რაც უფრო მაღალია ადამიანი, ფეხის ზომაც შედარებით დიდი ექნება. შეიძლება დავასკვნათ, რომ სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის არსებობს კავშირი, დამოკიდებულება, რომელსაც სტატისტიკაში ვუწოდებთ **კორელაციას**.

თვალის ზომით აგებული საუკეთესო მისადაგების წრფე

ავარჩიოთ სიბრტყეზე ორი წერტილი, რომელზე გავლებული წრფეც მეტად ახლოს იქნება სხვა დანარჩენ მონაცემთან.



ვიტყვით, რომ სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის არსებობს წრფივი კორელაცია.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40 - 39}{176 - 170} = \frac{1}{6}$$

$y = \frac{1}{6}x + b$, ჩავსვათ (170; 39) წერტილის კოორდინატები განტოლებაში და ვიპოვოთ b;

$$\frac{1}{6} \cdot 170 + b = 39$$

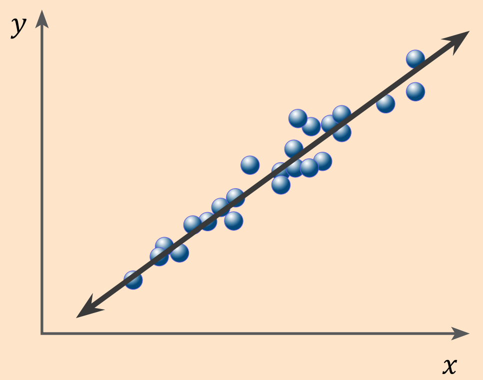
$$b = 39 - \frac{170}{6}$$

$$b \approx 39 - 28.3 = 10.7$$

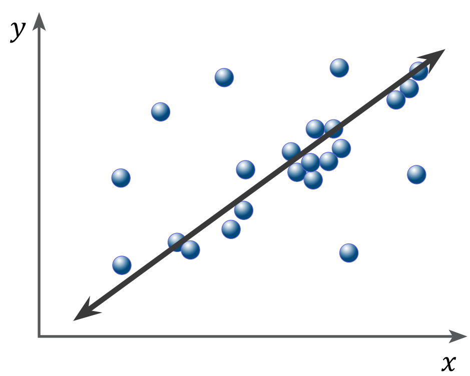
$$y = \frac{1}{6}x + 10.7$$

როდესაც მონაცემები განლაგებულია რაიმე წრფესთან ახლოს, მაშინ ამ მონაცემებს ვაფასებთ აღნიშნული წრფით. გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ არის განლაგებული მონაცემები წრფის მიმართ, ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ რამდენად ძლიერია კავშირი ცვლადებს შორის

როდესაც წერტილები არის მჭიდროდ ახლოს წრფესთან, ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის ზრდა, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის **ძლიერი დადებითი წრფივი კორელაციაა.**



როდესაც წერტილების ნაწილი წრფესთან ახლოს არის, ნაწილი კი გაბნეულია, თუმცა ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის ზრდა, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის არის **სუსტი (ან ზომიერი) დადებითი წრფივი კორელაცია.**

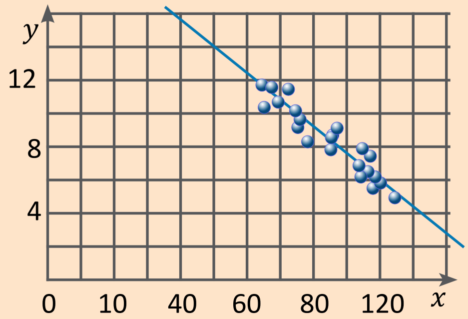


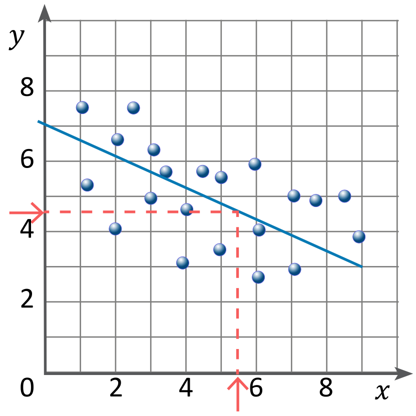
მითითება: შემდეგ გაკვეთილში გავეცნობით კოეფიციენტს, რომელიც დაგვეხმარება დავადგინოთ რამდენად ძლიერია კავშირი (ძლიერია, სუსტია თუ ზომიერია).

როდესაც წერტილები არის მჭიდროდ ახლოს წრფესთან, ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის კლება, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის **არის ძლიერი უარყოფითი წრფივი კორელაცია.**

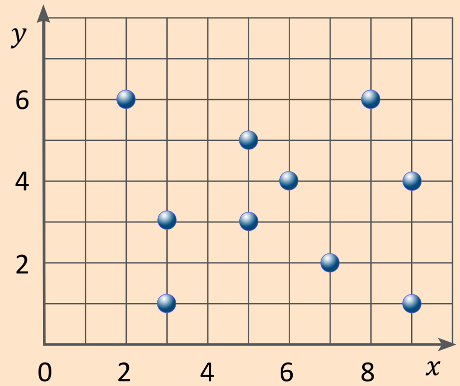
როდესაც წერტილების ნაწილი წრფესთან ახლოს არის ნაწილი კი გაბნეულია, თუმცა ერთი ცვლადის ზრდას ახასიათებს მეორე ცვლადის კლება, ვამბობთ, რომ ცვლადებს შორის არის **სუსტი (ან ზომიერი) უარყოფითი წრფივი კორელაცია.**

გაგრძელება



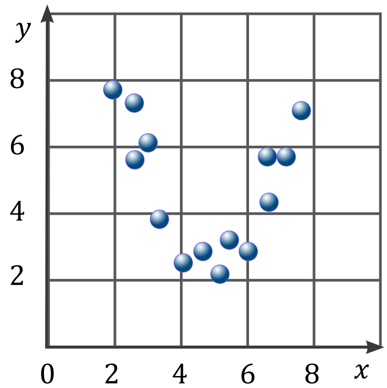


აღნიშნულ შემთხვევაში ცვლადებს შორის **არ არსებობს კორელაცია**, რადგან წერტილები გაბნეულია საკოორდინატო სიბრტყეზე;



არაწრფივი კორელაცია

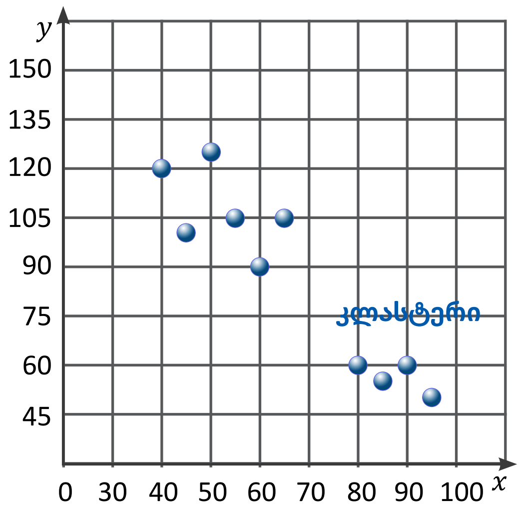
მონაცემების სიბრტყეზე გადატანის შემდეგ, მათი აღწერა სხვადასხვა გრაფიკითაა შესაძლებელი; აღნიშნულ შემთხვევაში მონაცემებს შორის არის არის წრფივი კორელაცია (არის კვადრატული დამოკიდებულება), რადგან გრაფიკს აქვს პარაბოლას ფორმა;



პანდემიის პერიოდში, დამკვიდრდა და ხშირად ტელევიზიებით გვესმოდა სიტყვა **კლასტერი**.

- რა არის კლასტერი? „კლასტერი“ წარმოდგება ლათინური სიტყვისგან. ინგლისურად „cluster“, რაც ნიშნავს: „თავმოყრა, დაგროვება“, „კონა“.

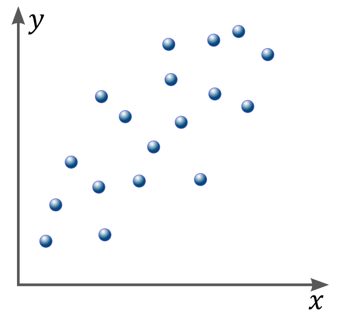
როდესაც დიაგრამაზე მონაცემების ნაწილი არის დაჯგუფებული, ვამბობთ, რომ მოცემულია კლასტერი.



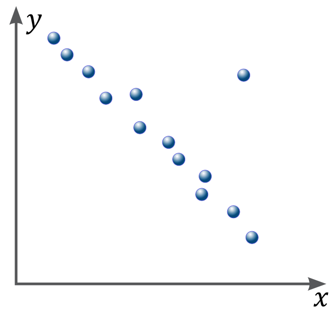
სავარჯიშოები

1. დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე, დაახასიათეთ ცვლადებს შორის კორელაცია: დადებითია თუ უარყოფითი? ძლიერი თუ სუსტი? რომელ დიაგრამაზეა ამოვარდნილი მონაცემი? პასუხი დაასაბუთეთ.

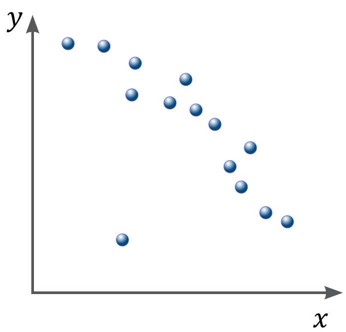
ა)



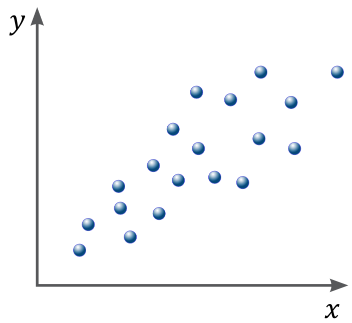
ბ)



გ)



დ)

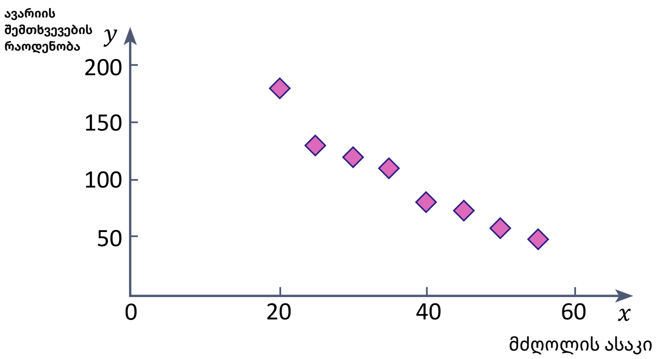


2. ცხრილით მოცემულია ქულები, რომელიც მოსწავლეებმა მათემატიკასა და ფიზიკაში მიიღეს.

მათემატიკა	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10
ფიზიკა	3	4	4	5	4	6	7	7	8	9

- გადაიტანეთ მონაცემები საკოორდინატო სიბრტყეზე.
- დაადგინეთ, არის თუ არა მათემატიკისა და ფიზიკის ქულებს შორის კორელაცია, თუ არის, როგორი?

3. მოცემული ცხრილი ასახავს ავარიულ შემთხვევებსა და მძღოლის ასაკს შორის კავშირს.



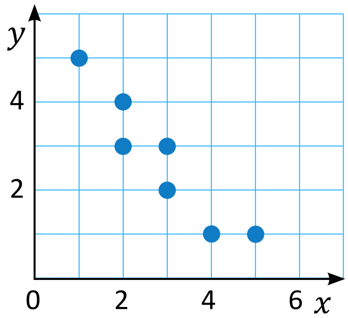
- დაადგინეთ, ავარიების რამდენი პროცენტი მოდის თითოეულ ასაკობრივ ჯგუფზე;
- დაადგინეთ, არის თუ არა ავარიის შემთხვევების რაოდენობასა და მძღოლის ასაკს შორის კორელაცია, თუ არის, როგორი?
- იპოვეთ რომელიმე მისადაგების წრფე.

სავარჯიშოები

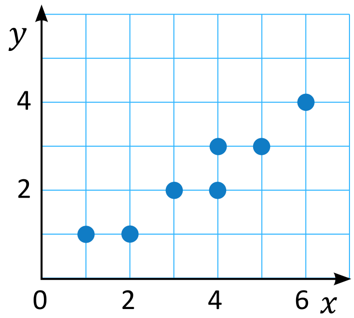
4. ქვემოთ წარმოდგენილი გრაფიკიდან გამომდინარე, აღწერეთ, რა ტიპის კორელაციაა ცვლადებს შორის?

- გადაიტანეთ გრაფიკი რვეულში, თვალის ზომით გაავლეთ მისადაგების წრფე და დაწერეთ წრფის განტოლება;
- წრფის განტოლების დაწერის შედეგ, დაწერეთ როგორ და რის საფუძველზე შეიძლება შემდეგი წერტილის ადგილის პროგნოზირება?

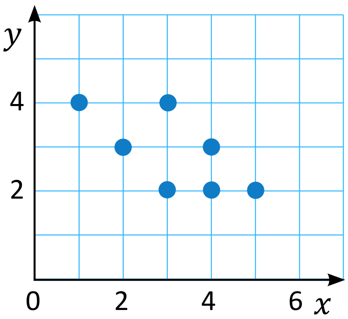
ა)



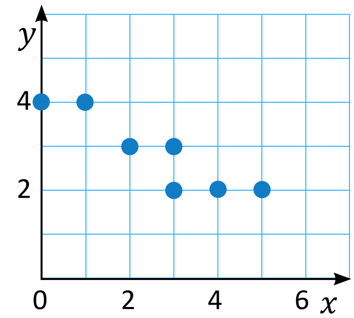
ბ)



გ)



დ)

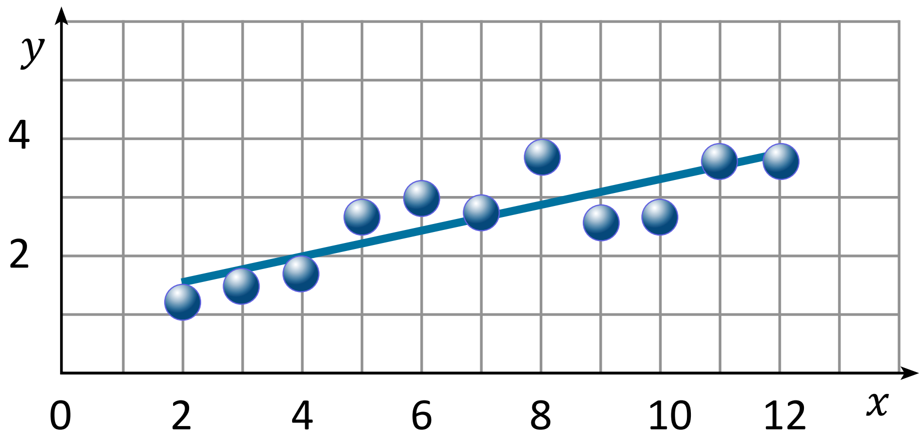


5. ცხრილში მოცემულია კინოთეატრში გაყიდული ბილეთების რაოდენობა და ტემპერატურა. შეადგინეთ მოცემული მონაცემებით წერტილოვანი დიაგრამა. დაადგინეთ არის თუ არა კავშირი ტემპერატურასა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის. (ტემპერატურა მოცემულია ფარენჰეიტებით).

ტემპერატურა (F^0)	გაყიდული ბილეთები
40	120
45	100
50	125
55	105
60	90
65	105
80	60
85	55
90	60
95	50

სავარჯიშოები

6. დიაგრამაზე x წარმოადგენს წლებს, დაწყებული 2000 წლიდან 2012 წლამდე, ხოლო y წარმოადგენს გაზის ფასს ლარებში.



- გამოთვალეთ რა განსხვავებაა 2012 და 2002 წლების გაზის ფასებს შორის? პასუხი დაამრგვალეთ მეასედამდე სიზუსტით;
- თუ ფასის მატება გაგრძელდა აღნიშნული წესით, გამოთქვით ვარაუდი, რა შეიძლება იყოს გაზის ფასი 2025 წელს? 2030 წელს?

2.2. ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილი

ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილი გვაძლევს შესაძლებლობას წარმოვადგინოთ შესაბამისობები ორ თვისებრივ მონაცემს შორის.

ნიმუში 1

ცხრილით მოცემულია შედეგები კვლევისა, რომელიც ეხებოდა გოგოებისა და ბიჭების საყვარელ სასმელს.

ცხრილით დაორგანიზებულია თვისებრივი მონაცემები;

კვლევის შედეგად სურდათ დაედგინათ, რომელი უფრო მოსწონდათ გოგოებს და ბიჭებს: რძე, წყალი თუ ნატურალური წვენი. მკვლევარს სურდა, ასევე, შედარებითი ანალიზის გაკეთება.

		სასმლის სახეობა			
		რძე	წყალი	ნატურალური წვენი	**სულ**
სქესი	**გოგოები**	24	36	40	100
	ბიჭები	20	30	50	100
	სულ	44	36	90	200

ცხრილი N1.

ცხრილი 1-ის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ ფარდობითი სიხშირის ცხრილი (მონაცემის შეფარდებით საერთო რაოდენობასთან); ასევე წარმოვადგინოთ მონაცემები პროცენტის სახით.

		სასმლის სახეობა			
		რძე	წყალი	ნატურალური წვენი	**სულ**
სქესი	**გოგოები**	12%	18%	20%	50%
	ბიჭები	10%	15%	25%	50%
	სულ	22%	33%	45%	100%

ცხრილი N2.

სავარჯიშოები

1. ცხოველთა მოყვარულ ჯგუფში ყოველ ადამიანს ჰყავს ძაღლი, კატა ან ჩიტი. ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილი გვიჩვენებს რამდენ ადამიანს ყავს თითოეული სახეობა. ამ ცხრილის საფუძველზე შეადგინეთ ფარდობითი სიხშირის ცხრილი, ასევე, წარმოადგინეთ ინფორმაცია პროცენტის სახით; დაამრგვალეთ პროცენტი მეათედამდე სიზუსტით.

		სახეობა			
		კატა	ძაღლი	ჩიტი	**სულ**
სქესი	მდედრობითი	50	20	10	
	მამრობითი	45	15	10	
	სულ				

2. ჩაატარეთ გამოკითხვა, რისი ყურება ურჩევნიათ თქვენს თანატოლებს: ფილმების, სერიალებისა თუ ანიმაციების. დაამორგანიზეთ მონაცემები ცხრილში და წარმოადგინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია (წარმოადგინეთ ცხრილი, რომელშიც მოცემული იქნება პროცენტული განაწილება).

		სახეობა			
		კატა	ძაღლი	ჩიტი	**სულ**
სქესი	მდედრობითი				
	მამრობითი				
	სულ				

3. ჩაატარეთ გამოკითხვა, რომელი სოციალური ქსელი მოსწონთ მეტად თქვენს თანატოლებს. შეარჩიეთ 3 სოციალური ქსელი, შეაგროვეთ მონაცემები, დაამორგანიზეთ ცხრილში და წარმოადგინეთ შედეგების ინტერპრეტაცია.

		სოციალური ქსელი			
					სულ
სქესი	გოგოები				
	ბიჭები				
	სულ				

გამოწვევა: შეგიძლიათ მონაცემები წარმოადგინოთ, ასევე, სვეტებიანი დიაგრამის სახით და შეადაროთ გრაფიკულადაც.

კიდევ სცადეთ

4. სტუდენტებმა კოლეჯში ჩაატარეს გამოკითხვა: კვირაში რამდენ საათს ხარჯავენ საშინაო დავალებაზე? ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილით მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.

სავარჯიშოები

		საათები					
		< 1-ზე	1-2 საათი	3-4 საათი	5-6 საათი	6-ზე მეტი	სულ
კლასი	VI	18	53	45	20	6	142
	VII	21	48	42	27	12	150
	VIII	17	46	65	57	15	200
	სულ	56	147	152	104	33	492

გააანალიზეთ გამოკითხვის შედეგები; სიხშირის ცხრილის საფუძველზე შექმნით ცხრილი, რომელშიც ინფორმაცია იქნება წარმოდგენილი პროცენტებით და უპასუხეთ კითხვებს:

- სულ რამდენი მოსწავლე გამოიკითხა? რამდენი მე-8 კლასელი?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მე-7 კლასელები?
- საერთო რაოდენობის რა პროცენტი უთმობს დავალებების შესრულებას 5-6 საათს? აღნიშნული მონაცემიდან, რა პროცენტს შეადგენენ მე-8 კლასელები?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 3-4 საათს და არიან მე-6 კლასში?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 1-2 საათს და არიან მე-6 და მე-7 კლასებში?
- მოსწავლეთა საერთო რაოდენობის რამდენ პროცენტს შეადგენენ მოსწავლეები, რომლებიც საშინაო დავალების შესრულებას უთმობენ 6 საათზე მეტს და არიან მე-8 კლასში?
- ჭეშმარიტია თუ მცდარი შემდეგი წინადადება: „იმ მოსწავლეების რაოდენობა, რომლებიც საშინაო დავალებაზე ხარჯავენ 5-6 საათს, უფრო მეტია, ვიდრე მოსწავლეებისა, რომლებიც 1-2 საათს უთმობენ საშინაო დავალების მომზადებას“.

5. სტუდენტებმა კოლეჯში ჩაატარეს გამოკითხვა, რას ანიჭებდნენ უპირატესობას: თხილამურებით სრიალს, ციგებით სრიალს თუ ფიგურულ სრიალს. ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილით მოცემულია გამოკითხვის შედეგები.

	თხილამურები	ციგები	ფიგურული სრიალი	სულ
ბიჭები	19	24	9	52
გოგოები	12	15	26	53
სულ	31	39	35	105

გააანალიზეთ გამოკითხვის შედეგები; სიხშირის ცხრილის საფუძველზე შექმნით ცხრილი, რომელშიც ინფორმაცია იქნება წარმოდგენილი პროცენტებით და უპასუხეთ კითხვებს:

სავარჯიშოები

- სულ რამდენი სტუდენტი გამოიკითხა?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ გოგოები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ ფიგურულ სრიალს?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ ბიჭები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ თხილამურებით სრიალს?
- გამოკითხული სტუდენტების რამდენ პროცენტს შეადგენენ სტუდენტები, რომლებიც უპირატესობას ანიჭებენ ციგებით სრიალს?
- გამოკითხული მონაცემების საფუძველზე გაარკვიეთ რამდენი პროცენტით მეტ გოგოს მოსწონს ფიგურული სრიალი ვიდრე ციგებით სრიალი?
- დასვით დამატებითი კითხვები და უპასუხეთ.

6. დაგეგმეთ კვლევა თქვენთვის სიანტერესო თემებზე და წარმოადგინეთ ორგანზომილებიანი სიხშირის ცხრილის მეშვეობით.

2.3. პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი

მათემატიკის მოყვარულთათვის*

ტელესკოლა

9:30-დან განიხილება აღნიშნული საკითხი

როდესაც ორ ცვლად სიდიდეს შორის ვადგენთ კორელაციას, შესაძლებელია სიტუაციის აღწერა და წარმოდგენა დისკრეტული გრაფიკით; გამომდინარე იქიდან, თუ როგორ არის წერტილები განლაგებული სიბრტყეზე, შეგვიძლია სიტუაციის შეფასება მიახლოებითი გრაფიკის დახმარებით.

განვიხილოთ მისადაგების წრფე, რომელსაც ვაგებდით პირობითად, მონაცემებიდან აღებული ნებისმიერი ორი წერტილის შერჩევით; სხვადასხვა ადამიანმა, წერტილების განსხვავებული შერჩევის გამო, შესაძლებელია დახაზოს სხვადასხვა გრაფიკი და დაწეროს სხვადასხვა მისადაგების წრფის განტოლება;

იმისათვის, რომ კორელაციის შეფასება არ იყოს დამოკიდებული ადამიანის მიერ მონაცემებიდან შემთხვევით შერჩეულ წერტილებზე, შემოტანილია კორელაციის კოეფიციენტი r, რომლის გამოთვლის შემდეგ უკვე ნებისმიერი დამკვირვებელი ერთნაირად აღწერს კორელაციას სიდიდეებს შორის, რაც მეტად ობიექტურია.

მათემატიკოსმა კარლ პირსონმა შემოიღო კოეფიციენტი r, რომლის მნიშვნელობა მოთავსებულია –1-სა და 1-ს შორის $-1 \le r \le 1$; კოეფიციენტის მნიშვნელობით და ნიშნით შეიძლება დავადგინოთ, როგორია კორელაცია ცვლადებს შორის.

პირსონის კორელაციის გამოთვლა რთულია და მის გამოსათვლელად თანამედროვე ელექტრონული ტექნოლოგიებს იყენებენ.

მითითება:

არ გააიგივოთ პირსონის კორელაცია წრფის დახრილობასთან (კუთხურ კოეფიციენტთან); ის გამოითვლება რთული ფორმულით, რომელიც არ არის პროგრამაში, თუმცა მათემატიკის მოყვარულებმა შეგიძლიათ იხილოთ ქვემოთ.

საკვანძო კითხვა:

როგორ ვიპოვოთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი ტექნოლოგიების გამოყენებით?

იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია

ნაბიჯი 1:

ექსელის ცხრილში დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ($x;y$) წყვილები

x	y
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

ნაბიჯი 2:

მოვნიშნოთ ცხრილში მოცემული ინფორმაცია, დავიმახსოვროთ (ბრძანება Copy-ს მეშვეობით).

ნაბიჯი 4

მას შემდეგ, რაც ცხრილით შეიტანთ ინფორმაციას, მარჯვენა მხარეს გამოჩნდება ცხრილის შესაბამისი გრაფიკი.

ცხრილის შემდეგ ველში აკრიფეთ ბრძანება: Corr(x_1; y_1) ამის შემდეგ, მესამე ველში გამოჩნდება კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

ჩვენ მიერ განხილულ შემთხვევაში, კორელაციის კოეფიციენტის მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$r \approx 0.67$

გამომდინარე იქიდან, თუ რას უდრის პირსონის კოეფიციენტის მნიშნელობა, შეგვიძლია ცვლადებს შორის კორელაციის შეფასება.

ნაბიჯი 3:

შევიდეთ ვებ-გვერდზე

https://www.desmos.com/calculator

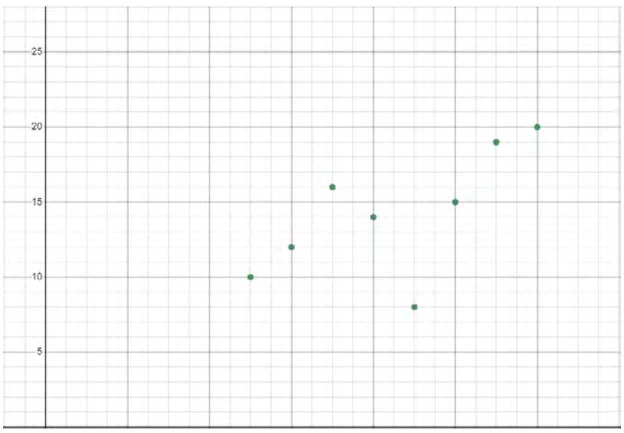
და მარცხენა სვეტში გადაიტანეთ დამახსოვრებული ინფომაცია ბრძანების (paste-ის მეშვეობით)

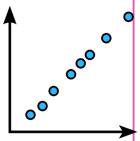
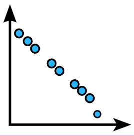
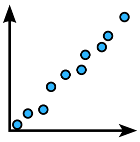
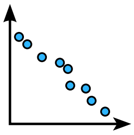
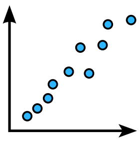
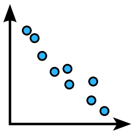
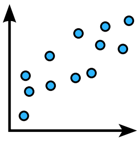
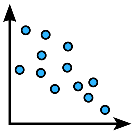
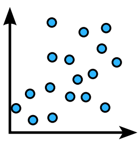
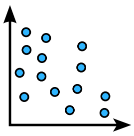
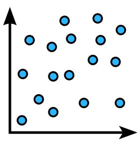
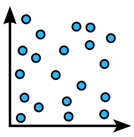
x_1	y_1
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

x_1	y_1
5	10
6	12
7	16
8	14
9	8
10	15
11	19
12	20

corr(x_1,y_1)

= 0.671936840905



დადებითი კორელაცია			უარყოფითი კორელაცია	
$r = 1$	სრულყოფილი დადებითი კორელაცია 		$r = -1$	სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია 
$0.95 \le r < 1$	ძალიან ძლიერი დადებითი კორელაცია 		$-1 < r \le -0.95$	ძალიან ძლიერი უარყოფითი კორელაცია 
$0.87 \le r < 0.95$	ძლიერი დადებითი კორელაცია 		$-0.95 < r \le -0.87$	ძლიერი უარყოფითი კორელაცია 
$0.7 \le r < 0.87$	ზომიერად დადებითი კორელაცია 		$-0.87 < r \le -0.7$	ზომიერად უარყოფითი კორელაცია 
$0.5 \le r < 0.7$	სუსტი დადებითი კორელაცია 		$-0.7 < r \le -0.5$	სუსტი უარყოფითი კორელაცია 
$0 \le r < 0.5$	ძალიან სუსტი დადებითი კორელაცია 		$-0.5 < r < 0$	ძალიან სუსტი უარყოფითი კორელაცია 

წყარო: *დიაგრამა აღებულია IB-ის წიგნიდან.*

თუ r = 0-ს ვამბობთ, რომ სიდიდეებს შორის კორელაცია არ არსებობს.

სავარჯიშოები

MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

როგორ ვიპოვოთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი ტექნოლოგიების გამოყენებით?

 იხილეთ ვიდეო ინსტრუქცია

1. ცხრილით მოცემულია ორ ცვლად სიდიდეს შორის კავშირი; ტექნოლოგიების მეშვეობით დაადგინეთ, არის თუ არა კორელაცია ცვლადებს შორის და თუ არის, როგორი?

ა)

x	y
1	8
2	8
3	10
4	15
5	13
6	12
7	18
8	16
9	20
10	20

ბ)

x	y
11	60
13	59
15	50
17	52
19	45
21	48
23	40
25	34
27	30
29	32

2. ცხრილში მოცემულია ტემპერატურა და კინოთეატრში გაყიდული ბილეთების რაოდენობა შესაბამისი დღის მიხედვით.

- მოცემული მონაცემების საფუძველზე შეადგინეთ წერტილოვანი დიაგრამა; დაადგინეთ, არის თუ არა კორელაცია ტემპერატურასა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის?
- იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი და იმსჯელეთ მოცემულ სიტუაციაზე.

ტემპერატურა (F^0)	გაყიდული ბილეთები
40	120
45	100
50	125
55	105
60	90
65	105
80	60
85	55
90	60
95	50

სავარჯიშოები

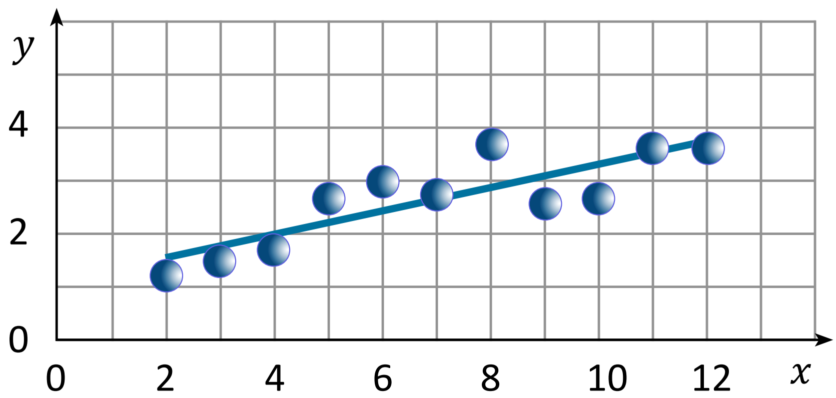
MATH Lab – ტექნოლოგიების გამოყენება

მას შემდეგ, რაც დაადგენთ კორელაციის კოეფიციენტს, უპასუხეთ კითხვებს:

- არის თუ არა კავშირი ამინდსა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის?
- რამდენად მნიშვნელოვანია, კონცერტის ორგანიზატორებმა ღონისძიების დაგეგმვამდე გაითვალისწინონ ამინდის ფაქტორი?
- თქვენზე რამდენად მოქმედებს ამინდის ფაქტორი?

3. თუ x წარმოადგენს წლებს, დაწყებული 2000 წლიდან 2012 წლამდე და y წარმოადგენს გაზის ფასს:

- გადაიტანეთ მონაცემები ცხრილში (მიახლოებით) და ტექნოლოგიების მეშვეობით იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი.
- თუ ფასის მატება გაგრძელდა აღნიშნული წესით, გამოთქვით ვარაუდი, რა შეიძლება იყოს გაზის ფასი 2025 წელს? 2030 წელს?



4. გამოკითხეთ თქვენ ირგვლივ თანატოლები, ჰკითხეთ სიმაღლე და ფეხის ზომა, განათავსეთ მონაცემები ცხრილში და დაადგინეთ, როგორი კორელაციაა სიმაღლესა და ფეხის ზომას შორის?

5. ჩაატარეთ კვლევა, ჰკითხეთ თანატოლებს, რა ქულებს იღებენ მათემატიკასა და ქართულში; დაადგინეთ, არის თუ არა კორელაცია ნიშნებს შორის და გააკეთეთ დასკვნა;

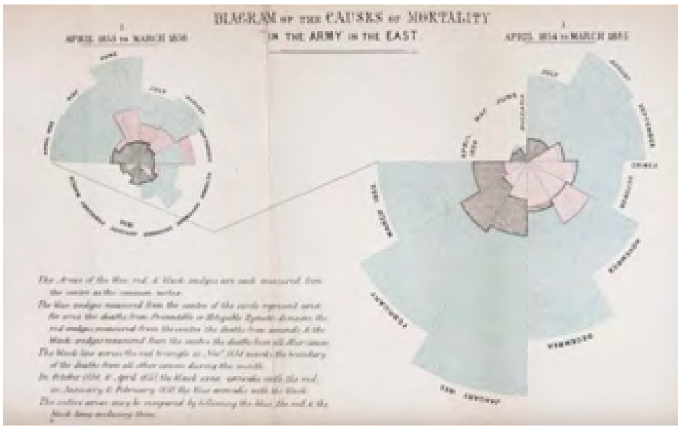
6. **რეკომენდაცია:** თქვენ მიერ დაორგანიზებულ კვლევებში თუ არის შესაძლებელი დადგინდეს კორელაცია ცვლადებს შორის, გამოიყენეთ აღნიშნული ცოდნა.

ეს საინტერესოა!

ფლორენს ნაიტინგეილი (1820-1910) – ინგლისელი სტატისტიკოსი, რომელმაც ჩაუყარა საფუძველი მედდის პროფესიას.

ფლორენს ნაიტინგეილი ერთ-ერთი პირველი იყო, ვინც ეფექტურად იყენებდა ინფოგრაფიკებს, გრაფიკულ პრეზენტაციებსა და სტატისტიკურ მონაცემებს. ასევე, ქმნიდა ახალ დიაგრამებსა და წარმოდგენის ფორმებს.

ქვემოთ მოცემული დიაგრამა შექმნილია ფლორენსის მიერ, მან, აღნიშნული დიაგრამით, ომის დროს გარდაცვლილების სხვადასხვა მიზეზი წარმოადგინა.



ფლორენს ნაიტგეილს მოღვაწეობა იყო მრავალმხრივი და საინტერესო.

იხილეთ დამატებითი ინფორმაცია

ინტეგრირება ინგლისურთან

2.4. დისპერსია და სტანდარტული გადახრა

ჩვენ უკვე ვიცით გაფანტულობის ორი საზომი: დიაპაზონი და IQR (კვარტილშორისი სხვაობა). ორივე მათგანი გამოთვლისას ითვალისწინებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას. ძალიან ხშირად ეს ორი მნიშვნელობა შეიძლება არც იყოს ხელმისაწვდომი, ამიტომ საჭიროა გაფანტულობის ისეთი საზომი, რომელიც გაითვალისწინებს ყველა მნიშნელობას. ამგვარად, ჩვენ გვინდა შემოვიღოთ (განვიხილოთ) გაფანტულობის ალტერნატიულო საზომი დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

პოპულაციის დისპერსია და სტანდარტული გადახრა

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ მონაცემთა სიმრავლის **პოპულაციის დისპერსია** არის

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$$

სადაც μ არის პოპულაციის საშუალო და n არის მოცულობა ანუ მონაცემთა რაოდენობა. შევნიშნოთ, რომ თუ x_i მნიშვნელობები იქნება ახლოს μ-ს მნიშვნელობასთან, შემდეგ $(x_i - \mu)^2$ იქნება მცირე და დისპერსიაც იქნება მცირე.

სტანდარტული გადახრა კი არის კვადრატული ფესი დისპერსიიდან.

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ მონაცემთა სიმრავლის პოპულაციის სტანდარტული გადახრა არის:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}$$

კვადრატული ფესვის ამოღება სტანდარტულ გადახრაში გამართლებულია იმით, რომ ის იყოს იგივე ერთეულებში, რაც მონაცემები. მაგალითად, თუ x_i არის მასა კგ-ში, დისპერსია უნდა იყოს კგ^2 და σ უნდა იყოს კგ.

სტანდარტული გადახრა არის არამდგრადი გაფანტულობის საზომი. ვინაიდან ის დამოკიდებულია საშუალოზე და ექსტრემალური მნიშვნელობები მოგვცემს $(x_i - \mu)^2$-ის დიდ მნიშვნელობებს. ამიტომ, მისი გამოყენება მიზანშეწონილია, როდესაც განაწილება დაახლოებით სიმეტრიულია. თუ განაწილება ასიმეტრიულია, მაშინ გაფანტულობის საზომად უფრო უპრიანია IQR (კვარტილშორისი სხვაობა).

ხშირად დისპერსიის და სტანდარტული გადახრის გამოსათვლელად სარგებლობენ სპეციალური ფუნქციების მქონე კალკულატორებით.

განვიხილოთ მაგალითი. შემდეგი მონაცემებისთვის

3 12 8 15 7

გამოვთვალოთ პოპულაციის დისპერსია და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა. საშუალო $\mu = \dfrac{3 + 12 + 8 + 15 + 7}{5} = 9.$

პოპულაციის დისპერსია $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$

$= \dfrac{86}{5}$.

$= 17.2.$

პოპულაციის სტანდარტული გადახრა $\sigma = \sqrt{17.2}$

≈ 4.15

უნდა შევნიშნოთ, რომ შერჩევისათვის დისპერსია და სტანდარტული გადახრა ტექნიკურად განიმარტება იმავენაირად, როგორც პოპულაციისთვის. თუმცა, არის პატარა განსხვავება, რასაც ახლა აქ არ განვიხილავთ. შერჩევის დისპერსია აღინიშნება s^2 სიმბოლოთი, ხოლო შერჩევის სტანდარტული გადახრა s-ით.

x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
3	−6	36
12	3	9
8	−1	1
15	6	36
7	−2	4
	სულ	86

სავარჯიშოები

1. განვიხილოთ შემდეგ მონაცემთა სიმრავლეები:

მონაცემთა სიმრავლე A: 10 7 5 8 10

მონაცემთა სიმრავლე B: 4 12 11 14 16

ა) აჩვენეთ, რომ თითოეული სიმრავლის საშუალო არის 8.

ბ) რომელ სიმრავლეს აქვს მეტი გაფანტულობა? ახსენი შენი პასუხი.

გ) თითოეული სიმრავლისთვის იპოვეთ დისპერია და სტანდარტული გადახრა. გამოიყენეთ ტექნოლოგიები თქვენი პასუხის შესამოწმებლად.

2. ქვემოთ მოცემულია ცხოველების რაოდენობა, რომელიც ჰყავს კლასის თითოეულ მოსწავლეს.

0	2	3	1	2	4	0	0	1	5	2	3	6
2	3	1	1	0	4	1	1	0	2	1	2	0

ა) გამოიყენეთ ტექნოლოგია და იპოვეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა.

ბ) იპოვეთ პოპულაციის დისპერსია.

3. ოლიმპიური ნაკრების წევრების ასაკებია: 22, 25, 23, 28, 29, 21, 20, 26

ა) გამოთვალეთ საშუალო და პოპულაციის სტანდარტული გადახრა მოცემული ჯგუფისთვის.

ბ) იგივე ნაკრების წევრები 4 წლის შემდეგ ისევ იქნა შერჩეული ოლიმპიური თამაშებისთვის. გამოთვალეთ საშუალო და პოპულაციის სტანდარტული გადახრა მათი ასაკებისთვის.

გ) როგორ განაზოგადებდით ამ შედეგს?

4. საავადმყოფომ შეარჩია 20 პაციენტი და ჰკითხა მათ, რამდენ ჭიქა წყალს სვამენ ისინი დღის განმავლობაში. შედეგები წარმოდგენილია ქვემოთ:

5	2	1	0	4	1	0	2	7	4
8	2	7	6	1	2	3	8	0	2

იპოვეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა ამ მონაცემებისთვის.

5. ქვემოთ მოცემულია გიორგისა და თამარის მიერ 14 დღის განმავლობაში დავალების შესასრულებლად დახარჯული საათები.

გიორგი	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	3	$1\frac{1}{2}$	3	4	$2\frac{1}{2}$	4	4	3
თამარი	$2\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	2	2	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	2	$2\frac{1}{2}$	2	2	2	$1\frac{1}{2}$

ა) გამოთვალეთ თითოეული პირისთვის საშუალო.

ბ) ვინ ანდომებს დავალების შესრულებას მეტ დროს?

გ) გამოთვალეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა თითოეული პირისთვის.

დ) რომელი პიროვნება სწავლობს უფრო თანმიმდევრულად?

6. მარიამს სურს შეადაროს თავის სკოლაში ბიჭებისა და გოგონების ცურვის სიჩქარეები. მან შერჩევით შეარჩია 10 ბიჭი და 10 გოგონა და ჩაიწერა მათ მიერ 25 მეტრიანი აუზის გაცურვისას დახარჯული დროები წამებში:

ბიჭები:	32.2	26.4	35.6	30.8	28.5	40.2	27.3	38.9	29.0	31.3
გოგონები:	36.2	33.5	28.1	39.8	31.6	35.7	37.3	36.0	39.7	29.8

სავარჯიშოები

ა) გადაიხაზეთ და დაასრულეთ ცხრილი:

	ბიჭები:	გოგონები:
საშუალო $\bar{x}$		
მედიანა		
სტანდარტული გადახრა		
დიაპაზონი		

ბ) 1. რომელი ჯგუფია უფრო სწრაფი?
2. რომელ ჯგუფს აქვს უფრო მეტი სიჩქარის გაფანტულობა?

გ) როგორ შეუძლია მარიამს გააუმჯობესოს თავისი მიგნებების საიმედოობა?

7. მოცემული მონაცემებისთვის იპოვეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა

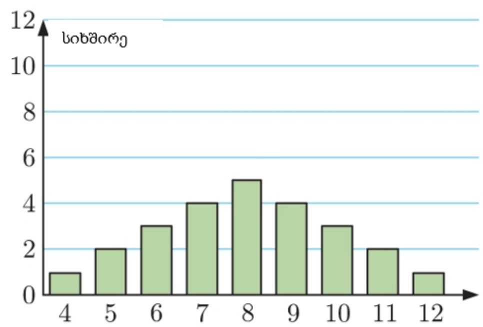
მნიშვნელობა	სიხშირე
3	1
4	3
5	11
6	6

8. ქვემოთ მოცემული მონაცემებისთვის იპოვეთ საშუალო და პოპულაციის სტანდარტული გადახრა.

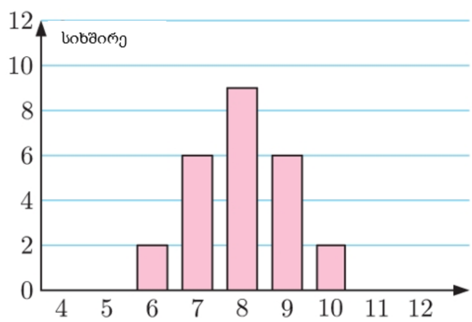
ასაკი	11	12	13	14	15	16	17	18
სიხშირე	2	1	4	5	6	4	2	1

9. ქვემოთ მოცემულია ორი განაწილების სვეტოვანი გრაფიკები

მონაცემთა სიმრავლე A



მონაცემთა სიმრავლე B



ა) დააკვირდით გრაფიკებს, რომელ განაწილებას აქვს გაწელილი გაფანტულობა?

ბ) იპოვეთ თითოეული განაწილების საშუალო.

გ) მონაცემთა თითოეული სიმრავლისთვის იპოვეთ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა. რა კომენტარს გაუკეთებთ პასუხებს.

დ) ამ ორი განაწილების სხვა მახასიათებლები მოცემულია ქვემოთ ცხრილის სახით.

სავარჯიშოები

სიმრავლეები	დიაპაზონი	IQR
A	8	3
B	4	2

რა შემთხვევაში იძლევა სტანდარტული გადახრა უკეთეს აღწერას იმისას, თუ როგორაა განაწილე-ბული მონაცემები?

განვიხილოთ მაგალითი. მოცემული განაწილებისთვის შეაფასე საგამოცდო ქულის სტანდარტული გადახრა.

ქულა	სიხშირე
0 – 9	1
10 – 19	1
20 – 29	2
30 – 39	4
40 – 49	11

ქულა	სიხშირე
50 – 59	16
60 – 69	24
70 – 79	13
80 – 89	6
90 – 99	2

ამოხსნა:

კლას-ინტერვალი	ინტერვალის შუა წერტილი	სიხშირე
0 – 9	4.5	1
10 – 19	14.5	1
20 – 29	24.5	2
30 – 39	34.5	4
40 – 49	44.5	11
50 – 59	54.5	16
60 – 69	64.5	24
70 – 79	74.5	13
80 – 89	84.5	6
90 – 99	94.5	2

სტანდარტული გადახრა ≈ 16.8.

10. ქვემოთ ცხრილში მოცემულია 30 შემთხვევით შერჩეული ახალშობილის სიმაღლეები 12 დღის განმავლობაში. მოცემული მონაცემებისთვის შეაფასე:

სიგრძე (Lსმ)	სიხშირე
$40 \le L < 42$	1
$42 \le L < 44$	1
$44 \le L < 46$	3
$46 \le L < 48$	7
$48 \le L < 50$	11
$50 \le L < 52$	5
$52 \le L < 54$	2

სავარჯიშოები

ა) საშუალო

ბ) სტანდარტული გადახრა

11. ქვემოთ მოცემულია შემთხვევით შერჩეული 200 მუშის კვირის შემოსავალი. მოცემული მონაცემებისთვის შეაფასე:

შემოსავალი (\$*w*)	მუშების რაოდენობა
$720 \le w < 740$	17
$740 \le w < 760$	38
$760 \le w < 780$	47
$780 \le w < 800$	57
$800 \le w < 820$	18
$820 \le w < 840$	10
$840 \le w < 860$	10
$860 \le w < 880$	3

ა) საშუალო

ბ) სტანდარტული გადახრა

2.5. მკვეთრად გადახრილი მონაცემები* (დამატებითი მასალა)

მონაცემები, რომლებიც მკვეთრად განსხვავდება ძირითადი მონაცემებისგან სტატისტიკაში ცნობილია Outliers-ის სახელით. ქართულად კი ჩვენ მათ ვუწოდებთ მკვეთრად გადახრილ მონაცემებს ან ზოგჯერ ამოვარდნილ მონაცემებს. თვალის ერთი შეხედვით ადვილად შეგვიძლია დავადგინოთ მკვეთრად გადახრილი მონაცემები თუ პირდაპირ შევხედავთ მონაცემებს ან სვეტოვან გრაფიკს.

თუმცა, ქვემოთ შემოგთავაზებთ სტატისტიკაში ფართოდ გავრცელებულ წესს, რომელიც დაგვეხმარება მკვეთრად გადახრილი მონაცემების დადგენაში. ამისთვის დაგვჭირდება ზედა და ქვედა საზღვრების პოვნა:

$$UB = Q_3 + 1.5 \cdot IQR,$$
$$LB = Q_1 - 1.5 \cdot IQR.$$

სადაც *UB*-ით აღვნიშნავთ ზედა საზღვარს, *LB*-ით ქვედა საზღვარს, Q_1– ქვედა კვარტილი (მარცხენა ნახევრის მედიანა), Q_3– ზე და კვარტილი (მარჯვენა ნახევრის მედიანა), ხოლო *IQR* არის კვარტილშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

მკვეთრად ამოვარდნილი მონაცემები არის ნებისმიერი მონაცემი, რომელიც მეტია *UB*-ზე და ნაკლებია *LB*-ზე და მათ ბოქს-პლოტზე აღნიშნავენ ვარსკვლავად. შესაძლებელია იყოს ერთზე მეტი მკვეთრად ამოვარდნილი მონაცემი.

განვიხილოთ მაგალითი.

მოცემული მონაცემებისთვის ააგეთ ბოქს-პლოტ დიაგრამა და იპოვეთ მკვეთრად ამოვარდნილი მონაცემები

3, 7, 8, 8, 5, 9, 10, 12, 14, 7, 1, 3, 8, 16, 8, 6, 9, 10, 13, 7.

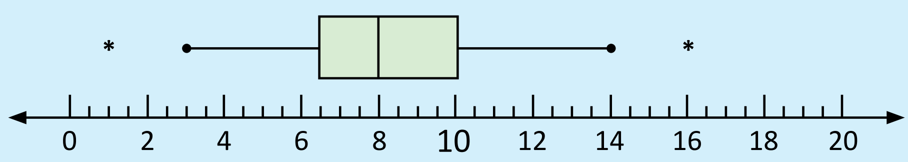
დავალაგოთ ეს მონაცემები ზრდის მიხედვით:

1   3 3 5   6 7   7 7 8   8 8   8 9 9   10 10   12 13 14   16 $\{n = 20\}$

min = 1 $Q_1 = 6.5$ mediana = 8 $Q_3 = 10$ max = 16

მკვეთრად გადახრილი მონაცემების პოვნის წესი:

$$UB = Q_3 + 1.5 \cdot IQR = 10 + 1.5 \cdot 3.5 = 15.25,$$
$$LB = Q_1 - 1.5 \cdot IQR = 6.5 - 1.5 \cdot 3.5 = 1.25.$$



16 არის ზედა საზღვარზე 15,25-ზე მეტი, ე.ი. ის არის მკვეთრად გადახრილი მონაცემი.
1 არის ქვედა საზღვარზე 1.25-ზე ნაკლები, ე.ი. ის არის მკეთრად გადახრილი მონაცემი.

სავარჯიშოები

1. მოცემულია შერჩევა, რომლის ქვედა კვარტილი = 31.5, მედიანა = 37 და ზედა კვარტილი = 43.5.

(ა) გამოთვალეთ მოცემული შერჩეისათვის კვარტილშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

(ბ) გამოთვალეთ ზედა და ქვედა საზღვრები და დაადგინეთ მკვეთრად გადახრილი მონაცემები.

(გ) მოცემული შერჩევისათვის უმცირესი მნიშვნელობებია 13 და 20, ხოლო უდიდესი – 52 და 55. რომელი მათგანი არის მკვეთრად გადახრილი მონაცემი?

(დ) ააგე ბოქს-პლოტ დიაგრამა.

2. ჯეიმი 25 დღის განმავლობაში უყურებს ჩიტებს, მის მიერ ყოველდღე ნანახი ჩიტების რაოდენობაა:

12, 5, 13, 16, 8, 10, 12, 18, 9, 11, 14, 14,

22, 9, 10, 7, 9, 11, 13, 7, 10, 6, 13, 3, 8.

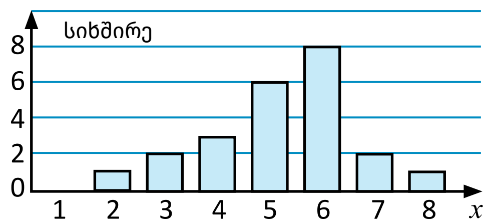
(ა) მოცემული მონაცემებისთვის იპოვე მედიანა, ქვედა კვარტილი და ზედა კვარტილი.

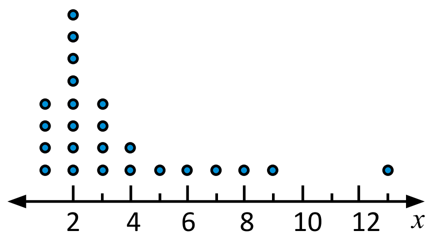
(ბ) იპოვე კვარტილშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

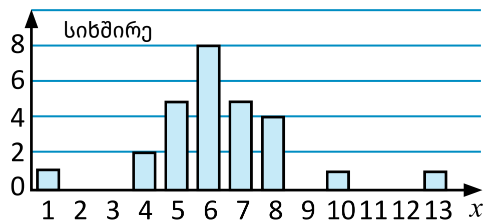
(გ) იპოვე ქვედა საზღვარი, ზედა საზღვარი და დაადგინე მკვეთრად გადახრილი მონაცემები.

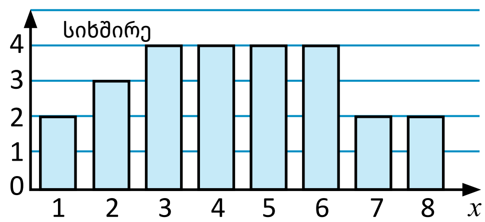
(დ) ააგე ბოქს-პლოტ დიაგრამა.

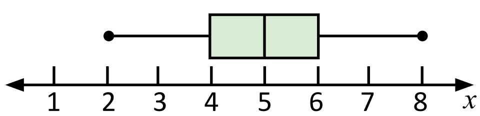
3. დააკავშირე თითოეული გრაფიკი შესაბამის ბოქს-პლოტს.

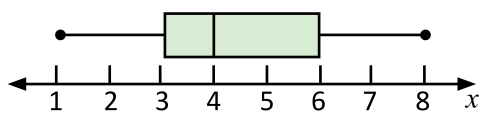
ა


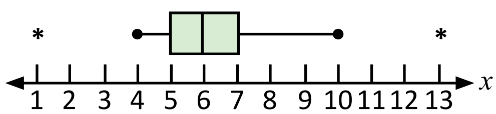
ბ


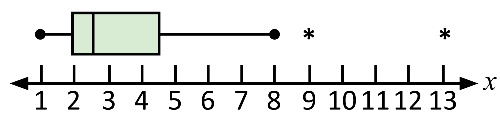
გ


დ


ა


ბ


გ


დ


სავარჯიშოები

4. ქვემოთ მოცემულია ორი უძრავი ქონების სააგენტოს მიერ 2018 წლის განმავლობაში თითო-ეულ კვირაში გაყიდული სახლების რაოდენობა:

2	2	1	3	2	2	2	2	1	4	1	5	1
1	1	2	2	2	3	1	7	2	2	2	0	2
2	4	4	3	3	1	0	2	4	1	2	1	3
0	2	3	1	2	1	3	4	2	2	2	1	3

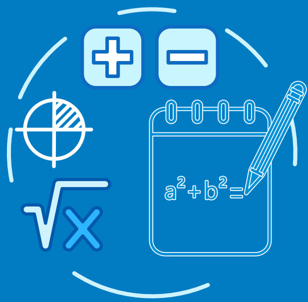
(ა) ააგეთ სვეტოვანი დიაგრამა მოცემული მონაცემებისთვის.

(ბ) სვეტოვანი გრაფიკიდან შეგიძლიათ დაადგინოთ რაიმე მკეთრად გადახრილი მონაცემი?

(გ) გამოთვალეთ ქვედა საზღვარი, ზედა საზღვარი და შეამოწმეთ მკვეთრად გადახრილი მონაცე-მი. შეადარეთ შენი პასუხი (ბ)-ს.

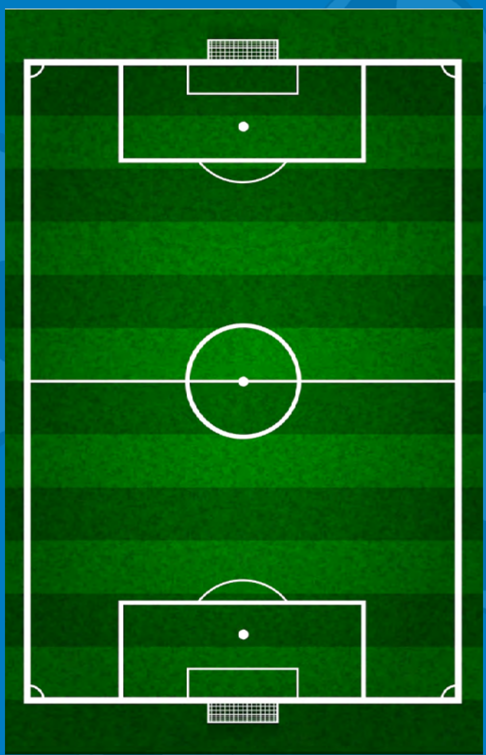
(დ) ააგეთ ბოქს-პლოტი.

III. დავალების წარდგენა



იცით თუ არა,

რომ ფეხბურთის ძირითად შემადგენლობაში თამაშობს 11 მოთამაშე, გუნდში კიდევ არიან დამატებითი მოთამაშეები, რომლებმაც შეიძლება შეცვალონ ძირითადი მოთამაშეები. თუ სათადარიგო მოთამაშეებიანად გუნდში არის 16 მოთამაშე, მწვრთნელს შეუძლია სხვადასხვა შემადგენლობა დააკომპლექტოს და ისე ათამაშოს გუნდი.



პროექტი

საკვანძო კითხვა:

თუ გიფიქრიათ რამდენი სხვადასხვა წესით არის შესაძლებელი გუნდების დაკომპლექტება? რაზე შეიძლება იყოს დამოკიდებული გუნდების შედგენის წესი?

თქვენი დავალება

შეისწავლოთ მათემატიკის კურსიდან: გადანაცვლება, ჯუფთება და წყობა. წარმოიდგინოთ, რომ ხართ რომელიმე სპორტული გუნდის მწვრთნელი და გყავთ დასაკომპლექტებელი გუნდი. დაითვალეთ ვარიანტები:

1. თუ სათადარიგო მოთამაშეებთან ერთად გუნდში გყავთ 16 მოთამაშე, ხოლო მოედანზე სათამაშოდ უნდა შევიდეს 11 მოთამაშე, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს იმისათვის, რომ დააკომპლექტოთ გუნდი?
2. თუ სათადარიგო მოთამაშეებთან ერთად გუნდში გყავთ 16 მოთამაშე, აღნიშნული 16-დან 6 ყოველთვის არის ძირითად შემადგენლობაში და დასამატებელი გყავთ 5 მოთამაშე, რამდენი ვარიანტი არსებობს, რომ შეარჩიოთ 5 მოთამაშე?
3. თუ დავუშვებთ, რომ 11 კაციანი შემადგენლობიდან ყველა ერთნაირი წარმატებით თამაშობს ყველა პოზიციაზე, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს მათი გადანაცვლების და გუნდის დაკომპლექტების?
4. თუ გუნდში 6 ადამიანიდან 2 უნდა იყოს თავდამსხმელი, რამდენი სხვადასხვა 2-ის ამორჩევაა შესაძლებელი?
5. რატომ არის მნიშვნელოვანი მწვრთნელისთვის ვარიანტების დათვლა?
6. შექმენით მსგავსი დავალება თქვენთვის საინტერესო თემაზე, სადაც საჭირო იქნება ვარიანტების დათვლა.

გაგრძელება

III. დავალების წარდგენა

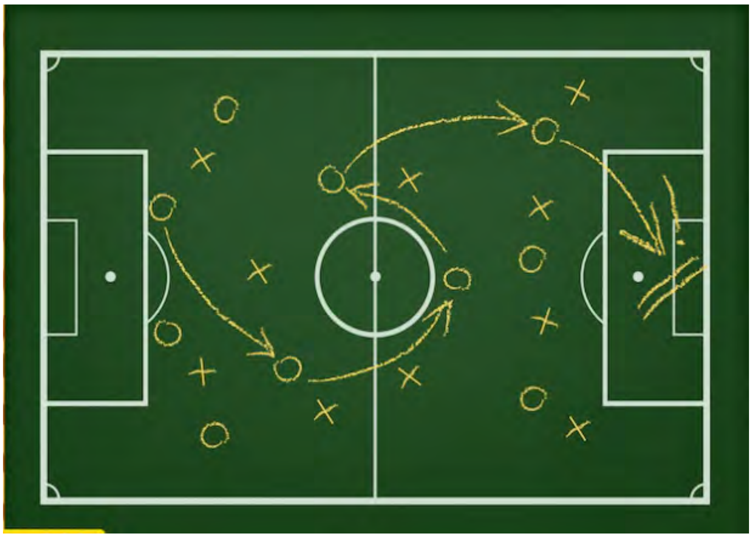
პროექტი

თქვენი დავალება

დავალება წარმოადგინეთ რეფერატის სახით

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

1. როგორ გვეხმარება კომბინატორიკა, ვარიანტების დათვლა, გადაწყვეტილების მიღებაში?
2. რა ძირითადი განსხვავებაა წყობასა და ჯუფთებას შორის? მოიყვანეთ მაგალითები.
3. დავალებაში მოცემული N2, 3 და 4 კითხვებზე პასუხის გასაცემად რომელი მათემატიკური მოდელები გამოიყენეთ?
4. იმსჯელეთ მიღებული ცოდნის მნიშვნელობაზე ყოველდღიურ ცხოვრებაში.
5. მოიფიქრეთ რაიმე ანალოგიური ამოცანა, სადაც შეიძლება გამოიყენოთ მიღებული ცოდნა.



თემა 3. კომბინატორიკა

3.1. ვარიანტების დათვლა, ვარიანტების დათვლის გამრავლების წესი

კომბინატორიკა – მათემატიკის ნაწილია, რომელიც შეისწავლის სასრული რაოდენობის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციების შედგენისა და მათი რაოდენობის დადგენის წესებს. მათემატიკის ეს დარგი ფართოდ გამოიყენება ალბათობის თეორიაში, მათემატიკურ ლოგიკასა და სხვა მეცნიერებებში.

- *როგორ არის შესაძლებელი რაიმე ყოფით სიტუაციაში შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის დათვლა?*

ნიმუში 1

სიტუაცია 1:

დავუშვათ, თაროზე არის ორი წიგნი: **წიგნი N1 და წიგნი N2** და სტუდენტმა თანმიმდევრობით უნდა აირჩიოს ორი წიგნი;

რა არჩევანი აქვს სტუდენტს?

ჯერ წიგნი N1 და შემდეგ წიგნი N2,

ან

ჯერ წიგნი N2 და შემდეგ წიგნი N1.

ანუ არის არჩევანის მხოლოდ ორი ვარიანტი

სიტუაცია 2:

თაროზე არის 5 წიგნი და სტუდენტს აქვს შესაძლებლობა აირჩიოს ნებისმიერი 2 წიგნი თაროდან, რამდენი ვარიანტი არსებობს მისი არჩევანის გაკეთების?

მარჯვნივ მოცემულია დიაგრამა, რომელიც გვიადვილებს ვარიანტების დათვლას:

მას შეუძლია აირჩიოს ჯერ N1 და შემდეგ N2, ან პირიქით, ამიტომ ეს ორი ვარიანტი ითვლება 1 არჩევანად, იმიტომ, რომ ამ შემთხვევაში არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას;

დავითვალოთ ვარიანტები და მივიღებთ, რომ სულ 10 სხვადასხვა ვარიანტია, რომლის მიხედვითაც სტუდენტმა შეიძლება აირჩიოს ორი წიგნი.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	~~2.1~~		2.3	2.4	2.5
3	~~3.1~~	~~3.2~~		3.4	3.5
4	~~4.1~~	~~4.2~~	~~4.3~~		4.5
5	~~5.1~~	~~5.2~~	~~5.3~~	~~5.4~~	

ნიმუში 2

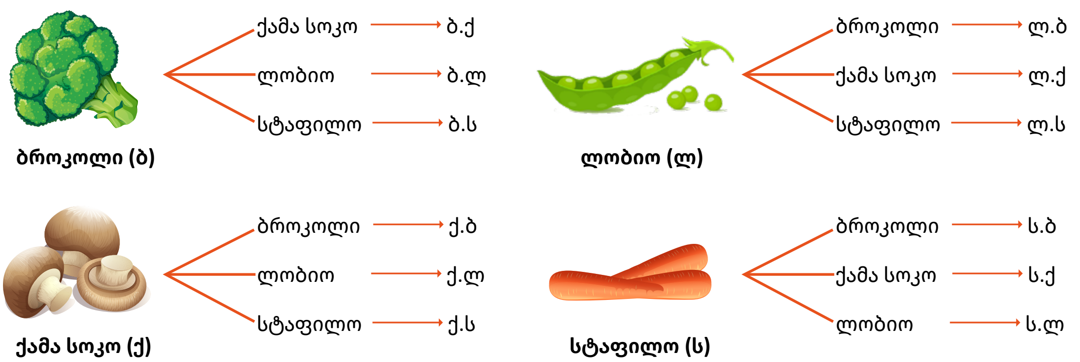
მაღაზიაში 4 სახეობის ბოსტნეულია: ბროკოლი, ქამა სოკო, ლობიო და სტაფილო; მყიდველს სურს იყიდოს მხოლოდ 2 სახეობა; რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთება შეუძლია?

სიტუაციის გააზრება:

იმისათვის, რომ დავითვალოთ ვარიანტები, სასურველია სიტუაციის ვიზუალიზაცია გარკვეული დიაგრამით; ქვემოთ გამოყენებულ დიაგრამას, ხისებრი დიაგრამა ეწოდება.

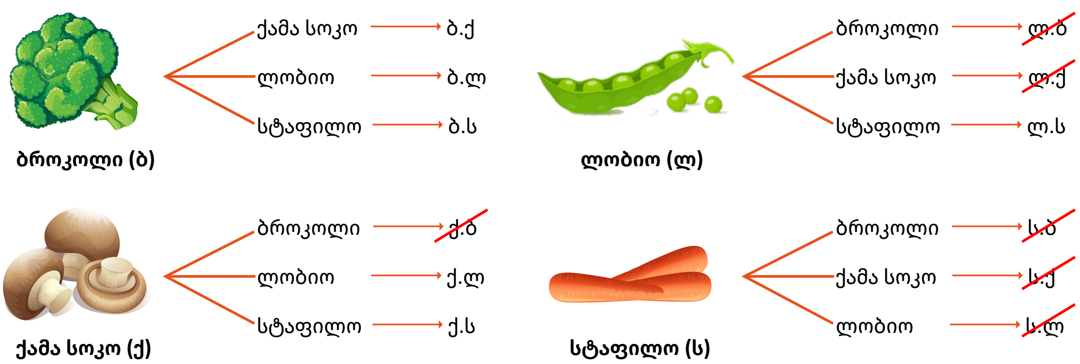
შემოვიტანოთ აღნიშვნები და განვიხილოთ ვარიანტები:

მაგალითად, თუ პირველი არჩევანია ბროკოლი, მეორე შეიძლება იყოს ქამა სოკო, ლობიო ან სტაფილო და ა.შ.



სულ არსებობს 12 ვარიანტი.

მაგრამ თუ დავაკვირდებით დიაგრამას დავინახავთ, რომ გარკვეული წყვილი მეორდება; გამომდინარე იქიდან, რომ არჩევანის გაკეთების დროს არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას, გადავხაზოთ ის წყვილები, რომლებიც მეორდებიან და განვაახლოთ დიაგრამა.



მივიღეთ 6 სხვადასხვა წყვილი; ე.ი. მაღაზიაში მყიდველს შეუძლია გააკეთოს 6 სხვადასხვა არჩევანი.

გამრავლების წესი:

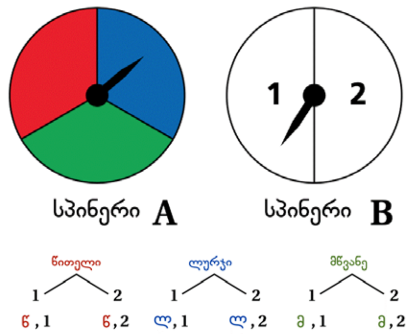
ნიმუში 3

განვიხილოთ ორი ბზრიალა A და B (ე.წ. ორი სპინერი);

A-ს აქვს 3 დანაყოფი, რომლის ფერებია: წითელი, მწვანე და ლურჯი;

B-ს აქვს 2 დანაყოფი, რომელსაც აწერია რიცხვები 1 და 2;

დავუშვათ, ორივე ბზრიალას ვატრიალებთ, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მივიღოთ ორივეს გაჩერებისას?



დიაგრამიდან ცხადად ჩანს, რომ შესაძლებელია 6 სხვადასხვა ვარიანტის განხორციელება.

ნიმუში 4

განვიხილოთ მათემატიკური ამოცანა: გვაქვს ხუთი ციფრი 2;3;5;7;8. საჭიროა, ამ ციფრებით შევადგინოთ სამნიშნა რიცხვები, ისე, რომ ციფრები არ განმეორდეს. რამდენი ასეთი რიცხვის შედგენა შეიძლება ამ ციფრებით?

კიდევ სცადეთ

ცხადია, სამნიშნა რიცხვისთვის გვჭირდება სამი ციფრი, რომლებიც უნდა ჩავწეროთ ასეულების, ათეულების და ერთეულების შესაბამის სათანრიგო პოზიციაზე.

ასეულები	**ათეულები**	**ერთეულები**

ასეულების თანრიგში შეიძლება ჩაიწეროს მოცემული ხუთი ციფრიდან ნებისმიერი ერთი, ე.ი. გვაქვს ამორჩევის ხუთი ვარიანტი. ათეულების თანრიგში, რადგან ციფრების გამეორება არ შეიძლება, შეიძლება ჩაისვას უკვე ოთხი დარჩენილი ციფრიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს ჩასმის ოთხი ვარიანტი. საბოლოოდ, ერთეულების თანრიგში შეიძლება ჩავწეროთ დარჩენილი სამი ციფრიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს სამი ვარიანტი.

საბოლოოდ, გამრავლების წესის გამოყენებით, საძიებელი სამნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება: $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ 60 სამნიშნა რიცხვი: 235; 237; 238; 253; 257 და ა.შ.

საზოგადოდ, თუ რაიმე ობიექტი შეიძლება შეირჩეს m სხვადასხვა გზით, ხოლო ყოველი ასეთი შერჩევის შემდეგ შეიძლება შეირჩეს მეორე ობიექტი k სხვადასხვა გზით, მაშინ პირველი და მეორე ობიექტების თანმიმდევრობით შერჩევათა რაოდენობა n იქნება.

$n = m \cdot k$. ამ წესს უწოდებენ გამრავლების წესს.

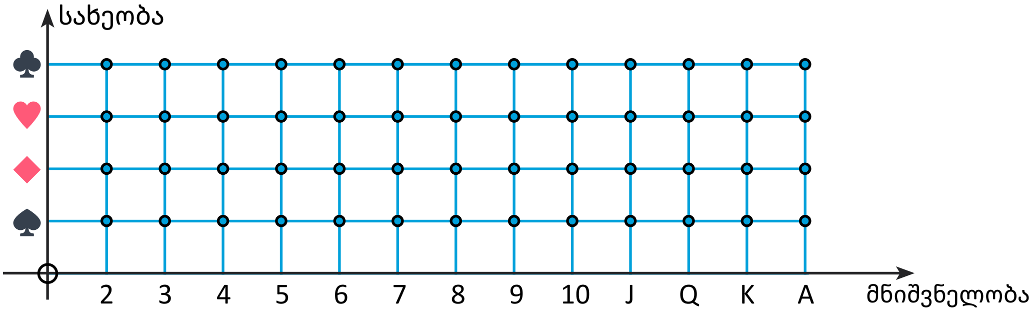
სავარჯიშოები

1. მაღაზიაში არის 5 სახეობის ხილი: ვაშლი, მსხალი, ბანანი, ატამი, ქლიავი; მომხმარებელს სურს ნებისმიერი ორის არჩევა:

- გააკეთეთ დიაგრამა, რომელზეც ნაჩვენები იქნება, თუ მომხმარებელს სურს აირჩიოს ნებისმიერი ორი სახეობა. რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთებაა შესაძლებელი?
- თუ ერთ-ერთი ხილი აუცილებლად უნდა იყოს ვაშლი, რამდენი სხვადასხვა არჩევანის გაკეთებას შეძლებს მომხმარებელი?

2. ქვემოთ მოცემულია 2-განზომილებიანი დიაგრამა; ბადე გვიჩვენებს ბანქოს დასტიდან შემთხვევით ერთი ბარათის ამოღებისას მისაღებ ყველა შესაძლო შემთხვევას.

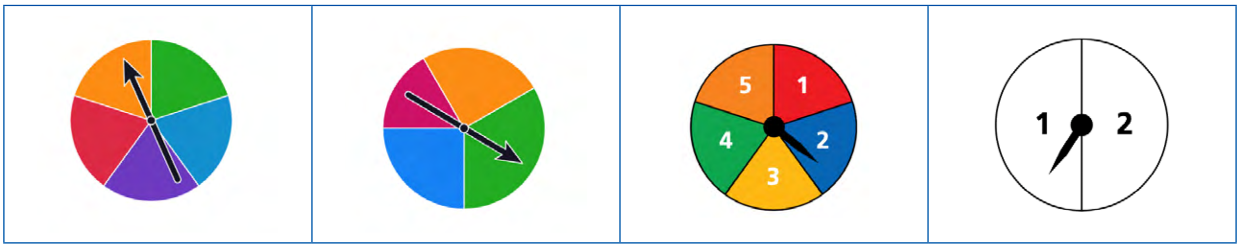
J – ვალეტი
Q – ქალი
K – მეფე
A – ტუზი
♣ – ჯვარი
♠ – ყვავი
♦ – აგური
♥ – გული



- სულ რამდენი შესაძლო შემთხვევაა?

3. დიაგრამაზე მოცემულია ბზრიალა; მათი დატრიალების შემდეგ, რამდენი სხვადასხვა ვარიანტია, რომ გაჩერდეს ისარი?

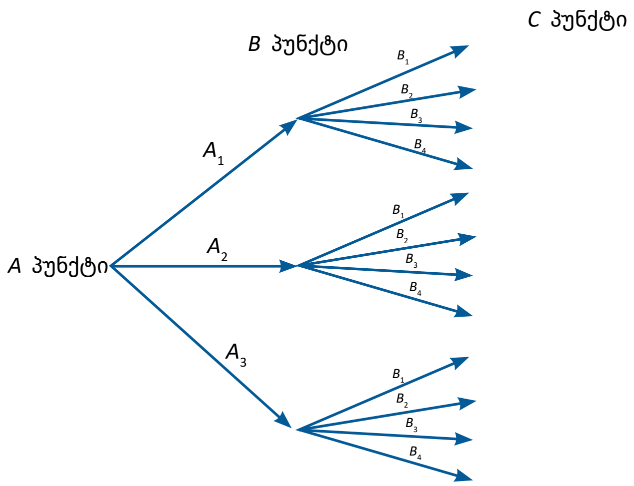
ა) ბ) გ) დ)



4. ტურისტული კომპანია მომხმარებელს სთავაზობს დაცული ტერიტორიების დათვალიერებას შემდეგი პირობებით: მარშრუტის საწყისი A პუნქტიდან B შუალედურ პუნქტამდე არის სამი მარშრუტი, ხოლო B შუალედური პუნქტიდან საბოლოო C პუნქტამდე არის კიდევ ოთხი მარშრუტი. მომხმარებელმა უნდა შეარჩიოს ერთი ისეთი მარშრუტი, რომ საწყისი A პუნქტიდან მივიდეს საბოლოო C პუნქტამდე, ოღონდ აუცილებლად უნდა გაიაროს B შუალედური პუნქტი. რამდენი ასეთი მარშრუტის არჩევის შესაძლებლობა აქვს მომხმარებელს?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. შემოვიტანოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, საწყისი A პუნქტიდან B შუალედურ პუნქტამდე მისასვლელი სამი მარშრუტია A_1; A_2; A_3, ხოლო B შუალედური პუნქტიდან საბოლოო C პუნქტამდე მისასვლელი ოთხი მარშრუტია B_1; B_2; B_3; B_4. შევადგინოთ მარშრუტების შესაბამისი დიაგრამა:

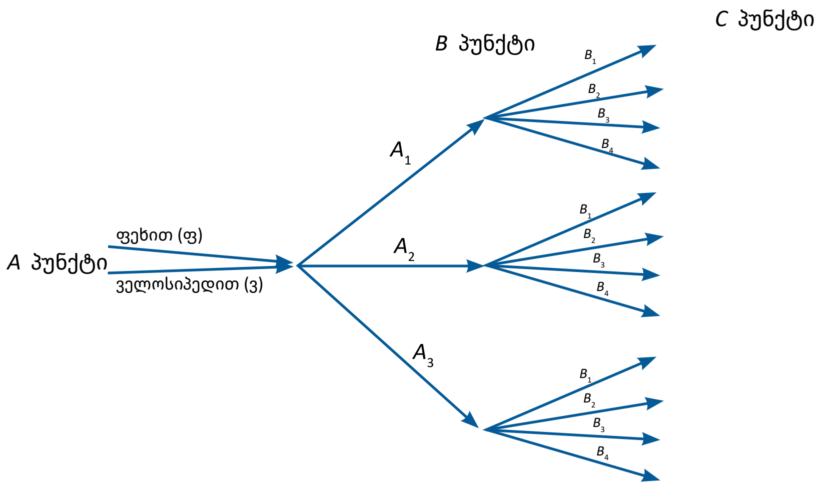
სავარჯიშოები



5. **ამოცანა 4-ის გაგრძელება**

განვიხილოთ პირველ სიტუაციაში განხილული მაგალითი, მხოლოდ დავამატოთ, რომ ტურისტს შეუძლია არჩეული მარშრუტი გაიაროს ან ფეხით, ან ველოსიპედით (ამის შესაძლებლობა არსებობს). ამ პირობებში რამდენი ასეთი მარშრუტის ამორჩევის შესაძლებლობა აქვს მომხმარებელს?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, იმავე შემოტანილი აღნიშვნებით დიაგრამა შემდეგ სახეს მიიღებს:



6. განვიხილოთ ერთი კამათლისა და ერთი მონეტის ერთობლივი აგდება. ვთქვათ, ვაგდებთ ერთხელ, შედეგთა რამდენი ვარიანტი შეიძლება იყოს?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, კამათელზე შეიძლება მოვიდეს ექვსი შესაძლო შედეგიდან (1; 2; 3; 4; 5; 6) ერთ-ერთი, ხოლო მონეტაზე შეიძლება მოვიდეს ორი შედეგიდან (გერბი (გ), საფასური (ს)) ერთ-ერთი. გამრავლების წესით დაითვალეთ რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მოვიდეს? შეეცადეთ დიაგრამით წარმოადგინოთ ვარიანტების რაოდენობა.

3.2. ფაქტორიალი, გადანაცვლება, წყობა, ჯუფთება

ზოგიერთ საყოფაცხოვრებო ან მათემატიკურ ამოცანაში შესაძლო ვარიანტების დასათვლელად მხოლოდ გამრავლების წესი არაა საკმარისი, მათ გამოსათვლელად საჭიროა სხვა წესების და ფორმულების გამოყენება.

ფაქტორიალი

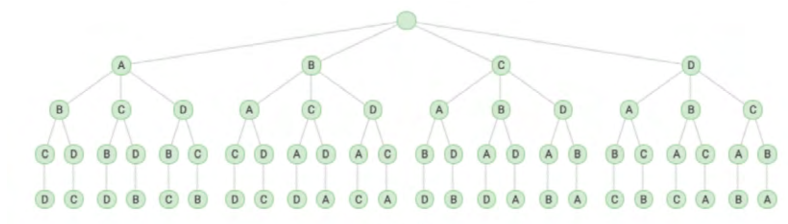
n**-ის ფაქტორიალი** ეწოდება პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლს და აღინიშნება შემდეგნაირად:

$n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$

შესავალი ა მოცანა თეორიის ახსნისთვის:

მოცემულია 4 ლათინური ასობგერა, რომელიც უნდა დავალაგოთ სხვადასხვა თანმიმდევრობით.

რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს, რომ დავალაგოთ სიმბოლოები A, B, C, D?



4 × 3 × 2 × 1

დიაგრამიდან ვხედავთ, რომ მათი დალაგების 24 სხვადასხვა ვარიანტია.

როდესაც ვიწყებთ დალაგებას:

- თავდაპირველად არსებობს 4 ვარიანტი არჩევანის გაკეთების;
- მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ ერთ-ერთ ასობგერას, გვრჩება 3 ასობგერა და თითოეულისთვის არის 3 სხვადასხვა ვარიანტი;
- მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ მეორე ასობგერას, თითოეულისთვის გვრჩება 2 და ბოლოს 1.

გამოვიდა რომ უნდა გადავამრავლოთ რიცხვები:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$4\,! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

განვიხილოთ ახალი ნიმუში

წინა ნიმუშის მსგავსი ნიმუში, მასალის ახსნით მასალის ახსნა

- *რამდენნაირად არის შესაძლებელი თაროზე ოთხი სხვადასხვა წიგნის განლაგება?*

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. შემოვიტანოთ აღნიშვნები.

ვთქვათ, თაროზე წიგნის დალაგების პირველი ადგილის ნომერია 1, მეორე ადგილის – 2, მესამის – 3 და მეოთხის – 4. ამ შემთხვევაში თაროს პირველ ადგილზე შეიძლება დავდოთ ოთხივე წიგნიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების 4 ვარიანტი. ამის შემდეგ თაროს მეორე ადგილზე შეიძლება დავდოთ დარჩენილი სამი წიგნიდან ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს

დალაგების 3 ვარიანტი. მომდევნო – მესამე ადგილზე დარჩება უკვე ორი ვარიანტი და საბოლოო მეოთხე ადგილზე გვექნება წიგნის განთავსების ერთი ვარიანტი. სქემატურად ეს პროცესი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

1-ლი ადგილი	მე-2 ადგილი	მე-3 ადგილი	მე-4 ადგილი
4 ვარიანტი	**3 ვარიანტი**	**2 ვარიანტი**	**1 ვარიანტი**

წიგნების დალაგების ვარიანტების რაოდენობის დასათვლელად გამოვიყენოთ ვარიანტების დათვლის გამრავლების წესი. რადგან თაროს თითოეულ ადგილზე წიგნების განლაგების ვარიანტების რაოდენობები ცნობილია და ეს განლაგებები უნდა განხორციელდეს ერთდროულად, ამიტომ საბოლოო ვარიანტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი.

$$n = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

მაშასადამე, თაროზე წიგნების დალაგების ვარიანტების რაოდენობაა 24.

განვაზოგადოთ აღნიშნული სიტუაცია

დავუშვათ, გვაქვს რაღაც n ცალი განსხვავებული ელემენტი და ისინი რაღაც წესით უნდა დავალაგოთ. ამ დალაგების შემდეგ მივიღებთ ე.წ. დალაგებულ n-ეულს.

საკვანძო კითხვა: რამდენი დალაგებული n-ეულის მიღება შეიძლება n ცალი განსხვავებული ელემენტისგან?

ზემოთ განხილული მაგალითის ანალოგიურად:

- პირველ ადგილზე შეიძლება განვალაგოთ n განსხვავებული ელემენტისგან ნებისმიერი ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების n ვარიანტი.
- ამის შემდეგ, მეორე ადგილზე შეიძლება განვალაგოთ დარჩენილი $(n-1)$ ელემენტისგან ნებისმიერი ერთ-ერთი, ანუ გვაქვს დალაგების $n-1$ ვარიანტი.
- მესამე ადგილზე გვაქვს დალაგების $(n-2)$ ვარიანტი და ა.შ., საბოლოო მე-n-ე ადგილზე გვექნება დალაგების ერთი ვარიანტი.
- განლაგების მთლიანი ვარიანტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი.

რაოდენობა $= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$.

$n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პირველი n ნატურალური რიცხვის ნამრავლს ეწოდება **n-ის ფაქტორიალი** და აღინიშნება შემდეგნაირად: $n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$

გადანაცვლება	n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ განლაგებას n-**ელემენტიანი გადანაცვლება** ეწოდება. გადანაცვლებათა რაოდენობა აღინიშნება P_n სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $P_n = n!$

ნიმუში 1 – გამოიანგარიშეთ

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1$

1) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

2) $\frac{7!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42$

3) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1)} = n$

ნიმუში 2 – პრიზების განაწილება

რამდენნაირად არის შესაძლებელი შვიდი სხვადასხვა პრიზი გავუნაწილოთ შვიდ ადამიანს?

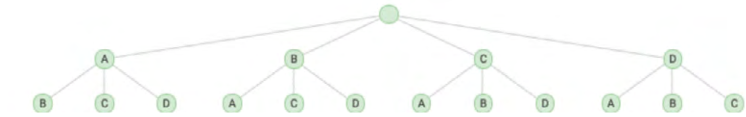
$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

გადანაცვლება.	**ნიმუში 1:** საიუბილეო საღამოზე 5 მომხსენებელი (A,B,C,D,E) უნდა გამოვიდეს. რამდენნაირად შეიძლება ჩაეწერონ ისინი სიაში? **ამოხსნა:** პირველი მომხსენებელი შეიძლება იყოს ამ 5-დან ერთ-ერთი, მეორე – დარჩენილი 4-დან ერთ-ერთი, მესამე – დარჩენილი სამიდან ერთ-ერთი და ა.შ. ბოლოს არჩევანიც არ აქვს. სულ ვარიანტების რაოდენობა იქნება $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

წყობა

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას

მოცემულია 4 ლათინური ასობგერა A, B, C, D, რომლისგანაც გვინდა ამოვარჩიოთ 2 სხვადასხვა ასობგერა და დავაწყოთ სხვადასხვანაირად. რამდენი ვარიანტი არსებობს დაწყობის/დალაგების?



- თავდაპირველად არსებობს 4 ვარიანტი არჩევანის გაკეთების;
- მას შემდეგ, რაც ავირჩევთ ერთ-ერთ ასობგერას, გვრჩება 3 ასობგერა და თითოეულისთვის არის 3 სხვადასხვა ვარიანტი;

გამოვიდა, რომ სულ არსებობს $4 \cdot 3 = 12$ ვარიანტი.

n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ k ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს **წყობა** ეწოდება. წყობათა რაოდენობა აღინიშნება $\boldsymbol{A}_n^k$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $\boldsymbol{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს $n = 4$ ელემენტი, გვსურს 2 ელემენტის ამორჩევა, ე.ი. $k = 2$-ს. $\boldsymbol{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ფორმულა გვეხმარება დავიანგარიშოთ რამდენი ასეთი ვარიანტი შეიძლება არსებობდეს, როდესაც რიცხვები პატარაა, ჩვენ შეგვიძლია ზეპირად დავითვალოთ ან დიაგრამის დახმარებით, მაგრამ როდესაც რიცხვები დიდია, ზეპირად ან დიაგრამით დათვლა მოუხერხებელია, ფორმულა კი გვეხმარება დავითვალოთ ვარიანტები.

$$\boldsymbol{A}_4^2 = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{(4-2)!}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$$

შევნიშნოთ, რომ $\boldsymbol{A}_n^0 = 1$, $\boldsymbol{A}_n^n = 1$

ნიმუში 3 – ავტოსადგომების განაწილება

ავტოსადგომზე არის ცხრა ერთადგილიანი ავტოფარეხი. ერთ საღამოს ავტოსადგომზე მოვიდა ხუთი მანქანა. რამდენნაირად არის შესაძლებელი ამ ხუთი მანქანის განაწილება მოცემულ ცხრა ავტოფარეხში?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, მანქანების გასაჩერებლად საჭიროა ცხრიდან ამოვირჩიოთ ხუთი ავტოფარეხი და შემდეგ მასში გავანაწილოთ დასაყენებელი მანქანები.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები, ვთქვათ, ერთი მანქანის ნომერია 1, მეორის – 2, მესამის – 3, მეოთხის – 4 და მეხუთის – 5.

ამ შემთხვევაში, პირველი მანქანა შეგვიძლია დავაყენოთ ცხრავე ავტოსადგომიდან ერთ-ერთში, ანუ გვაქვს მანქანის ავტოფარეხში დაყენების 9 ვარიანტი. ამის შემდეგ, მეორე მანქანა შეგვიძლია დავაყენოთ დარჩენილი რვა ავტოსადგომიდან ერთ-ერთში, ანუ გვაქვს მანქანის დაყენების 8 ვარიანტი. მომდევნო მესამე მანქანისთვის დარჩება 7 ვარიანტი, მეოთხისთვის 6 ვარიანტი, ხოლო მეხუთისთვის 5 ვარიანტი. ავტომანქანების დაყენების მთლიანი ვარიან-ტების დასათვლელად საჭიროა მიღებული რაოდენობები გადავამრავლოთ, ე.ი. მივიღებთ:

$$\text{რაოდენობა} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

ე.ი. მანქანების განაწილების რაოდენობაა 15 120.

გარდავქმნათ მიღებული რაოდენობების ჩანაწერი:

$$\text{რაოდენობა} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{4!} = \frac{9!}{(9-5)!} = \boldsymbol{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = 15\,120.$$

გამოვიდა, რომ ჩვენ მიერ შემოღებული ფორმულა სწორია.

მაშასადამე, ცხრა ელემენტიანი სიმრავლიდან ჩვენ ამოვარჩიეთ ხუთელემენტიანი ქვესიმა-რავლე და დავალაგეთ, **დავაწყვეთ**. ამიტომ აღნიშნულ ოპერაციას ჰქვია **წყობა**.

მეთოდი 2:

ჩვენ შეგვიძლია მსგავსი ამოცანების ფორმულით ამოხსნა.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს, მივიღებთ:

$n = 9$, $k = 5$. $\boldsymbol{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$\boldsymbol{A}_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 15\,120$$

მინიშნება: ლოგიკურად და მსჯელობით ამოხსნა და დასაბუთება ყოველთვის მნიშვნელოვანია.

ნიმუში 4 – გაკვეთილების ცხრილი

მეთერთმეტე კლასში ისწავლება 12 საგანი. სამშაბათს კლასს აქვს ხუთი გაკვეთილი. რამდენნაირად არის შესაძლებელი სამშაბათის გაკვეთილების ცხრილის შედგენა?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, საჭიროა 12 საგნიდან ავირჩიოთ ხუთი საგანი და შემდეგ გადავანაწილოთ (ანუ დავაწყოთ) ისინი ხუთ განსხვავებულ გაკვეთილზე. მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ 12 ელემენტიდან ხუთელემენტიანი წყობა:

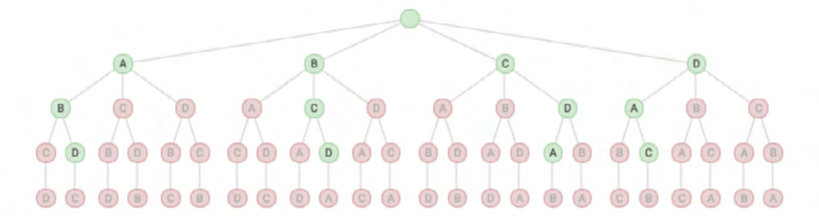
$$\boldsymbol{A}_{12}^{5} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot\ 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = 95\,040$$

ე.ი. გაკვეთილების ცხრილის შედგენის ვარიანტების რაოდენობაა 95 040.

ჯუფთება

დავუბრუნდეთ შესავალ ამოცანას

მოცემულია 4 ლათინური ასობგერა *A,B,C,D*, რამდენი სხვადასხვა სამელემენტიანი ქვესიმრავლე შეიძლება შეიქმნას, რომლისგანაც გვინდა ამოვარჩიოთ 3 სხვადასხვა ასობგერა, აქვე აღვნიშნოთ, რომ ასოების დაწყობას და თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს. *A,B,C,*D-ს რამდენი სხვადასხვა ქვესიმრავლე შეიძლება შეიქმნას?



n რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ყოველ k ელემენტიან დაულაგებელ ქვესიმრავლეს **ჯუფთება** ეწოდება. ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება $\boldsymbol{C}_n^k$ სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით: $\boldsymbol{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

$$n = 4,\ k = 3$$

$$\boldsymbol{C}_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot\ 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 4$$

4 ასობგერიდან, როდესაც ნებისმიერი 3 არჩევა გვსურს, 4 სხვადასხვა ვარიანტი გვექნება:

A,B,D ;

B,C,D;

C,D,A;

A,B,C.

დავუბრუნდეთ და გავაანაზილოთ თავიდან 3.1 გაკვეთილის დასაწყისში განხილული ნიმუში: მოსწავლეს უნდა აეღო 2 წიგნი;

ნიმუში 4

სიტუაცია 1:

დავუშვათ, თაროზე არის ორი წიგნი: **წიგნი N1 და წიგნი N2** და სტუდენტმა თანმიმდევრობით უნდა აირჩიოს ორი წიგნი;

რა არჩევანი აქვს სტუდენტს?

ჯერ წიგნი N1 და შემდეგ წიგნი N2,

ან

ჯერ წიგნი N2 და შემდეგ წიგნი N1 ;

ანუ არის არჩევანის მხოლოდ ერთი ვარიანტი.

სიტუაცია 2:

თაროზე არის 5 წიგნი და სტუდენტს აქვს შესაძლებლობა, აირჩიოს ნებისმიერი 2 წიგნი თაროდან, მას არჩევანის რამდენი შესაძლო ვარიანტი აქვს?

მარჯვნივ მოცემულია დიაგრამა, რომელიც აადვილებს დავითვალოთ ვარიანტები:

მას შეუძლია აირჩიოს ჯერ N1 და შემდეგ N2 ან პირიქით, ამიტომ ეს ორი ვარიანტი ითვლება 1 არჩევანად, იმიტომ, რომ, ამ შემთხვევაში, არ აქვს მნიშვნელობა თანმიმდევრობას;

დავითვალოთ ვარიანტები და მივიღებთ, რომ სულ 10 სხვადასხვა ვარიანტია, რომლის მიხედვითაც სტუდენტმა შეიძლება აირჩიოს ორი წიგნი.

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	2.1		2.3	2.4	2.5
3	3.1	3.2		3.4	3.5
4	4.1	4.2	4.3		4.5
5	5.1	5.2	5.3	5.4	

	1	2	3	4	5
1		1.2	1.3	1.4	1.5
2	~~2.1~~		2.3	2.4	2.5
3	~~3.1~~	~~3.2~~		3.4	3.5
4	~~4.1~~	~~4.2~~	~~4.3~~		4.5
5	~~5.1~~	~~5.2~~	~~5.3~~	~~5.4~~	

წყობა

წიგნების არჩევის დროს, თუ მნიშვნელობა აქვს თანმიმდევრობას, რომელ ორ წიგნს აირჩევს სტუდენტი, მაშინ ჩვენ უნდა დავითვალოთ წყობა:

$$n = 5; \quad k = 2$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

ჯუფთება

წიგნების არჩევის დროს, თუ მნიშვნელობა არ აქვს თანმიმდევრობას, რომელ ორ წიგნს აირჩევს სტუდენტი თაროდან, მაშინ ჩვენ უნდა დავითვალოთ ჯუფთება:

$$n = 5; \quad k = 2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

ნიმუში 5 – ფრენბურთელთა გუნდი – მათემატიკის მოყვარულთათვის

ფრენბურთელთა გუნდში არის 14 სპორტსმენი. გუნდის მწვრთნელმა თამაშის სასტარტო შემადგენლობაში უნდა შეიყვანოს 6 ფრენბურთელი. რამდენნაირად შეუძლია მწვრთნელს სასტარტო ექვსეულის შედგენა?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ცხადია, მოცემული სიტუაცია ჰგავს წყობის დროს განხილული მანქანების განაწილების ამოცანას, თუმცა ამ შემთხვევაში არაა საჭირო არჩეული სპორტსმენების გადანაცვლება ადგილებზე, ისინი ერთ მთლიან გუნდში არიან გაერთიანებულნი. განვიხილოთ14 ელემენტიდან 6-ელემენტიანი წყობა, ეს არის 14 ელემენტიდან არჩეული 6 ელემენტი, რომლებიც შემდეგ გადალაგებული, ანუ გადანაცვლებულია ერთმანეთში. ჩვენს სიტუაციაში ამორჩეული ექვსეულის ერთმანეთში გადანაცვლება არაა საჭირო, რადგან ისინი ერთ მთლიან გუნდში არიან გაერთიანებულნი.

შესაბამისად, საძიებელი რაოდენობა 14 ელემენტიდან 6-ელემენტიან წყობაზე, ანუ A_{14}^{6}-ზე, ნაკლები იქნება 6 ელემენტიან გადანაცვლებაჯერ, ანუ P_6-ჯერ.

$$\text{რაოდენობა} = \frac{A_6^6}{P_6} = \frac{14!}{(14-6)!} : 6! = \frac{14!}{(14-6)! \cdot 6!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 = 3\,003$$

ე.ი. სასტარტო ექვსეულის შედგენის ვარიანტთა რაოდენობაა 3 003.

მაშასადამე, თოთხმეტელემენტიანი სიმრავლიდან ჩვენ ამოვარჩიეთ ყველა ექვსელემენტიანი დაულაგებელი ქვესიმრავლე.

ნიმუში 6 – სტუდენტთა განაწილება

პრეზენტაციის მოსამზადებლად 11 სტუდენტი უნდა განაწილდეს ორ ჯგუფში ისე, რომ ერთ ჯგუფში იყოს 5 სტუდენტი, ხოლო მეორეში 6 სტუდენტი. რამდენნაირად შეიძლება ასეთი ჯგუფების შედგენა?

სიტუაციის მათემატიკური მოდელირება. ჯერ განვიხილოთ 11-დან რამდენი 5 სხვადასხვა ვარიანტის ამორჩევაა შესაძლებელი. ცხადია, ეს იქნება 11-დან 5 ელემენტიანი ჯუფთება, ანუ C_{11}^5. ყოველი ასეთი ხუთეულის შედგენის შემდეგ, დარჩენილი ექვსეული თავისთავად შეადგენს ექვს სტუდენტიან ჯგუფს, ანუ მათი ცალკე გამოთვლა არაა საჭირო. მაშასადამე, შერჩევის საჭირო რაოდენობა იქნება:

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!\cdot 5!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot\ 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 4\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 11\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 462$$

ინფორმაცია მათემატიკის მოყვარულთათვის	
ნებისმიერი A სიმრავლისათვის ∅ და თვითონ A, A სიმრავლის ქვესიმრავლეებად ითვლება .	■ n-ელემენტიანი სიმრავლისათვის არსებობს ერთადერთი n-ელემენტიანი ჯუფთება. ეს ჯუფთებაა თვითონ A სიმრავლე: $C_n^n = 1$. ■ ცარიელი სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც n-ელემენტიანი სიმრავლის 0-ელემენტიანი ქვესიმრავლე: $C_n^0 = 1$. სამართლიანია ფორმულა $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$; **ანუ, n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n.** ■ კავშირი C_n^m-სა და A_n^m-ს შორის შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმულით: $A_n^m = m!\cdot C_n^m$.

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ:

ა) $5!$; ბ) $4!-3!$; გ) $\frac{7!}{6!}$; დ) $\frac{11!}{9!}$.

2. გამოთვალეთ:

ა) $\frac{10!\cdot 2!}{12!}$; ბ) $\frac{15!}{13!\cdot 3!}$.

3. საიუბილეო საღამოზე 5 მომხსენებელი (A,B,C,D,E) უნდა გამოვიდეს. რამდენნაირად შეიძლება ჩაეწერონ ისინი სიაში?

4. ა) P_4; ბ) P_6-P_5; გ) A_6^4; დ) $A_7^3+A_5^2$;

ე) C_9^5; ვ) C_{10}^7; ზ) $A_5^8 : C_5^3$; დ) $C_9^6\cdot A_8^6$.

5. მაგიდასთან 7 ადგილია. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დავსვათ 7 მოწვეული სტუმარი ამ მაგიდასთან?

6. ცხრა მგზავრის ცხრა ვაგონში განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს, თუ რამდენიმე მგზავრის ერთ ვაგონში მოხვედრა დაუშვებელია?

7. ჯგუფში ათი სტუდენტია. რამდენი განსხვავებული თანმიმდევრობით შეიძლება შევიდნენ სტუდენტები აუდიტორიაში?

8. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება კენტი ციფრებისაგან, თუ ციფრების გამეორება შეუძლებელია?

9. საფეხბურთო ჩემპიონატში მონაწილეობს 18 გუნდი. ჩემპიონატის დასრულების შემდეგ ადგილების განაწილების რამდენი ვარიანტი არსებობს?

10. 5 სტუდენტიდან უნდა შევადგინოთ 3 კაციანი გუნდი. რამდენი ვარიანტი არსებობს?

11. 3 ბავშვი საკონტროლო სამუშაოს შესასრულებლად შეგვიძლია დავსვათ საკლასო ოთახში მოთავსებულ 5 მერხზე. მერხებზე მათ დახვდება საკონტროლო სამუშაოს ბილეთები. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ ა) ყველა მერხზე ერთი და იგივე ბილეთია; ბ) მერხებზე დევს განსხვავებული ვარიანტის ბილეთები?

12. კრებამ შვიდი კანდიდატიდან უნდა აირჩიოს თავმჯდომარე, თავმჯდომარის მოადგილე და მდივანი. არჩევის რამდენი შესაძლებლობა არსებობს?

13. ტურისტთა ხუთმა ჯგუფმა უნდა აირჩიოს ტურისტული კომპანიის მიერ შეთავაზებული ხუთი სხვადასხვა ტურისტული მარშრუტიდან მხოლოდ ერთი. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ:

ა) ყოველ მარშრუტზე მიდის მხოლოდ ერთი ჯგუფი;

ბ) ერთ მარშრუტზე შესაძლებელია გაემგზავროს სხვადასხვა ჯგუფი;

14. სილამაზის კონკურსში მონაწილეობს 18 გოგონა. პირველი სამი პრიზის განაწილების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

15. რამდენი ორნიშნა რიცხვი იწერება განსხვავებული კენტი ციფრებით?

16. რამდენი სამნიშნა რიცხვი იწერება განსხვავებული კენტი ციფრებით?

სავარჯიშოები

17. სეიფის კოდი შედგება ხუთი განსხვავებული ციფრისგან. რამდენი ასეთი კოდის შედგენაა შესაძლებელი?

18. სეიფის კოდი შედგება ხუთი ციფრისგან. რამდენი ასეთი კოდის შედგენაა შესაძლებელი, თუ კოდი „00000“ დაუშვებელია?

19. მანქანის ნომერია „RR 153 KK“. რამდენ მანქანას ექნება იგივე სერია „RR ... KK“, თუ ცნობილია, რომ ნომრის ყველა ციფრი უნდა იყოს განსხვავებული?

20. მანქანის ნომერია „RM 153 KX“. რამდენ მანქანას ექნება იგივე ნომერი 153, თუ ცნობილია, რომ სერიის ყველა ასო უნდა იყოს განსხვავებული (ინგლისურ ანბანში არის 26 ასო)?

21. რამდენი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9, თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?

22. რამდენი ლუწი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9, თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?

23. რამდენი კენტი სამნიშნა რიცხვი იწერება ციფრებით: 1; 2; 4; 5; 6; 7; 9 , თუ ციფრების გამეორება დაუშვებელია?

24. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 8 სხვადასხვა სათამაშოდან საჩუქრად ამოვირჩიოთ 3 სათამაშო?

25. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 11 სხვადასხვა სამკაულიდან საჩუქრად ამოვირჩიოთ 4 სამკაული?

26. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 9 სხვადასხვა ყვავილისაგან შევკრათ 5 ყვავილიანი თაიგული?

27. სიბრტყეზე მოცემულია 12 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი განსხვავებული წრფე შეიძლება გაივლოს ამ წერტილებზე?

28. სკოლის 23-მა კურსდამთავრებულმა გადაწყვიტა ერთმანეთს სურათები გაუცვალოს. რამდენი ფოტოსურათი დასჭირდებათ მათ ამისათვის?

29. სიბრტყეზე მოცემულია 14 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. რამდენი განსხვავებული სამკუთხედი შეიძლება ავაგოთ სიბრტყეზე, რომელთა წვეროები მოცემულ წერტილებშია?

30. 7 სხვადასხვა საჩუქრიდან უნდა აირჩეს 3 საჩუქარი და გაუნაწილდეს 3 ადამიანს. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ თითოეულ ადამიანს უნდა შეხვდეს ერთი საჩუქარი?

31. კლასში 24 მოსწავლეა. რამდენნაირად შეიძლება მათგან შეირჩეს 7 ბავშვი, თუ:

ა) შვიდივემ უნდა დაწეროს საკონტროლო მათემატიკაში;

ბ) შვიდივემ უნდა დაწეროს სხვადასხვა საკონტროლო შვიდ განსხვავებულ საგანში, ამასთან ერთი მოსწავლე წერს მხოლოდ ერთ საკონტროლოს.

32. სამშენებლო კომპანიას ჰყავს 12 სატვირთო მანქანა, რომლებიდანაც უნდა გამოიყოს 8 მანქანა 8 სხვადასხვა ობიექტისთვის, ამასთან თითოეული ობიექტისთვის უნდა გამოიყოს ერთი მანქანა. რამდენნაირად შეიძლება ამის გაკეთება, თუ:

ა) მანქანები სხვადასხვა ტვირთამწეობისაა; ბ) მანქანები ერთნაირი ტვირთამწეობისაა;

სავარჯიშოები

33. კლასში არის 14 ბიჭი და 12 გოგონა. მათგან უნდა შეირჩეს 3 ბიჭი და 2 გოგონა კლასში სამორიგეოდ. რამდენნაირად შეიძლება ასეთი შერჩევის გაკეთება?

34. სამხედრო ნაწილში 20 ჯარისკაცი და 5 ოფიცერია, მათგან ყარაულში უნდა დადგნენ 6 ჯარისკაცი და 2 ოფიცერი. რამდენნაირად შეიძლება ასეთი ყარაულის შედგენა?

35. საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეობდა 14 მოჭადრაკე. თითოეული მოჭადრაკე სხვა ყველა მონაწილეს ხვდებოდა მხოლოდ ერთხელ. რამდენი პარტია გათამაშდა ამ ტურნირში?

36. საფეხბურთო ჩემპიონატში მონაწილეობს 18 გუნდი. ჩემპიონატი ტარდება წრიული სისტემით: თითოეული მონაწილე ხვდება ყველა დანარჩენ გუნდს ორ-ორჯერ, ერთხელ საკუთარ მოედანზე, ხოლო შემდეგ მოწინააღმდეგის მოედანზე. სულ რამდენი მატჩი ჩატარდა ამ ჩემპიონატში?

37. მოთამაშეთა ტურნირში სულ გათამაშდა 210 პარტია. რამდენი მოშაშე იღებდა მონაწილეობას ამ ტურნირში, თუ ცნობილია, რომ თითოეულმა მონაწილემ ითამაშა ყველა დანარჩენთან თითო -თითო პარტია?

38. ავტომანქანაში 5 ადგილია. რამდენნაირად შეიძლება მასში 5 ადამიანის მოთავსება, თუ მანქანის ტარება იცის მხოლოდ ორმა?

39. რამდენნაირადაა შესაძლებელი თაროზე დავაწყოთ ენციკლოპედიის 20-ტომეული ისე, რომ მე-19 და მე-20 ტომი ერთმანეთის გვერდიგვერდ მოხვდეს?

40. რამდენნაირადაა შესაძლებელი თაროზე დავაწყოთ ენციკლოპედიის 18-ტომეული ისე, რომ 1-ლი და მე-2 ტომი ერთმანეთის გვერდიგვერდ არ მოხვდეს?

41. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 12 წიგნი გავანაწილოთ სამ უჯრაში ისე, რომ პირველ უჯრაში მოხვდეს 4 წიგნი, მეორეში 3 წიგნი, ხოლო მესამეში 5 წიგნი?

42. რესტორნის კლიენტმა სადღესასწაულო სუფრისთვის უნდა შეარჩიოს კერძები. შეთავაზებული 8 ცივი კერძიდან მან უნდა აირჩიოს 5, შეთავაზებული 9 ცხელი კერძიდან მან უნდა აირჩიოს 6 კერძი, ხოლო 10 დესერტიდან 4 კერძი. სადღესასწაულო სუფრის შერჩევის რამდენი ვარიანტი აქვს კლიენტს?

43. გუნდში 22 ფეხბურთელია: 3 მეკარე, 7 მცველი, 7 ნახევარმცველი და 5 თავდამსხმელი. რამდენი განსხვავებული არჩევანი აქვს მწვრთნელს სასტარტო შემადგენლობის დასაკომპლექტებლად, თუ ამ შემადგენლობაში უნდა იყოს 1 მეკარე, 4 მცველი, 4 ნახევარმცველი და 2 თავდამსხმელი?

44. რამდენნაირადაა შესაძლებელი 3 ვარდის, 4 მიხაკის და 5 გეორგინისაგან შედგენილი თაიგულის შეკვრა, თუ გვაქვს 5 ვარდი, 7 მიხაკი და 8 გეორგინა?

45. ბანქოს დასტა შედგება 36 ბანქოსაგან (მათ შორის, 4 ტუზია). დასტიდან იღებენ 9 ბანქოს. რამდენ შემთხვევაში შეიძლება იყოს ამოღებულ ბანქოებს შორის:

ა) არცერთი ტუზი;
ბ) მხოლოდ ერთი ტუზი;
გ) ზუსტად ორი ტუზი;
დ) ოთხივე ტუზი;

46. ცხრა წიგნიდან 6 სხვადასხვა ავტორისაა, ხოლო სამტომეული ერთი ავტორის. რამდენნაირადაა შესაძლებელი ამ წიგნების დალაგება თაროზე ისე, რომ ერთი ავტორის სამტომეულის წიგნები გვერდიგვერდ იდოს?

3.3. დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკები

როდესაც ჩვენ გვინდა გავიგოთ იმ ქულების რაოდენობა ან პროპორცია, რომელიც კონკრეტული მნიშვნელობის ქვევით არის ჩვენ ვუმატებთ დაგროვილი სიხშირეების მნიშვნელობებს დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილის სვეტიდან და ვიყენებთ გრაფიკს, რომელსაც ვუწოდებთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკს.

დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკები აიგება წერტილებით, რომლებიც შეერთებულია გლუვი წირით. ეს უკანასკნელი განსხვავდება ოგივასგან ან დაგროვილ სიხშირეთა პოლიგონისგან, სადაც ამ უკანასკნელების წერტილები შეერთებულია მონაკვეთებით.

პროცენტილები:

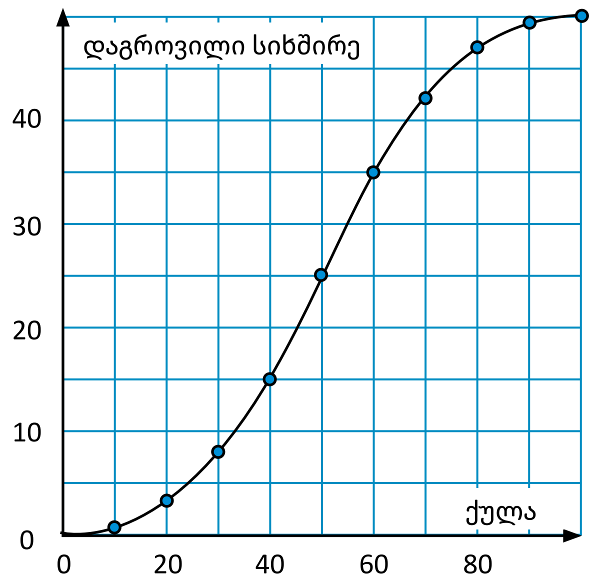
პროცენტილი არის ქულა, რომლის ტოლი და მასზე ნაკლები არის გარკვეული პროცენტი მონაცემებისა.

მაგალითად:

- 85-ე პროცენტილი არის ქულა, რომლის ტოლი და მასზე ნაკლები არის ქულათა 85%.
- თუ თქვენი ქულა ტესტში არის 95-ე პროცენტილი, მაშინ თქვენზე ნაკლები მიიღო კლასის 95%-მა.
- შევნიშნოთ, რომ:
- ქვედა კვარტილი (Q_1) არის 25-ე პროცენტილი.
- მედიანა (Q_2) არის 50-ე პროცენტილი.
- ზედა კვარტილი (Q_3) არის 75-ე პროცენტილი.

დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკებს ხშირად იყენებენ პროცენტილების საპოვნელად. განვიხილოთ მაგალითი:

ქვემოთ მოცემულია 2008 წელს ქალების მარათონის შედეგები, ყველა მონაწილისათვის, ვინც დაასრულა სირბილი.



დრო (l წთ)	სიხშირე
$146 \le l < 148$	8
$148 \le l < 150$	3
$150 \le l < 152$	9
$152 \le l < 154$	11
$154 \le l < 156$	12
$156 \le l < 158$	7
$158 \le l < 160$	5
$160 \le l < 168$	8
$168 \le l < 176$	6

(ა) დაუმატეთ ცხრილს დაგროვილი სიხშრეების სვეტი.

(ბ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(გ) თქვენს მიერ აგებული გრაფიკის გამოყენებით შეაფასეთ:

i. დროის მედიანა;

ii. იმ მონაწილეების რაოდენობა, ვინც დაასრულა სირბილი 155 წუთზე ნაკლებ დროში;

iii. იმ მონაწილეების პროცენტი, ვინც დაასრულა სირბილი 159 წუთზე მეტ დროში;

iv. რა დროში დაამთავრეს მარათონი საუკეთესო 20%-ის შედეგის მქონე მონაწილეებმა.

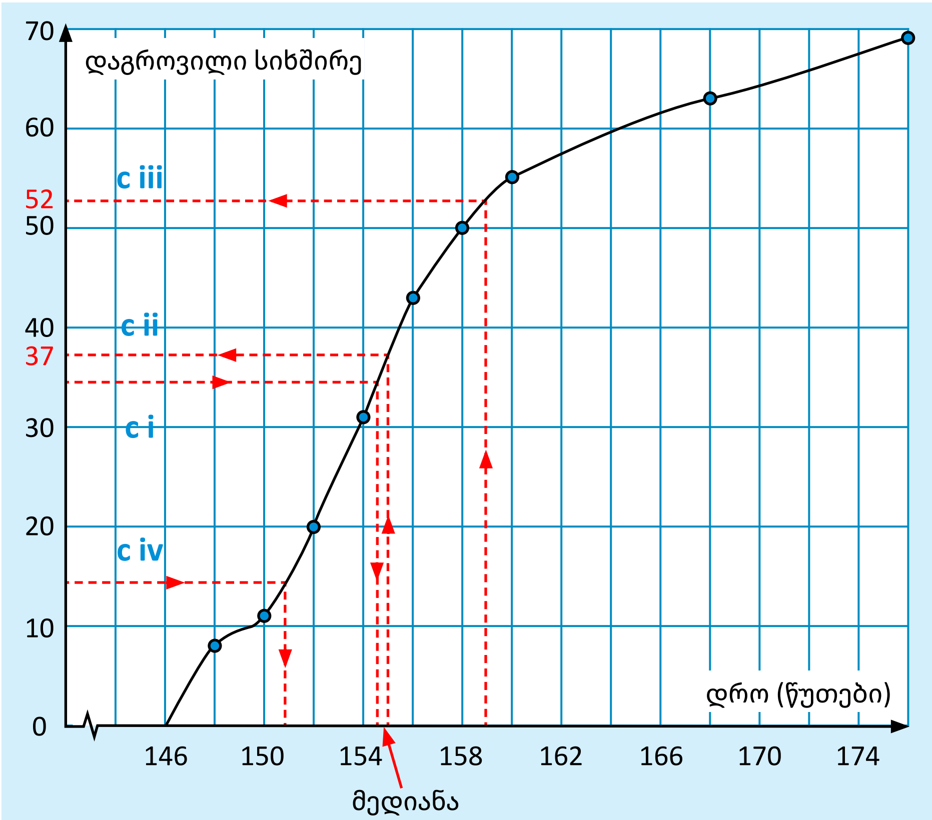
ამოხსნა:

დრო (l წთ)	სიხშირე	დაგროვილი სიხშირე
$146 \le l < 148$	8	8
$148 \le l < 150$	3	11
$150 \le l < 152$	9	20
$152 \le l < 154$	11	31
$154 \le l < 156$	12	43
$156 \le l < 158$	7	50
$158 \le l < 160$	5	55
$160 \le l < 168$	8	63
$168 \le l < 176$	6	69

მონაწილეებმა დაამთავრეს მარათონი 150 წუთზე ნაკლებ დროში

50 მონაწილემ დაასრულა მარათონი 158 წუთზე ნაკლებ დროში

მარათონის მორბენალთა დრო:



საუკეთესო 20%-ის შედეგის მქონე მონაწილეებმა მარათონს მოანდომეს 151 წთ-ზე ნაკლები დრო.

i. მედიანა არის 50-ე პროცენტილი. 69-ის 50% არის 34.5. ჩვენ ვიწყებთ დაგროვილი სიხშირიდან და ვპოულობთ შესაბამის დროს, მედიანა ≈ 154.5 წთ.

ii. დაახლოებით 37 მონაწილემ მოანდომა 155 წთ-ზე ნაკლები დრო მარათონის დასრულებას.

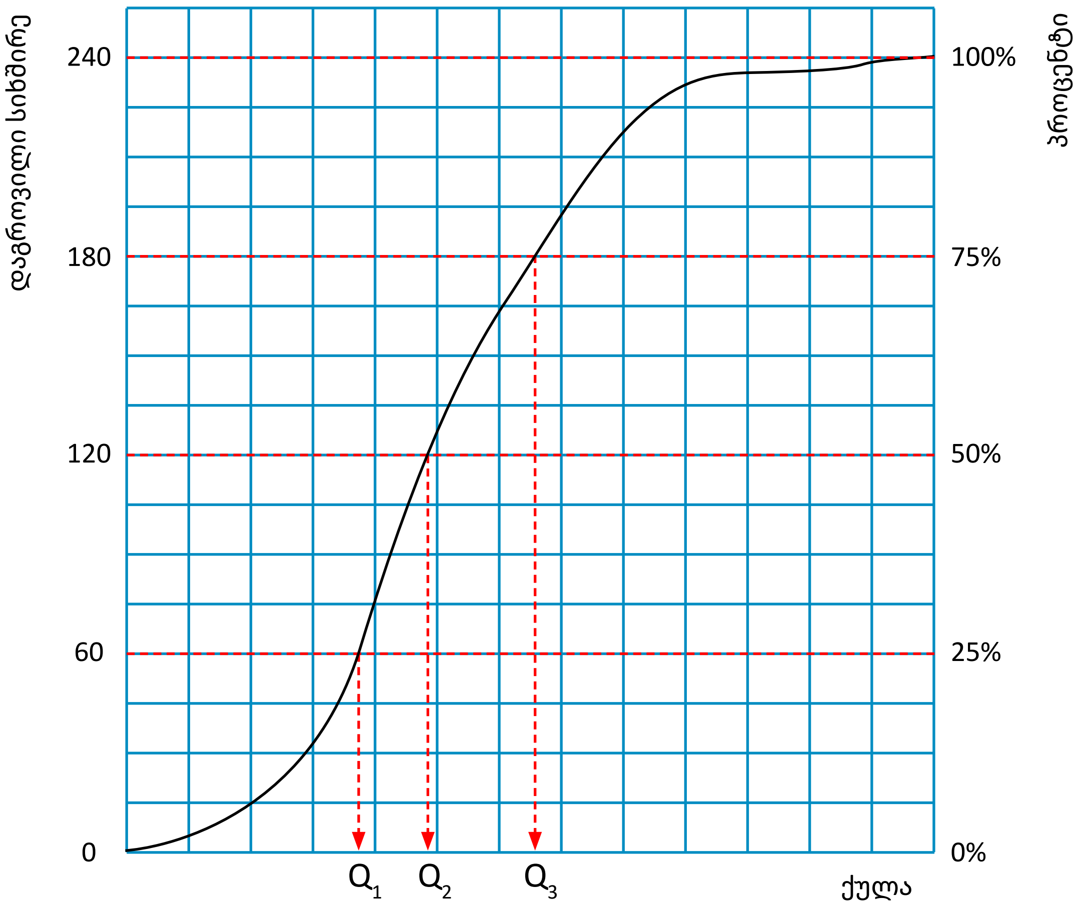
iii. $69 - 52 = 17$ მონაწილემ მოანდომა 159 წთ-ზე მეტი დრო, $\frac{17}{69} \approx 24.6\%$ მოანდომა 159 წთ-ზე მეტი დრო.

iv. 69-ის 20% არის 13.8. ჩვენ ვიწყებთ დაგროვილი სიხშირით 14 და ვპოულობთ შესაბამის დროს.

სხვა გზა პროცენტილების გამოსათვლელად არის, თუ დაგროვილ სიხშრეთა გრაფიკს დავუმატებთ პროცენტების სკალას.

მაგალითად, დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკზე მარჯვენა მხარეს დაგროვილი სიხშირეები იკითება მარცხენა მხარეს, ხოლო პროცენტილები კი – მარჯვენა მხარეს.

დაგროვილი სიხშირეთა გრაფიკი



სავარჯიშოები

1. ქვემოთ ცხრილში მოცემულია სტუდენტთა ჯგუფის გამოცდის შედეგები.

(ა) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(ბ) იპოვეთ გამოცდის ქულის მედიანა.

(გ) რამდენმა სტუდენტმა მიიღო 65 ქულა ან ნაკლები?

(დ) რამდენმა სტუდენტმა მიიღო სულ მცირე 50 და 70-ზე ნაკლები ქულა?

(ე) თუ ჩაბარების ბარიერი იყო 45 ქულა, რამდენი სტუდენტი ჩაიჭრა?

(ვ) თუ საუკეთესო 16%-ის შედეგის მქონე სტუდენტები დაჯილდოვდნენ, რამდენი ქულიდან იწყებოდა დაჯილდოება?

ქულა (x წთ)	სიხშირე
$10 \le x < 20$	2
$20 \le x < 30$	5
$30 \le x < 40$	7
$40 \le x < 50$	21
$50 \le x < 60$	36
$60 \le x < 70$	40
$70 \le x < 80$	27
$80 \le x < 90$	9
$90 \le x < 100$	3

2. ბოტანიკოსმა გაზომა 60 ნერგის სიმაღლე და თავისი მიგნებები წარმოადგინა დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკის სახით.

(ა) რამდენი ნერგის სიმაღლე არის 5 სმ ან ნაკლები?

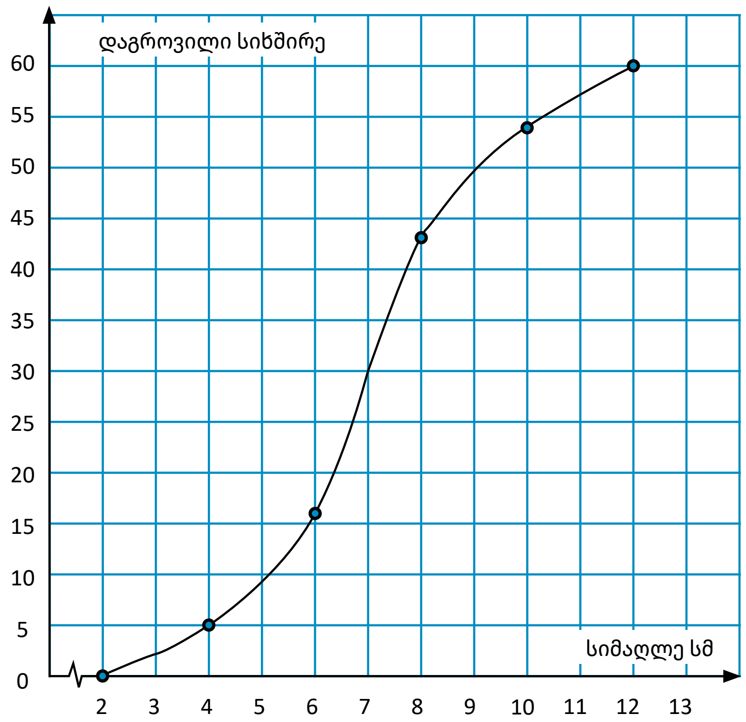
(ბ) ნერგების რამდენი პროცენტის სიმაღლეა მეტი 8 სმ-ზე?

(გ) იპოვეთ სიმაღლის მედიანა.

(დ) იპოვეთ სიმაღლეების კვარტილშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

(ე) იპოვე 90-ე პროცენტილი და ახსენი მისი მნიშვნელობა.

სავარჯიშოები



ა) ქვემოთ ცხრილში მოცემულია ავტოსაგზაო შემთხვევების რაოდენობები მძღოლების ასაკობრივი ჯგუფების მიხედვით.

(ა) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(ბ) შეაფასეთ ასაკობრივი ჯგუფის მედიანა.

(გ) შეაფასეთ ავტოსაგზაო შემთხვევაში მოხვედრლი მძღოლების რაოდენობა, რომელთა ასაკია 23 ან ნაკლები.

(დ) შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ ავტოსაგზაო შემთხვევაში მოხვედრილი მძღოლი არის:

i. 27 წლის ან ნაკლები

ii. 27 წლის

ასაკი (x წლები)	**ავტოსაგზაო შემთხვევების რაოდენობა**
$16 \le x < 20$	59
$20 \le x < 25$	82
$25 \le x < 30$	43
$30 \le x < 35$	21
$35 \le x < 40$	19
$40 \le x < 50$	11
$50 \le x < 60$	24
$60 \le x < 80$	41

სავარჯიშოები

3. ქვემოთ მოცემულია ტბაში დაჭერილი 30 თევზის სიგრძე. სიგრძეები დამრგვალებულია უახლოეს სანტიმეტრებამდე.

31	38	34	40	24	33	30	36	38	32	35	32	36	27	35
40	34	37	44	38	36	34	33	31	38	35	36	33	33	28

(ა) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა ცხრილი თევზის სიგრძისთვის, x სმ, გამოიყენეთ ინტერვალები $24 \le x < 27$, $27 \le x < 30$ და ა.შ.

(ბ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(გ) შეაფასეთ მედიანა.

(დ) გამოიყენეთ საწყისი მონაცემები და იპოვეთ მედიანა. პასუხი შეადარეთ (c)-ს.

4. ქვემოთ მოცემულია დაგროვილ სიხშრეთა გრაფიკი რბოლაში მონაწილე 80 პირთათვის.

(ა) იპოვეთ ქვედა კვარტილი.

(ბ) იპოვეთ მედიანა.

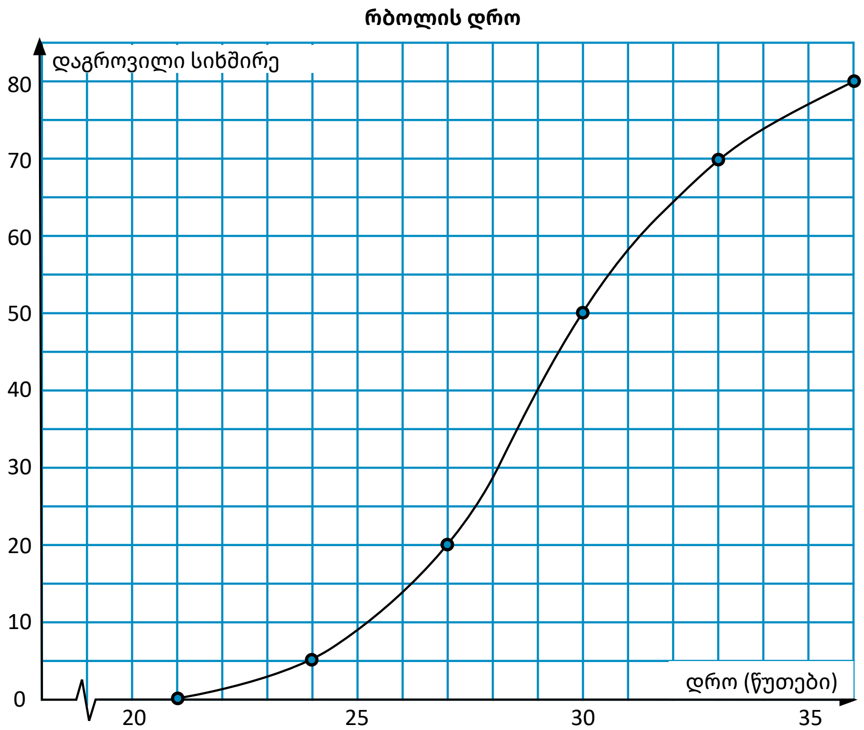
(გ) იპოვეთ ზედა კვარტილი.

(დ) იპოვეთ IQR.

(ე) შეაფასე მე-40 პროცენტილი.

(ვ) გამოიყენე დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი და შეავსე შემდეგი ცხრილი.

დრო (t წთ)	$21 \le t < 24$	$24 \le t < 27$	$27 \le t < 30$	$30 \le t < 33$	$33 \le t < 36$
მონაწილეთა რაოდენობა					



სავარჯიშოები

5. ცხრილში მოცემულია შერჩევით აღებული ელექტრო გლობუსების მუშაობის ხანგრძლივობა.

ხანგრძლივობა (l საათები)	**ვპოულობთ რაოდენობას**
$0 \le l < 500$	5
$500 \le l < 1000$	17
$1000 \le l < 2000$	46
$2000 \le l < 3000$	79
$3000 \le l < 4000$	27
$4000 \le l < 5000$	4

(ა) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(ბ) შეაფასეთ გლობუსების მუშაობის ხანგრძლივობის მედიანა.

(გ) შეაფასეთ იმ გლობუსების პროცენტი, რომელთა მუშაობის ხანგრძლივობაა 2700 საააათი ან ნაკლები.

(დ) შეაფასეთ იმ გლობუსების რაოდენობა, რომელთა მუშაობის ხანგრძლივობა არის 1500 და 2500 საათებს შორის.

6. ქვემოთ მოცემულია 50 შემთხვევით გამოკითხული ადამიანის ფეხის ტერფის სიგრძის სიხშირული განაწილება. მათი პასუხები მოცემულია უახლოეს სანტიმეტრებამდე სიზუსტით.

ტერფის სიგრძე (სმ)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
სიხშირე	1	1	0	3	5	13	17	7	2	0	1

(ა) სიგრძის რა საზღვრების დამრგვალებით არის მიღებული 20 სმ?

(ბ) გადაწერეთ ზემოთ მოცემული ცხრილი კლასს ინტერვალებში (a)-ში მიღებული პასუხის მიხედვით.

(გ) ააგეთ დაგროვილ სიხშირეთა გრაფიკი.

(დ) შეაფასეთ:

i. ტერფის სიგრძის მედიანა.

ii. იმ ადამიანების რაოდენობა, რომელთა ფეხის ტერფის სიგრძეა 26 სმ და მეტი.

3.4. რანგები და პროცენტული რანგები

დავუშვათ, რომ მოცემულია n მოცულობის განსხვავებული მნიშვნელობების მქონე შერჩევა $x_1, \ldots, x_n$, სადაც $x_i \neq x_j$, თუ $i = j$, ე.ი. არც ერთი მნიშვნელობა არ მეორდება. შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი (დავალაგოთ მონაცემები ზრდის მიხედვით):

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{(n)}$$

x_i დაკვირვების რანგი (rank) ეწოდება ამ დაკვირვების ნომერს ვარიაციულ მწკრივში (იგი წარმოადგენს მონაცემთა პოზიციის ერთ-ერთ მახასიათებელს). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, x_i-ის რანგი ეწოდება ისეთ r_i მთელ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

$$x_{(ri)} = x_i$$

სინამდვილეში x_i დაკვირვების რანგი r_i არის იმ დაკვირვებების რაოდენობა, რომლებიც არ აღემატებიან x_i დაკვირვებას:

$$r_i \; N \{x_j : x_j \leq x_i\}.$$

ამასთანავე გასაგებია, რომ მაქსიმალური დაკვირვების რანგი დაემთხვევა შერჩევის მოცულობას.

მაგალითი 5. განვიხილოთ შემდეგი მონაცემები: 5, 6, 2, 7, 9, 8, 10 და თითოეულ მათგანს მივუწეროთ თავისი რანგი.

ამოხსნა. ვარიაციული მწკრივი არის: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10. ამიტომ x_1 = 5-ის რანგი იქნება r_1 = 2 (დაკვირვებას 5 არ აღემატება ორი დაკვირვება: 2 და 5); x_2 = 6-ის რანგია r_2 = 3 (დაკვირვებას 6 არ აღემატება სამი დაკვირვება: 2, 5 და 6) და ა. შ. საბოლოოდ მონაცემთა მოცემული სიმრავლე ქვეშ მიწერილი რანგებით ასე გამოიყურება:

5	6	2	7	9	8	10
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	3	1	4	6	5	7

მაგალითი 6. მონაცემებია: 18, 13, 15, 12, 16, 20. მივუწეროთ რანგები. გვაქვს:

18	13	15	12	16	20
5	2	3	1	4	6

აღსანიშნავია, რომ რანგები ინვარიანტულია (არ იცვლება) მონაცემთა ნებისმიერი გადალაგების მიმართ. თუ ამ მაგალითის მონაცემებს დავალაგებთ სხვა თანმიმდევრობით, მაგალითად, შემდეგნაირად: 15, 20, 12, 18, 13, 16, მაშინ რანგები იქნება

15	20	12	18	13	16
3	6	1	4	2	5

ანუ ყოველ წევრს იგივე რანგი მიეწერა რაც ადრე.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: თუ მოცემულია შერჩევა $x_1, \ldots\ldots, x_n$, ისეთი, რომ პირობა $x_i \neq x_j$, თუ $i \neq j$, არ სრულდება, ანუ ზოგიერთი წევრი შერჩევაში მეორდება, მაშინ როგორი წესით მოხდება რანგების მიწერა?

ვთქვათ, ჩვენი მონაცემებია: 18, 28, 23, 29, 32, 18, 21, 14, 18, 14. რანგის განმარტების თანახმად ძველი წესის თანახმად ვარიაციული მწკრივის სახით გადაწერილ ამ მონაცემებს რანგები ასე უნდა მიეწეროს:

14	14	18	18	18	21	23	28	29	32
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

როგორც ვხედავთ, 14-ის ტოლი დაკვირვება შეგვხვდა ორჯერ და ძველი წესით პირველს მივუწერეთ რანგი 1, ხოლო მეორეს – რანგი 2 (ანალოგიურად, 18 შეგვხვდა სამჯერ და, შესაბამისად, მას დაკავებული პოზიციის მიხედვით მიეწერა რანგები: 3, 4 და 5). გამოდის, რომ ერთ-ერთ მათგანს მივანიჭეთ უპირატესობა. უმჯობესია განმეორებადი დაკვირვებებისთვის მიგვეწერა ერთი და იგივე რანგი შემდეგი წესით: ტოლი დაკვირვებებიდან თითოეულს მივანიჭოთ მათზე მოსული რანგების საშუალო არითმეტიკული. მაგალითად, დაკვირვებებს, რომელთა მნიშვნელობებია 14, უნდა მიენიჭოს რანგი 1.5 (რადგან), 18-ის ტოლ დაკვირვებებს – რანგი 4

(ვინაიდან $\frac{3+4+5}{3} = 4$).

მეორეს მხრივ, იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც შერჩევაში არცერთი ელემენტი არ მეორდება, ელემენტის რანგის მითითება არ იძლევა ამომწურავ ინფორმაციას მის მდებარეობაზე, თუ ამავე დროს ჩვენთვის ცნობილი არ არის შერჩევის მოცულობაც. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ x^* ელემენტს n მოცულობის შერჩევიდან და y^* ელემენტს m მოცულობის შერჩევიდან გააჩნიათ ერთი და იგივე რანგი, ჩვენ ჯერ კიდევ ვერ დავასკვნით, რომ მათი პოზიციები იდენტურია, თუ არ გვექნება დამატებითი ინფორმაცია იმის შესახებ, რომ $m = n$.

საზოგადოდ, როგორ შევადაროთ ერთმანეთს იმ ორი მონაცემის პოზიციები, რომლებიც განსხვავებული მოცულობის სხვადასხვა შერჩევას ეკუთვნის და რანგებიც განსხვავებულები აქვს? (ამ ტიპის კითხვები წარმოიშობა, მაგალითად, ქართული ეროვნული გამოცდების დროს, როცა შეფასების ცენტრმა უნდა შეადაროს სხვადასხვა აბიტურიენტების პოზიციები (რეიტინგები) სხვადასხვა დისციპლინებში ან მაშინაც კი, როცა ერთი დისციპლინის ფარგლებში მათ შეასრულეს სხვადასხვა საგამოცდო ვარიანტი). ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ე.წ. **პროცენტული რანგის (percentile rank)** ცნება.

თუ n შერჩევის მოცულობაა, ხოლო დაკვირვების რანგია r, მაშინ ამ დაკვირვების პროცენტული რანგი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

ამრიგად, მოცემული დაკვირვების პროცენტული რანგი მიგვითითებს დაკვირვებულ მნიშვნელობათა რა პროცენტს (მინუს ამ დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევარი) აღემატება ეს მონაცემი. ცხადია, რომ რაც უფრო მაღალია დაკვირვების პროცენტული რანგი, მით უფრო უკეთესია მისი პოზიცია (თუ ნიშნები განლაგებულია აღმავლობის მიხედვით).

ფაქტიურად, პროცენტული რანგი გვიჩვენებს, ამა თუ იმ შერჩევის კონკრეტული მონაცემი, მონაცემების რამდენი პროცენტის წინაა. შესაბამისად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ მონაცემებს სხვადასხვა შერჩევებში მოხვედრის თანაბარი შანსები აქვთ, მაშინ ბუნებრივი იქნება ერთ შერჩევაში უკეთეს პოზიციაზე მდგომ მონაცემს მიენიჭოს უპირატესობა სხვა შერჩევაში უარეს პოზიციაზე მდგომ მონაცემთან შედარებით. მაგალითად, ეროვნულ გამოცდებზე ზოგადი უნარების გამოცდის პირველ ვარიანტში 37 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტს უპირატესობა ენიჭება მესამე ვარიანტში 36 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტთან შედარებით, ან ინგლისურ ენაში 43 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტს უპირატესობა ენიჭება გერმანულ ენაში 42.9 პროცენტული რანგის მქონე აბიტურიენტთან შედარებით.

მაგალითი 7. ვთქვათ, კლასში არის 10 მოსწავლე და გიორგის ნიშნები უფრო მაღალია, ვიდრე ხუთი მოსწავლის. კოტე სწავლობს 50 მოსწავლისაგან შემდგარ კლასში და მისი ნიშნები უფრო მაღალია, ვიდრე 17 მოსწავლის. რომელს უკავია უკეთესი პოზიცია თავის კლასში, კოტეს თუ გიორგია?

პროცენტილებსა და პროცენტულ რანგებს შორის შემდეგი კავშირია:

$$\frac{r-1}{n}\cdot 100\% + \frac{0.5}{n}\cdot 100\% = \frac{2r-1}{2n}\cdot 100\%$$

მოცემული დაკვირვების **პროცენტული რანგი** წარმოადგენს ამ დაკვირვების ქვევით მდგომ მონაცემებზე მოსული პროცენტებისა

$\left(\frac{r-1}{n}\cdot 100\%\right)$ და

თავად დაკვირვებაზე მოსული პროცენტების ნახევრის $\left(\frac{0.5}{n}\cdot 100\%\right)$ ჯამს.

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ მოსწავლეები დალაგებულია ნიშნების ზრდის მიხედვით და გიორგის რანგია 6, ხოლო კოტეს რანგია 18. ჩავატაროთ თითოეულის პოზიციის პროცენტული ანალიზი. გიორგი უკეთესია 5 მოსწავლეზე, რომლებიც შეადგენენ კლასის 50%-ს, თვითონ გიორგიზე მოდის 10%, ხოლო 40%-ს აქვს გიორგიზე უკეთესი ნიშნები. ამ მონაცემებით გიორგის პროცენტული რანგია:

$$50\% + 5\% = 55\%$$

კოტეს ნიშნები უკეთესია 17 მოსწავლის ნიშნებზე, რომელიც შეადგენს კლასის 34%-ს, კოტეზე მოდის 2%, ამიტომ მისი პროცენტული რანგია:

$$34\% + 1\% = 35\%$$

ვინაიდან, გიორგის პროცენტული რანგი (55) უფრო მაღალია, ვიდრე კოტესი (35), ამიტომ გიორგის პოზიცია თავის კლასში უკეთესია, ვიდრე კოტესი საკუთარ კლასში.

ეს მაგალითი ამავე დროს გვიჩვენებს, რომ რანგის ცნების შემოსაღებად არ არის აუცილებელი გაგვაჩნდეს რიცხვითი მონაცემები, საკმარისია მხოლოდ ობიექტების ან ინდივიდების სიმრავლის რაიმე თვისების ან ნიშნის (მაგალითად, ნიჭიერება, სიმაღლე, პოპულარობა და ა. შ.) გაძლიერების ან ზრდის მიხედვით დალაგება და ყოველი მათგანისათვის რიგობრივი ნომრის მიწერა.

თუ შერჩევის ელემენტის პროცენტული რანგია P, მაშინ ეს ელემენტი წარმოადგენს შერჩევის P-პროცენტილს (თუმცა არ არის სავალდებულო, რომ P-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის P-პროცენტილი წარმოადგენდეს შერჩევის ელემენტს).

სავარჯიშოები

1. მოცემულია შერჩევა: 1; 3; 2; 2; 1; 4. იპოვეთ ვარიაციული მწკრივი და 2-ის რანგი.

2. მოცემულია შერჩევა: 10; 9; 9; 2; 3; 3; 3; 5; 7; 1. იპოვეთ ვარიაციული მწკრივი და 3-ის რანგი. იპოვეთ 9-ის პროცენტული რანგი

3. მოცემულია შერჩევა: 2; 9; 9; 7; 6; 6; 5; 5; 10; 10. იპოვეთ ვარიაციული მწკრივი. იპოვეთ 6-ის, 7-ისა და 5-ის პროცენტული რანგი.

4. მოცემულია შერჩევა: 10; 10; 10; 7; 6; 3; 3; 2; 1; 1. იპოვეთ ვარიაციული მწკრივი და თითოეული წევრის პროცენტული რანგი.

5. გრამებში გაზომილი 25 ხიზილალის ქილის მასების ჯამი და მასების კვადრატების ჯამი აღმოჩნდა შესაბამისად:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 1268.2 \quad \text{და} \quad \sum_{i=1}^{25} x_i = 64585.16.$$

იპოვეთ მასების საშუალო და დისპერსია. რომელი ერთეულით იზომება დისპერსია?

6. ქვემოთ მოყვანილია, კრიკეტის 12 თამაშის განმავლობაში, ტომისა და ვილის მიერ ტაფელით მოგერიებული ბერთების რაოდენობა:

ტომი	23	83	40	0	89	98	71	31	102	48	15	18
ვილი	43	32	61	75	68	92	17	15	25	43	86	12

თქვენი აზრით, რომელი მოთამაშეა:

ა) უკეთესი; ბ) უფრო სტაბილური.

7. კლასის 12 ბიჭის სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა შესაბამისად ტოლია 148.8 სმ და 5.4 სმ. მათ დაემატა ერთი ბიჭი, რომლის სიმაღლეა 153.4 სმ. გამოთვალეთ 13 ბიჭის სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

8. დიდი პოპულაციიდან აღებული შემთხვევითი შერჩევა შედგება შემდეგი მონაცემებისგან:

13.2 5.7 8.3 6.7 9.2 11.4 9.7 8.1 6.3

გამოთვალეთ პოპულაციის საშუალოსა და სტანდარტული გადახრის ჩაუნაცვლებელი შეფასებები.

9. კლასში 25 მოსწავლეა, რომელთაგან 12 ვაჟია და 13 ქალი. მათემატიკაში ტესტირების შედეგად 12 ვაჟის საშუალო ქულამ შეადგენა 31, ხოლო სტანდარტული გადახრა იყო 6.2. გოგონების საშუალო ქულა იყო 36, სტანდარტული გადახრა კი 4. ვიპოვოთ მათემატიკაში ტესტირების ქულების საშუალო და სტანდარტული გადახრა მთელი კლასის 25 მოსწავლისათვის.

10. ცნობილია, რომ $n = 10$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 410$ და $s_n^2 = 12$. იპოვეთ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

11. 80 სტუდენტი გოგონას სიმაღლეებისა და სიმაღლეების კვადრატების ჯამია $\sum_{i=1}^{80} x_i = 13040$ და $\sum_{i=1}^{80} x_i^2 = 2133520$, შესაბამისად. იპოვეთ სიმაღლეების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

სავარჯიშოები

12. ქვემოთ მოყვანილია 96 დღის განმავლობაში აკადემიური პერსონალის მიერ გაცდენილი ლექციების რაოდენობა უნივერსიტეტში:

გაცდენილი ლექციების რაოდენობა	0	1	2	3	4	5
დღეების რაოდენობა	54	24	11	4	2	1

გამოთვალეთ გაცდენილი ლექციების რაოდენობის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

13. მენეჯერი სამუშაო დღის ბოლოს ამოწმებს მხატვრის მიერ დღის განმავლობაში მოხატული თეფშების ხარისხს და მათ ნაწილს იწუნებს. ქვემოთ მოყვანილია 30 დღის განმავლობაში მენეჯერის მიერ დაწუნებული თეფშების რიცხვი:

დაწუნებული თეფშების რაოდენობა	0	1	2	3	4	5	6
დღეების რაოდენობა	18	5	3	1	1	1	1

შეამოწმეთ, რომ წუნდებული თეფშების რაოდენობის სტანდარტული გადახრა და-ახლოებით ტოლია გაბნევის დიაპაზონის მეთხედის.

14. ქვემოთ მოყვანილია 80 მორბენალის მიერ 20 კილომეტრიან მარათონულ დისტანციაზე დახარჯული დროების (წუთებში) დაჯგუფებული სიხშირული განაწილების ცხრილი:

სირბილის დრო	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
დღეების რაოდენობა	1	4	26	24	10	7	8

შეაფასეთ სირბილის დროის შერჩევითი დისპერსია. თუ ეს 80 მორბენალი შემთხვევით იქნა შერჩეული მარათონში მონაწილე 2000 მორბენალიდან, რა იქნება 2000 მორბენალის დისპერსიის უკეთესი შეფასება.

15. შეარჩიეს ყავის 80 პაკეტი და მათი მასები (გრამებში) განაწილებული აღმოჩნდა შემდეგნაირად:

პაკეტის მასა	244-246	247-249	250-252	253-255	256-258
პაკეტების რაოდენობა	10	20	24	18	8

შეაფასეთ მასების საშუალო და სტანდარტული გადახრა. როგორ შეიძლება შეფასების სიზუსტის გაზრდა?

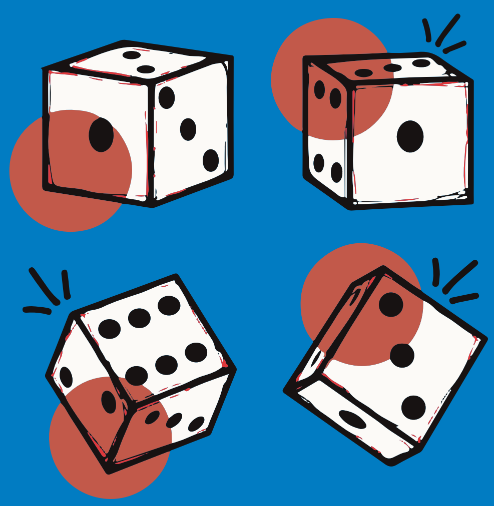
16. საწარმოს 104 მუშის ასაკი განაწილებულია შემდეგნაირად:

ასაკი	16-20	21-24	26-30	31-35	36-40	41-50	51-60	61-70
სიხშირე	5	12	18	14	25	16	8	6

შეაფასეთ მუშების ასაკის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

სხვა საწარმოში, სადაც მუშათა რიცხვი ისევ 104-ია, ასაკის საშუალო შეადგენს 28.4 წელს, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 9.9 წელია. შეადარეთ ამ საწარმოების მუშათა ასაკის განაწილებები.

IV. დავალების წარდგენა



პროექტი

საკვანძო კითხვა:

- *გიფიქრიათ თუ არა, რა განსხვავებაა თეორიულ და ექსპერიმენტულ ალბათობებს შორის? შესაძლებელია თუ არა თეორიულად ერთი მოვლენის მოხდენის ალბათობა განსხვავდებოდეს რეალურად მისი მოხდენის ალბათობაზე?*

თქვენი დავალება

1. შეისწავლეთ თეორიული და ესპერიმენტული ალბათობა და დაითვალეთ რა შეიძლება იყოს კამათლის გაგორების შედეგად წყვილის მოსვლის ალბათობა? ან ნებისმიერი თქვენ მიერ სასურველი შედეგის მოხდენის ალბათობა?
2. რეალურად აიღეთ კამათელი, გააგორეთ და შეადარეთ თქვენი მონაცემები თოერიულად შესაძლო შედეგებს.
3. შეარჩიეთ თქვენთვის სასურველი საკვლევი საკითხი, გამოთქვით ვარაუდი: რა არის თქვენ მიერ შერჩეული მოვლენის მოხდენის თეორიული ალბათობა; შემდეგ შეამოწმეთ ექსპერიმენტულად შედეგები და დაწერეთ ანალიზი.

დავალება წარმოადგინეთ თქვენთვის მისაღები ფორმით.

დავალების წარდგენისას უპასუხეთ კითხვებს:

- როგორ განისაზღვრება რეალური მოვლენის ხდომილობის ალბათობა? როგორ გვეხმარება არჩევანის გაკეთებაში და სწორი გადაწყვეტილების მიღებაში შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის ცოდნა?
- რა დაადგინეთ კვლევის შედეგად? რამდენად მნიშნელოვანია რეალური ექსპერიმენტის დაორგანიზება და ჩატარება?
- რა მოხდება თუ მხოლოდ თეორიულ მასალას დავეყრდნობით და არ ვეცდებით რეალურ ცხოვრებაში ცოდნის გამოყენებას?

4.1. ხდომილობა; ხდომილობის ალბათობის განმარტება

ადამიანები ყოველდღიურ ცხოვრებაში ხშირად ვიყენებთ ტერმინს „ალბათ“. ამ სიტყვას ვიყენებთ იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა გამოვთქვათ ჩვენი მოსაზრება რაიმე მოვლენის მოხდენის ან არმოხდენის შესახებ. მაგ. „ხვალ ალბათ წვიმა იქნება“, „ახალი წლის დღეებში პროდუქტებზე ფასები, ალბათ, ისევ მოიმატებს“, „ორ წელიწადში, ალბათ, ვერ შევაგროვებ ახალი მანქანის შესაძენ თანხას“ და ა. შ. ცხადია, ყველა ამ მოსაზრებაში ჩვენ ვითვალისწინებთ რაღაც წინაპირობებს და მათზე დაყრდნობით ვამბობთ ამ დასკვნებს. მაგ.: გუშინ და დღეს წვიმდა და ჩვენი მოსალოდნელი ვარაუდია, რომ ხვალაც იწვიმებს. გასულ რამდენიმე წელიწადს, ახალი წლის დღეებში, პროდუქტებზე ფასები ყოველთვის მატულობდა და ჩვენი ვარაუდი არის რომ, მოახლოებულ ახალი წლის დღეებშიც იგივე განმეორდება.

თუ ზემოთ განხილულ მაგალითებს მივუდგებით მათემატიკურად, მაშინ არცერთ წარმოთქმულ მოსაზრებაზე არ შეიძლება დამაჯერებლად ვთქვათ, რომ იგი ჭეშმარიტია ან მცდარია. მათემატიკაში სიტყვა „ალბათობა“ გამოიყენება მკაცრად განსაზღვრული აზრით, რომელსაც არანაირი კავშირი არა აქვს ადამიანის სუბიექტურ მოსაზრებებთან, ან სურვილებთან.

განვიხილოთ ერთი მონეტის აგდება. ცხადია, წინასწარ ჩვენ არ ვიცით რა მოვა, მაგრამ ვიცით, რომ მოსალოდნელი შედეგია ან გერბი (გ), ან საფასური (ს). თუ მონეტა არ არის ყალბი, მაშინ სხვა შედეგის მოსვლა უბრალოდ შეუძლებელია. მაშასადამე, მონეტის აგდებისას გერბის ან საფასურის მოსვლის შესაძლებლობა თანაბრად შესაძლებელია. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ქმედებებს, რომელთა ყველა შესაძლო შედეგის მოსვლა თანაბრად შესაძლებელია.

ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის დარგს, რომელიც შეისწავლის ისეთი მოვლენების მათემატიკურ მოდელებს, რომელთა მოსალოდნელი ყველა შედეგი ცნობილია და მათი განხორციელება თანაბრად შესაძლებელია.

შემთხვევითი ექსპერიმენტი

ალბათობის თეორიის შესწავლისთვის საჭიროა შესაბამისი ტერმინებისა და აღნიშვნების გაცნობა. ქმედებას, რომელიც შეიძლება რაღაც კონკრეტული შედეგით დასრულდეს, უწოდებენ **შემთხვევით ექსპერიმენტს**. ალბათობის თეორიაში განხილული შემთხვევითი ექსპერიმენტი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

ა) ექსპერიმენტის შედეგთა რაოდენობა უნდა იყოს სასრული, მათგან ყოველი ორი შედეგი ერთდროულად ვერ განხორციელდება;

ბ) ექსპერიმენტის შედეგის წინასწარ დადგენა შეუძლებელია;

გ) ექსპერიმენტი, პირობების შეუცვლელად, შეიძლება ჩავატაროთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც ჩვენ მოგვესურვება.

შემთხვევითი ექსპერიმენტის მაგალითებია: გერბის, კამათლის გაგორება, ბზრიალის დატრიალება, მონეტის აგდება და ა.შ; ყველა იმ მოსალოდნელ შედეგს, რაც შეიძლება თითოეულ ექსპერიმენტს მოჰყვეს – ეწოდება **ხდომილობა**, ხოლო ყველა შესაძლო ხდომილობის ერთობლიობას – ხდომილობათა სიმრავლე.

შემთხვევითი ექსპერიმენტი	მონეტის აგდება	კამათლის გაგორება	ბზრიალას დატრიალება
			
შედეგები-ხდომილობათა სიმრავლე	{გერბი,საფასური}	{1;2;3;4;5;6}	{წით.ნარინჯ. მწვანე,ლურჯი}

- **მონეტის აგდება** შეიძლება დასრულდეს საფასურის ან გერბის მოსვლით; შესაბამისად ხდომილობებია: საფასური და გერბი, ხოლო ხდომილობათა სიმრავლეა: {გერბი,საფასური};

  მითითება: შეგახსენებთ, სიმრავლის ელემენტებს ვწერთ ფიგურულ ფრჩხილებში { }, ხოლო სიმრავლეს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით;

- **კამათლის გაგორების დროს**, ექსპერიმენტი შეიძლება დასრულდეს 1-ის, 2-ის, 3-ის, 4-ის, 5-ის, ან 6-ის მოსვლით; შესაბამისად, კამათლის გაგორების ექსპერიმენტის ხდომილობათა სიმრავლეა: {1;2;3;4;5;6}; ხოლო 1, 2, 3, 4, 5 ან 6 ხდომილობებია. (ანუ ის, რაც შეიძლება მოხდეს);

- მიღებულია, რომ ხდომილობათა სიმრავლეს ალბათობაში აღვნიშნავთ სიმბოლოთი Ω, (იკითხება ომეგა), n(Ω) – სიმბოლოს მეშვეობით კი აღინიშნება სიმრავლეში ელემენტთა რაოდენობა.

თითოეულ შედეგს, რომლითაც შემთხვევითი ექსპერიმენტი შეიძლება დასრულდეს, ეწოდება **ელემენტარული ხდომილობა.** ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლეს **ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე** ეწოდება. ზოგადად, იგი აღინიშნება Ω სიმბოლოთი, ხოლო მასში შემავალი ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა აღინიშნება $n(\Omega)$-თი.

ნიმუში 1 – განვიხილოთ ორი ექსპერიმენტი და გავაანალიზოთ შედეგები

ა) მონეტის აგდების ექსპერიმენტში შეიძლება მოვიდეს გერბი ან საფასური; ე.ი. Ω = {1;2;}

$n(\Omega) = 2$;

როგორც ვიცით, მონეტის აგდების დროს შეიძლება მოვიდეს საფასური ან გერბი, ვამბობთ, რომ საფასურის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{2}$. ხოლო გერბის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{2}$.

მათემატიკაში ამ ფაქტს ვწერთ შემდეგნაირად:

P (საფასური) = $\frac{1}{2}$

P (გერბი) = $\frac{1}{2}$

P – აღნიშნავს ალბათობას (Probability)

ბ) კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში – ექვსი ელემენტარული ხდომილობაა, ანუ კამათლის გაგორებისას მოვა ან 1, ან 2, ან 3, ან 4, ან 5, ან 6;

Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} და $n(\Omega) = 6$

თითოეულის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{6}$

- **კითხვა:** *კამათლის გაგორების შედეგად, რამდენად ხშირად შეიძლება მოვიდეს ლუწი რიცხვი ან კენტი?*

კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში შემთხვევითი ხდომილობა შეიძლება იყოს:
A = {კენტი რიცხვები} = {1; 3; 5} ან B = {ლუწი რიცხვები} = {2; 4; 6}

კამათლის გაგორების შედეგად, ლუწი რიცხვის მოსვლათა შესაძლო რაოდენობაა –3, ხოლო კენტი რიცხვის მოსვლის შესაძლო რაოდენობაა –3; შევადგინოთ სიხშირის ცხრილი და დავითვალოთ თითოეულის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე:

	ხდომილობათა რაოდენობა	ფარდობითი სიხშირე
კენტი	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
ლუწი	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

P(კენტი რიცხვი) = $\frac{1}{2}$

P(ლუწი რიცხვი) = $\frac{1}{2}$

როგორც ხედავთ, ალბათობა ექსპერიმენტის შედეგად ხდომილობის მოსვლის ფარდობითი სიხშირეა;

რადგან A სიმრავლით აღვნიშნეთ კენტი რიცხვების ხდომილობა, ხოლო B სიმრავლით – ლუწი რიცხვების, სიმარტივისთვის, შეგვიძლია, ფრჩხილებში მივუთითოთ სიმრავლის აღმნიშვნელი სიმბოლო.

გაგრძელება

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

აქვე დავამატოთ, რომ A და B სიმრავლეები, $A \subseteq \Omega$ და $B \subseteq \Omega$

ტრადიციული კამათლის გაგორებისას, შეუძლებელია მოვიდეს 7; ამიტომ 7-ს ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა და მისი მოსვლის ალბათობაა 0;

თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობაა $\frac{1}{6}$

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება მოცემული **ექსპერიმენტის შემთხვევითი ხდომილობა.** ხდომილობა აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: A; B; C და ა. შ. ხდომილობათა სივრცეში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი: $n(A)$; $n(B)$; $n(C)$. ცხადია, რომ ნებისმიერი A ხდომილობისთვის $A \subseteq \Omega$ და $n(A) \leq n(\Omega)$.

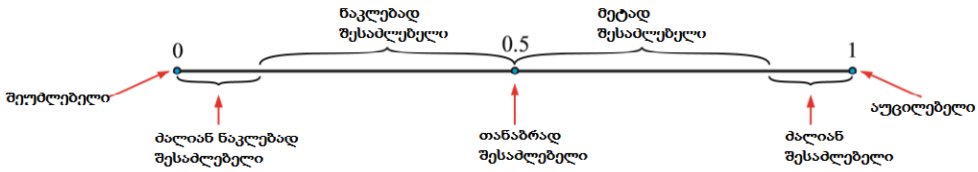
ზოგიერთი ხდომილობა შეიძლება ისე იყოს მოცემული, რომ ის არ შედიოდეს ხომილობათა სივრცეში, მაშინ მას ეწოდება **შეუძლებელი ხდომილობა.** შესაძლებელია, რომ ხდომილობა დაემთხვეს ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს, მაშინ მას ეწოდება **აუცილებელი ხდომილობა.**

შეუძლებელი ხდომილობა – არის ხდომილობა, რომლის მოხდენის შანსიც 0%-ია, მიჩნეულია 0-ის ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობად.

აუცილებელი ხდომილობა – არის ხდომილობა, რომლის მოხდენის შანსიც 100%-ია, მიჩნეულია 1-ის ტოლი ალბათობის მქონე ხდომილობად.

სხვა ყველა ხდომილობის ალბათობა მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის.

ქვემოთ მოცემული რიცხვითი სხივი აღწერს, თუ როგორ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა სიდიდის ალბათობები, როგორ შეიძლება აღვწეროთ და სიტყვიერად შევაფასოთ ალბათობები:



ჩვეულებრივ, არსებობს ორი ტიპის ალბათობა:

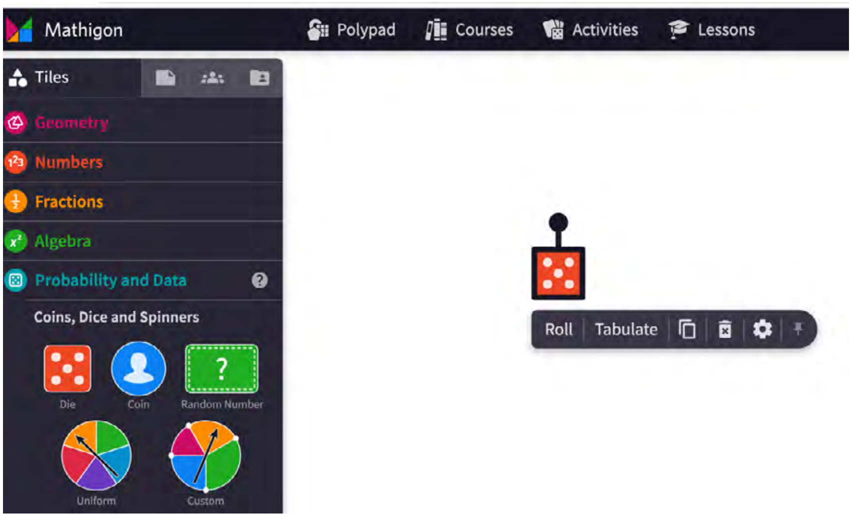
- **ექსპერიმენტული (იგივე ემპირიული) ალბათობა**, რომელიც დაფუძნებულია უკვე მომხდარი ექსპერიმენტის შედეგებზე;
- **თეორიული ალბათობა,** რომელიც დაფუძნებულია ექსპერიმენტის განხორციელებამდე შანსების გამოთვლაზე. იგი ძირითადად იყენებს შანსების გათანაბრების პრინციპებს სიმეტრიულობაზე დაყრდნობით.

მინიშნება: კამათლის გაგორების და მონეტის აგდებისას მიღებული ალბათობები, არის თეორიული ალბათობები, რეალური ექსპერიმენტის დროს შეიძლება არ განმეორდეს იგივე შედეგები;

ექსპერიმენტული ალბათობა

შემთხვევითი ექსპერიმენტის განხორციელებისას, იმის აღსაწერად თუ რას ვაკეთებთ ან რა შედეგები მივიღეთ, ვიყენებთ შემდეგ ტერმინოლოგიას:

- **ცდათა რიცხვი** გვიჩვენებს ერთი ტიპის ექსპერიმენტის გამეორებათა რაოდენობას;
- **ელემენტარული ხდომილობები** არის ერთი ექსპერიმენტისას მისაღები სხვადასხვა შესაძლო შედეგები;
- ელემენტარული ხდომილობის **სიხშირე** გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ განხორციელდა მოცემული ხდომილობა;
- ელემენტარული ხდომილობის **ფარდობითი სიხშირე** არის წილადი, რომელიც გვიჩვენებს მოცემული ხდომილობის განხორციელებათა რაოდენობა ცდათა რიცხვის რა ნაწილია.

	კვლევითი აქტივობა: კამათლის გაგორება
ექსპერიმენტი **საკვანძო კითხვა:** *რა განსხვავებაა თეორიულ და ექსპერიმენტულ ალბათობებს შორის?*	თეორიულად ჩვენ ვიცით, რომ კამათლის გაგორებისას თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{6}$-ია; თეორიულად, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ კამათელს გავაგორებთ 6-ჯერ, ყველა შედეგი უნდა მივიღოთ. ▪ აიღეთ სახლში კამათელი, ჩაატარეთ ექსპერიმენტი, გააგორეთ 6-ჯერ და ჩაინიშნეთ შედეგები; რამდენჯერ მოვიდა თითოეული ხდომილობა (1,2,3,4,5,ან 6) ? ▪ შედით ვებ-გვერდზე Mathigon, მარცხენა მხარეს ჩამონათვალში ნახეთ Probability, ამოარჩიეთ კამათელი, გაააქტიურეთ კამათელი და დააწკაპეთ ღილაკზე (Roll); დააორგანიზეთ შედეგები ცხრილში.
	

გაგრძელება

კვლევითი აქტივობა: კამათლის გაგორება

ექსპერიმენტი

? საკვანძო კითხვა:

რა განსხვავებაა თეორიულ და ექსპერიმენტულ ალბათობებს შორის?

ბ) წიგნის ავტორი შევიდა ვებ-გვერდზე გააგორა კამათელი 20-ჯერ, ქვემოთ მოცემულია შედეგები:

კამათლის ხდომილობა	მოსვლის რაოდენობა	ფარდობითი სიხშირე
1	5	$\frac{5}{20} = 25\%$
2	2	$\frac{2}{20} = 1\%$
3	5	$\frac{5}{20} = 25\%$
4	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
5	3	$\frac{3}{20} = 15\%$
6	4	$\frac{4}{20} = 20\%$

როგორც ცხრილში ხედავთ, 20-ჯერ გაგორებისას 4-იანი მოვიდა ერთხელ, თანაბარი შედეგები არ დაჯდა; ცხრილში დაორგანიზებულია ასევე თითოეულის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე, რომელიც შემდეგ წარმოდგენილია პროცენტის სახით. თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობა შეესაბამება ფარდობით სიხშირეს.

თუ ექსპერიმენტს ვატარებთ 20-ჯერ, თითოეული ხდომილობის მოსვლის ალბათობა არის ექსპერიმენტისას ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა შეფარდებული ჩატარებული ექსპერიმენტის რაოდენობასთან.

$$P(4) = \frac{1}{20} = \frac{\textit{ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა}}{\textit{ექსპერიმენტის ჩატარების რაოდენობა}}$$

კონკრეტული ელემენტარული ხდომილების მოსვლის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\text{ექსპერიმენტული ალბათობა} = \frac{\textit{ხდომილობის მოსვლის რაოდენობა}}{\textit{ექსპერიმენტის ჩატარების რაოდენობა}}$$

მაგალითად, კონკრეტული კამათლის გაგორების ექსპერიმენტში A = {5-ზე ნაკლები რიცხვები } = {1, 2, 3, 4},

ხოლო, B = {4-ზე მეტი რიცხვები} = {5; 6}

$P(A) = \frac{13}{20}$ =65%, $P(B) = \frac{7}{20}$ =35%

$P(A)+ P(B) = 1$

თუ A-თი აღვნიშნავთ, რომელიმე ხდომილობათა სიმრავლეს, ხოლო Ω ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეს, მაშინ:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ექსპერიმენტული ალბათობა არის ამ ექსპერიმენტში მოცემული ხდომილობის განხორციელების შესაძლებლობის რიცხვითი, წილობრივი მაჩვენებელი. დავუშვათ, გვინდა, რომ განხორციელდეს რაიმე A ხდომილობა, ცხადია, იგი განხორციელდება იმ შემთხვევაში, თუ ექსპერიმენტის შედეგად განხორციელდა A ხდომილობაში შემავალი რომელიმე ელემენტარული ხდომილობა. ამ ელემენტარულ ხდომილობებს ეწოდება A **ხდომილობის ხელშემწყობი ხდომილობები**, ცხადია, მათი რაოდენობა იქნება $n(\mathrm{A})$. ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე წარმოადგენს ყველა შესაძლო ხდომილობებს და მათი რაოდენობაა $n(\Omega)$.

მოცემულ ექსპერიმენტში რაიმე A **ხდომილობის ალბათობა** უდრის წილადს, რომლის მრიცხველია ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო მნიშვნელი ელემენტარულ ხდომილობათა მთლიანი რაოდენობაა. იგი აღინიშნება P(A) სიმბოლოთი და უდრის წილადს:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}$$

ეს **არის ხდომილობის კლასიკური განმარტება.**

ზოგადად, რადგან ნებისმიერი A ხდომილობისთვის $n(\mathrm{A}) \le n(\Omega)$, ამიტომ $\mathrm{P(A)}=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)}) \le 1$. რადგან წილადის მრიცხველიც და მნიშვნელიც არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ $P(A) \ge 0$. საბოლოოდ, მივიღეთ, რომ ნებისმიერი *A* ხდომილობისთვის *P*(*A*), აკმაყოფილებს უტოლობას: $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

რიცხვს, რომელსაც უახლოვდებიან ხდომილობის ფარდობითი სიხშირეები, ამ ხდომილობის **ექსპერიმენტული ალბათობა** ეწოდება. იგი არის, ერთგვარად, ხდომილობის განხორციელების შანსი მოცემულ ექსპერიმენტში.

ნიმუში 2 – ახსნა

რა არის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას **არ მოვა** 3-ზე ნაკლები რიცხვი?

ექსპერიმენტი მდგომარეობს კამათლის ერთხელ გაგორებაში.

A შემთხვევითი ხდომილობაა: A = {3-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა}, A = {1; 2}, $n(\mathrm{A}) = 2$;

ცნობილია, რომ ამ ექსპერიმენტში ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა

Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} და $n(\Omega) = 6$.

განვიხილოთ ხდომილობა: არ მოვა 3-ზე ნაკლები რიცხვი, ანუ მოვა 3-ზე მეტი ან ტოლი რიცხვი, ე.ი. არ შესრულდება A ხდომილობა.

ამ ხდომილობას **უწოდებენ A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას და აღნიშნავენ $\overline{\mathrm{A}}$ სიმბოლოთი.**

გაგრძელება

ცხადია, რომ $\bar{A} = \{3; 4; 5; 6\}$ და $n(\bar{A}) = 4$.

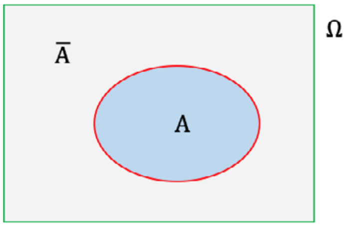
მარტივად ჩანს, რომ $n(\Omega) = n(A) + n(\bar{A}) = 2 + 4 = 6$:

ახლა განვიხილოთ A და $\bar{A}$ ხდომილობების ალბათობები.

ხდომილობის ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, მივიღებთ: $P(\bar{A}) = \dfrac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6}$, ხოლო $P(A) = \dfrac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6}$.

მარტივად ჩანს, რომ $P(A) + P(\bar{A}) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{6} = 1$

თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამის სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



ნიმუში 3

კონუსის ფორმის პლასტმასის ფიგურა ჰაერში ააგდეს 300-ჯერ, რის შედეგადაც იგი 203-ჯერ დაეცა გვერდით, ხოლო 97-ჯერ ფუძით. ამ ცდაზე დაკვირვებით შეგვიძლია ვთქვათ:

აღნიშნული ექსპერიმენტის შედეგები აღებულია (IB-ის წიგნიდან)

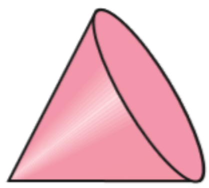
- ცდათა რიცხვია 300;
- ელემენტარული ხდომილობებია „გვერდი“ და „ფუძე“;
- „გვერდის“ და „ფუძის“ სიხშირეები შესაბამისად, არის 203 და 97;
- „გვერდის“ ფარდობითი სიხშირე არის $\dfrac{203}{300} \approx 67.7\%$;
- „ფუძის“ ფარდობითი სიხშირე არის $\dfrac{97}{300} \approx 32.3\%$.

როდესაც სხვა დამატებითი მონაცემები არ გაგვაჩნია, თითოეული ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე არის მათი მოხდენის ალბათობის საუკეთესო შეფასება.

ე.ი. ე.წ. **ექსპერიმენტული ალბათობა** არის ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე.

ეს ფაქტი მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$P(\text{გვერდი}) \approx 0.677$$
$$P(\text{ფუძე}) \approx 0.323$$



ნიმუში 4

ქეთი აგორებს ორ კამათელს, რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) კამათლებზე მოსული რიცხვების ჯამი იქნება 5?
ბ) მოვა წყვილები;
გ) მოვა 1-იანი და 5-იანი;

იმისათვის, რომ თვალსაჩინო იყოს შედეგები, დავაორგანიზოთ ინფორმაცია ცხრილში, ჩავთვალოთ, ერთი კამათელი არის წითელი ფერის, მეორე კი ლურჯის ფერის:

ცხრილით ნაჩვენებია, კამათლის გაგორებისას რა ვარიანტები შეიძლება მოვიდეს, სულ არის 36 ვარიანტი;

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

ა) როგორც ხედავთ, ორ კამათელზე მოსული რიცხვების ჯამი – 5 შეიძლება მოვიდეს 4-ჯერ, შესაბამისად, ალბათობა არის $P = \frac{4}{36}$;

ბ) ცხრილიდან ჩანს, რომ ორივე კამათელზე შეიძლება მოვიდეს 6 წყვილი რიცხვი:

(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)

$$P(\text{წყვილის მოსვლის}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

გ) ცხრილიდან ჩანს, რომ 1 და 5 შეიძლება მოვიდეს 2-ჯერ; წითელ კამათელზე 1 და ლურჯზე 5 ან წითელ კამათელზე 5 და ლურჯზე 1;

$P(\text{1-ს და 5-ს მოსვლა}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ნიმუში 5 – ნიმუშით ახსნა

დავუშვათ, კალათში დევს 9 თეთრი, 6 შავი და 5 წითელი ბურთულა. კალათიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ ერთ ბურთულას. რა იქნება იმის ალბათობა, რომ:

ა) ამოღებული ბურთი იქნება შავი;
ბ) ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან წითელი;
გ) ამოღებული ბურთი იქნება მწვანე;
დ) ამოღებული ბურთი არ იქნება წითელი;
ე) ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან შავი, ან წითელი.

ამოცანის მათემატიკური მოდელირება. მოცემულ ექსპერიმენტში ურნაში დევს სულ 20 ბურთულა და მათგან ვიღებთ ერთ ნებისმიერ ბურთულას, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეში იქნება 20 ელემენტი, ე.ი. $n(\Omega) = 20$. ახლა ვიპოვოთ საჭირო ალბათობები.

ა) განვიხილოთ ხდომილობა A, ამოღებული ბურთი იქნება შავი. ურნაში არის 6 შავი ბურთულა და მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, ამიტომ $n(A) = 6$. შესაბამისად, A ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

ბ) განვიხილოთ ხდომილობა B, ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან წითელი. ურნაში არის 9 თეთრი და 5 წითელი ბურთულა, ამიტომ მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, გვექნება $n(B) = 14$. შესაბამისად, B ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

გ) განვიხილოთ C ხდომილობა, ამოღებული ბურთი იქნება მწვანე. ურნაში მწვანე ფერის ბურთულა არ არის, ამიტომ C ხდომილობის იქნება შეუძლებელი ხდომილობა და ცხადია $n(C) = 0$. შესაბამისად, A ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{0}{20} = 0$.

დ) განვიხილოთ ხდომილობა D, ამოღებული ბურთი არ იქნება წითელი. ურნაში არის 5 წითელი ბურთულა, ხოლო დანარჩენი 15 ბურთულა არის არაწითელი, შესაბამისად, მათგან ნებისმიერი ერთის ამოღება იქნება ჩვენთვის სასურველი ხდომილობა, ამიტომ $n(D) = 15$. შესაბამისად, D ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

ე) განვიხილოთ ხდომილობა E, ამოღებული ბურთი იქნება ან თეთრი, ან შავი, ან წითელი. ცხადია, ურნიდან ნებისმიერად ამოღებული ბურთულა იქნება ჩვენთვის სასურველი, რადგან ურნაში სხვა ფერის ბურთულები არ არის. ე.ი. E ხდომილობა იქნება აუცილებელი ხდომილობა და $n(E) = 20$. შესაბამისად, E ხდომილობის ალბათობა იქნება: $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{20}{20} = 1$.

სავარჯიშოები

1. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი ხდომილობა, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ვაგორებთ ჩვეულებრივ ერთ კამათელს და ხდომილობებია:

A = {ლუწი რიცხვის მოსვლა};

B = {5-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა};

C = {დადებითი რიცხვის მოსვლა};

D = {2-ის ჯერადი რიცხვის მოსვლა};

E = {7-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა};

F = {1-ზე მეტი და 4-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლა}.

ბ) ერთ მონეტას ვაგდებთ ორჯერ და ხდომილობებია:

A = {ორივეჯერ მოვა საფასური};

B = {ერთხელ მოვა საფასური და ერთხელ გერბი};

C = {ერთხელ მაინც მოვა საფასური};

D = {არც ერთხელ არ მოვა გერბი};

E = {ერთხელ მაინც მოვა ან გერბი,ან საფასური};

F = {სამივეჯერ მოვა გერბი}.

2. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი ხდომილობა, თუ ექსპერიმენტი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ურნაში დევს 5 ყვითელი, 4 შავი და 7 მწვანე ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ 4 ბურთულას. მოცემული ხდომილობებია:

A = {ოთხივე ბურთულა მწვანეა};

B = {ოთხივე ბურთულა სხვადასხვაფერია};

C = {ორი ყვითელია და ორი შავი};

D = {სამი ერთნაირი ფერისაა და მეოთხე სხვა ფერის};

E = {ერთი ყვითელია და სამი შავი};

F = {ერთი მაინც არის ან შავი, ან მწვანე, ან ყვითელი}.

ბ) სნაიპერი შვიდჯერ ესვრის მიზანში. მოცემული ხდომილობებია:

A = {შვიდჯერვე მოახვედრა მიზანს};

B = {მხოლოდ ერთხელ ააცილა მიზანს};

C = {სამჯერ მოახვედრა მიზანს და ოთხჯერ ააცილა};

D = {მიზანში მოხვედრათა რაოდენობა ორჯერ მეტია აცილებათა რაოდენობაზე};

E = {პირველი სროლა მოახვედრა, ხოლო დანარჩენი ააცილა};

F = {ხუთჯერ მოახვედრა და სამჯერ ააცილა}.

გ) ყუთში 33 ბარათია, თითოეულზე აწერია ქართული ანბანის განსხვავებული ერთი ასო. ყუთიდან ერთმანეთის მიყოლებით ვიღებთ ოთხ ბარათს და იმავე თანმიმდევრობით ვდებთ მაგიდაზე. მოცემული ხდომილობებია:

A={ოთხივე ასო სხვადასხვაა}.

სავარჯიშოები

B = {ორი ხმოვანია და ორი თანხმოვანი};

C = {ასოებით მიღებული სიტყვაა „გემი“};

D = {მიიღება სახელი „კახა“};

E = {ყველა ასო ხმოვანია};

F = {პირველი სამი ასო თანხმოვანია, ხოლო მეოთხე ხმოვანი}.

3. ქვემოთ ჩამოთვლილი ხდომილობებისათვის მოიყვანეთ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობები:

ა) ერთი კამათლის გაგორებისას მოვა 4-ზე პატარა რიცხვი;

ბ) ერთი კამათლის გაგორებისას მოვა 2-ის ჯერადი რიცხვი;

გ) ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7;

დ) ორი კამათლის გაგორებისას ორივეზე მოვა ლუწი რიცხვები;

ე) ორი კამათლის გაგორებისას მოვა სხვადასხვა რიცხვები;

ვ) მონეტის ოთხჯერ აგდებისას მოვა ზუსტად ორი გერბი;

ზ) მონეტის ოთხჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა საფასური.

4. აღწერეთ ქვემოთ მოცემული ექსპერიმენტის შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.

ა) ვირჩევთ ოცზე ნაკლებ ერთ ნატურალურ რიცხვს;

ბ) 26 ბარათიდან თითოეულს აწერია ინგლისური ანბანის განსხვავებული ერთი ასო. ამ ბარათებიდან ვირჩევთ ერთ ბარათს;

გ) ვაგდებთ ორ მონეტას;

დ) ვაგდებთ ერთ კამათელს და ერთ მონეტას;

ვ) ურნაში დევს 7 ლურჯი, 3 შინდისფერი და 4 წითელი ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ ერთ ბურთულას;

ზ) ერთ კამათელს ვაგდებთ სამჯერ;

თ) ურნაში დევს 5 ლურჯი, 6 შინდისფერი და 3 წითელი ბურთულა. ურნიდან, მასში ჩაუხედავად, ვიღებთ ორ ბურთულას.

5. მაგიდაზე დევს დანომრილი ოთხი ბარათი. მათი ნომრებია 1, 2, 3 და 4. შემთხვევით იღებენ ორ ბარათს. აღწერე ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.

6. მაგიდაზე დევს ხუთი დანომრილი ბარათი, რომელთა ნომრებია: 1, 2, 3, 4 და 5. ვიღებთ ერთ ბარათს, რა არის ალბათობა იმისა, რომ ჩვენ მიერ აღებულ ბარათზე იქნება:

ა) 3-ზე მეტი რიცხვი? გ) კენტი რიცხვი?

ბ) ლუწი რიცხვი? დ) 7-იანი?

7. რას უდრის ერთი ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა, თუ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება 12 ელემენტისაგან?

შეგახსენებთ: როდესაც ყოველი ხდომილობის მოსვლა თანაბარალბათურია, ეწოდება ელემენტარული ხდომილობა.

8. რამდენი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე, თუ ერთი ელემენტარულ ხდომილობის ალბათობაა $\frac{1}{9}$?

სავარჯიშოები

9. აგორებენ ორ კამათელს; იპოვე შემდეგი ხდომილობების ალბათობები:

ა) A = {ჯამში მოვა 7 ქულა};

ბ) B = {ერთ კამათელზე იქნება ლუწი რიცხვი, ხოლო მეორე კამათელზე კენტი რიცხვი};

გ) C = {მოსული რიცხვების ჯამი ნაკლები იქნება 5-ზე};

დ) D = {ორივე გაგორებისას მოვა ერთნაირი რიცხვები}.

10. ტაქსოპარკში არის 80 თეთრი და 60 ყვითელი ფერის ტაქსი. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ კლიენტის გამოძახებაზე მოვა თეთრი ტაქსი?

11. სტატისტიკური გამოკითხვის დროს ერთ-ერთი კითხვა ეხება მოქალაქის დაბადების თარიღს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ გამოკითხული ნებისმიერი ერთი მოქალაქე დაბადებული იქნება:

ა) თებერვლის თვეში?

ბ) კვირა დღეს?

გ) 21 რიცხვში?

12. ოლიმპიადის ფინალური ტურის მონაწილე 150 მოსწავლიდან 60 გაანაწილეს სკოლის პირველ სართულზე, ხოლო დანარჩენები – მეორე სართულზე. რა არის იმის ალბათობა, რომ ამ ტურის მონაწილე ნათია მეორე სართულზე გაანაწილეს?

13. კონკურსში მონაწილე მომღერალთაგან 10 გოგონა და 12 ვაჟია. გამომსვლელთა თანმიმდევ-რობას აწესებენ წილისყრით. რა არის იმის ალბათობა, რომ პირველი გამომსვლელი იქნება გოგონა?

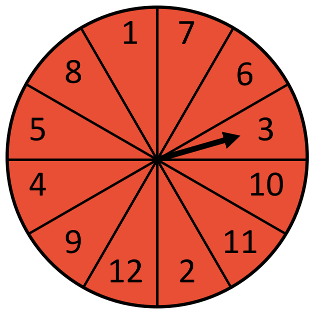
14. ურნაში 7 თეთრი, 6 წითელი და 4 ლურჯი ბურთულაა. ურნიდან იღებენ ერთ ბურთულას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ამოღებული ბურთულა იქნება ლურჯი?

ბ) ამოღებული ბურთულა არ იქნება წითელი?

გ) ამოღებული ბურთულა იქნება ან თეთრი, ან ლურჯი?

დ) ამოღებული ბურთულა არ იქნება მწვანე?



15. ვატრიალებთ ნახაზზე მოცემულ ბზრიალას (სპინერს). რა იქნება ალ-ბათობა იმისა, რომ:

ა) მოვა ერთნიშნა რიცხვი?

ბ) მოვა 7-ზე მეტი რიცხვი?

გ) მოვა 3-ის ჯერადი რიცხვი?

16. სპინერზე არის 42 ტოლი დანაყოფი, რომლებიც დანომრილია რიცხვებით: 1; 2; ....42. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ სპინერის დატრიალებისას მოვა:

ა) კენტი რიცხვი;

ბ) მარტივი რიცხვი;

გ) 5-ის ჯერადი რიცხვი;

დ) რიცხვი, რომლის ბოლო ციფრია 4;

ე) 38-ზე მეტი რიცხვი.

სავარჯიშოები

17. 36 ბანქოიანი დასტიდან ვიღებთ ერთ ბანქოს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:

ა) ამოღებული ბანქო ტუზია?

ბ) ამოღებული ბანქო 8-ზე დაბალია?

გ) ამოღებული ბანქო ან შვიდიანია, ან მეფე?

დ) ამოღებული ბანქო არ არის ცხრიანი?

18. სეიფის კოდი შედგება ერთმანეთის არატოლი ოთხი ციფრისაგან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სეიფის კოდი არის კლებადობით დალაგებული ოთხი მომდევნო რიცხვი?

19. მოცემულია ორი სიმრავლე: $A = \{2; 3; 5; 6\}$ და $B = \{4; 5; 7; 8; 9\}$. შემთხვევით ირჩევენ ერთ რიცხვს A სიმრავლიდან და მეორე რიცხვს B სიმრავლიდან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ამორჩე-ული ორი რიცხვის ჯამი იქნება 1.

20. მწერლის ნაწარმოების 7 ტომიდან ვირჩევთ 4 ტომს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეულ ოთხ ტომში მოხვდება ნაწარმოების პირველი ტომი?

21. ლაშას ჯიბეში 5, 10, 20 და 50 თეთრიანი თითო მონეტა აქვს. იგი ჯიბიდან შემთხვევით იღებს ორ მონეტას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ მონეტათა თანხათა ჯამი იქნება 25 თეთრი?

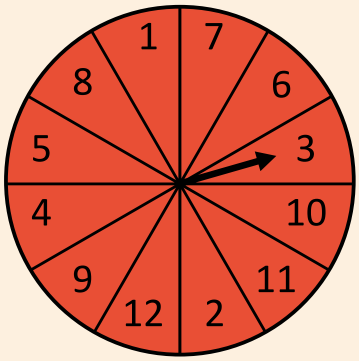
4.2. ორი ხდომილობის ურთიერთდამოკიდებულება

გაკვეთილის დაწყებამდე გაიხსენეთ მოქმედებები სიმრავლეებზე

ხდომილობათა გაერთიანება:

ნიმუშით ახსნა

დავუშვათ, ვატრიალებთ ნახატზე მოცემულ სპინერს და გვაქვს ორი შემთხვევითი ხდომილობა A და B. ვთქვათ, A ხდომილობა არის



A = { 7-ზე მეტი რიცხვის მოსვლა} = {8; 9; 10; 11; 12},

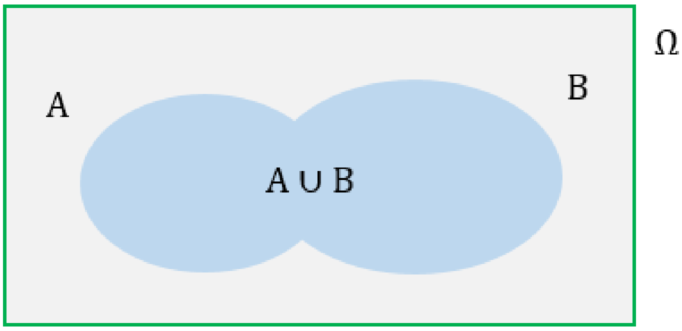
ხოლო B = { ლუწი რიცხვის მოსვლა} = {2; 4; 6; 8; 10; 12}. ცხადია, რომ $n(\Omega)=12$, $n(A)=5$ და $n(B)=6$. შესაბამისად, $P(A)=\frac{5}{12}$ და $P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

ახლა განვიხილოთ ახალი C ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება A და B ხდომილობებიდან რომელიმე მაინც, ე.ი. მოვა ლუწი, ან 7-ზე მეტი რიცხვი.

ცხადია, C = {2; 4; 6; 8; 9; 10; 11; 12}. მაშასადამე, $n(C) = 8$ და $P(C)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

ამ ახალ C ხდომილობას უწოდებენ A და B ხდომილობების გაერთიანებას.

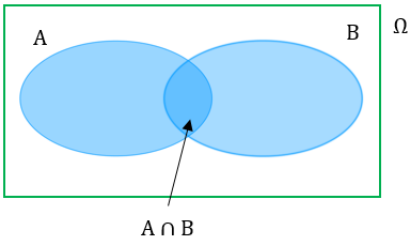
თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამების სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



A და B ხდომილობების გაერთიანება ეწოდება C ხდომილობას, რომელიც შედგება ისეთი ელემენტარული ხდომილობებისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან A და B ხდომილობებიდან ერთ-ერთს მაინც, ანუ ან A ხდომილობას, ან B ხდომილობას, ან ორივეს ერთად. A და B ხდომილობების გაერთიანება ჩაიწერება ასე: **A ∪ B .**

ახლა განვიხილოთ ახალი D ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება იმ შემთხვევაში, როცა ორივე A და B ხდომილობები სრულდება ერთდროულად, ე.ი. მოვა 7-ზე მეტი ლუწი რიცხვი. ცხადია, D = {8; 10; 12} . მაშასადამე, n(D) = 3 და P(D) = $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. ამ ახალ D ხდომილობას უწოდებენ A და B ხდომილობების თანაკვეთას.

თუ მოცემულ სიტუაციას წარმოვადგენთ ვენის დიაგრამების სახით, მაშინ გვექნება შემდეგი სურათი:



A და B ხდომილობების თანაკვეთა ეწოდება D ხდომილობას, რომელიც შედგება ისეთი ელემენტარული ხდომილობებისაგან, რომლებიც ეკუთვნიან A და B ხდომილობებიდან ერთდროულად ორივეს. A და B ხდომილობების თანაკვეთა ჩაიწერება ასე: **A ∩ B.**

ნიმუში 1

დავუშვათ, ვაგორებთ ორ კამათელს. გვაქვს ორი A და B შემთხვევითი ხდომილობა:

A = {ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვი} = {(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)},

B = {მოსული რიცხვების ჯამი ნაკლებია 5-ზე} = {(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(3;1)}.

ვიპოვოთ ამ ორი ხდომილობისთვის გაერთიანების და თანაკვეთის ალბათობები.

ამოცანის მათემატიკური მოდელირება. მოცემულ ექსპერიმენტში ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე შედგება 36 წყვილისაგან, შესაბამისად n(Ω) = 36. ასევე ცხადია, რომ n(A) = 6 და n(B) = 6. აქედან გამომდინარე მივიღებთ: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ და $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

ახლა ვიპოვოთ A და B შემთხვევითი ხდომილობების გაერთიანება და თანაკვეთა. ხდომილობა A ∪ B იქნება: ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვები, ან მათი ჯამი ნაკლები იქნება 5-ზე. ცხადია, რომ

A ∪ B = {(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (3;1); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)}

ე.ი. n(A ∪ B) = 10 და $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

ხდომილობა A∩B იქნება: ორივე კამათელზე მოვა ერთნაირი რიცხვები, რომელთა ჯამი ნაკლები იქნება 5-ზე. ცხადია, რომ A∩B={ (1;1);(2;2)}.

ე.ი. n(A∩B) = 2 და $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

A და მისი საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობების თანაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, რადგან $\overline{A}$ ხდომილობის განმარტების თანახმად მას A ხდომილობასთან საერთო ელემენტი არ გააჩნია. ე.ი. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ და $P(A \cap \overline{A}) = 0$

ასევე, A და მისი საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობების გაერთიანება იქნება მთლიანად ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე, ე.ი. $A \cup \overline{A} = \Omega$ და $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$

ორ A და B შემთხვევით ხდომილობებს ეწოდებათ **თავსებადი ხდომილობები**, თუ მათი თანაკვეთა არაა ცარიელი სიმრავლე, ანუ $A \cap B \neq \emptyset$. წინააღმდეგ **შემთხვევაში ამ ხდომილობებს** ეწოდებათ არათავსებადი ხდომილობები, მათი თანაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა, ე.ი. $A \cap B = \emptyset$ და $P(A \cap B) = 0$. არათავსებადი ხდომილობებისთვის გვექნება:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

დამოუკიდებელი ხდომილობები

განვიხილოთ ორი ბზრიალა A და B (ე.წ. ორი სპინერი):

A-ს აქვს 3 დანაყოფი, რომლის ფერებია: წითელი, მწვანე და ლურჯი;

B-ს აქვს 2 დანაყოფი, რომელსაც აწერია რიცხვები 1 და 2;

დავუშვათ, ორივე ბზრიალას ვატრიალებთ. რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი შეიძლება მივიღოთ ორივეს გაჩერებისას?

როგორც ვხედავთ, დიაგრამაზე, სულ არის 6 განსხვავებული ხდომილობა.

A-თი აღვნიშნოთ პირველ სპინერზე მოსული ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე, ხოლო B-თი მეორე სპინერზე მოსული ელემენტარულ ხდომილობათა სიმრავლე:

A = {წითელი,ლურჯი,მწვანე}
B = {1,2}
Ω = { წ,1; წ,2; ლ, 1; ლ, 2; მ, 1; მ, 2}

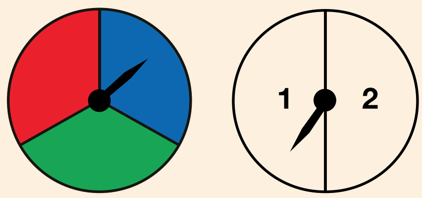
ჩვენ გვინდა განხორციელდეს რაღაც *C* ხდომილობა, როცა A სპინერზე მოვა კონკრეტული ფერი, ხოლო *B* სპინერზე მოვა კონკრეტული რიცხვი.

პირველ სპინერზე მოსული ელემენტარული ხდომილობა არ ახდენს გავლენას მეორე სპინერზე მოსულ ელემენტარულ ხდომილობაზე;

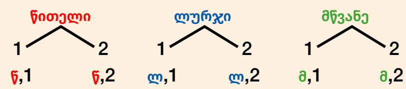
- *რა არის ალბათობა იმისა, რომ სპინერების დატრიალების შედეგად მოვა მწვანე და 1?*

გამომდინარე იქიდან, რომ ვიცით რომ სულ შესაძლო ვარიანტთა სიმრავლე არის 6; P(მწვანე და 1)= $\frac{1}{6}$

P(მწვანე და 1)= $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ = P(A) · P(B)



სპინერი **A** სპინერი **B**



ორ A და B შემთხვევით ხდომილობას ეწოდება **დამოუკიდებელი ხდომილობები,** თუ ერთ-ერთი მათგანის განხორციელება გავლენას არ ახდენს მეორის განხორციელებაზე.

ზოგადად კი შეგვიძლია ვთქვათ, თუ რაიმე A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია, მაშინ შედგენილი „A და B" ხდომილობისთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

P(A და B) = P(A) · P(B)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

დამოკიდებული ხდომილობები

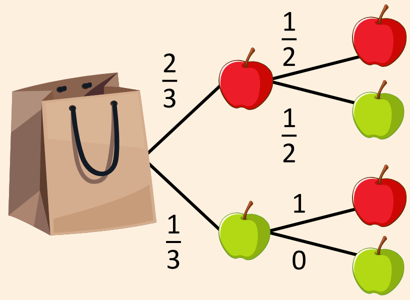
დავუშვათ, პარკში არის 3 ვაშლი, ორი წითელი და 1 მწვანე, პარკიდან ვიღებთ ჯერ ერთ ვაშლს, შემდეგ მეორეს; რა არის ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება წითელი?

პირველად პარკიდან ვაშლის ამოღების დროს, წითელი ვაშლის ამოღების ალბათობა არის $\frac{2}{3}$, ხოლო მწვანე ვაშლის ამოღების ალბათობა $\frac{1}{3}$.

მას შემდეგ, რაც ამოვიღებთ პირველ ვაშლს, ყუთში დარჩება ორი ვაშლი; პირველი ექსპერიმენტი გავლენას ახდენს მეორეზე:

- თუ პირველად ამოვიღებთ წითელს ვაშლს, მაშინ დარჩება 2 ვაშლი, წითელი და მწვანე, თითოეულის ამოღების ალბათობაა $\frac{1}{2}$;
- ხოლო თუ პირველად ამოვიღებთ მწვანე ვაშლს, მისი ალბათობაა $\frac{1}{3}$, რის შემდეგაც პარკში დარჩება ორი ვაშლი, ორივე წითელი, შესაბამისად, წითელი ვაშლის ამოღების ალბათობაა $\frac{2}{2}$ =1, გამომდინარე იქიდან, რომ მწვანე ვაშლი აღარ დარჩა, მისი ალბათობაა 0;

ალბათობა იმისა, რომ ორივე ვაშლი იქნება წითელი არის $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$



ნიმუში 3

პარკში არის 4 წითელი, 2 ყვითელი და 2 ლურჯი ბურთი; პარკიდან ვიღებთ ერთ ბურთს, შემდეგ მეორეს, ისე რომ პირველ ბურთს არ ვაბრუნებთ პარკში;

რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოვიღებთ ჯერ წითელ და მერე ყვითელ ბურთს?

- თუ პირველად ამოვიღებთ წითელს P(წითელი)= $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;
- ბურთის ამოღების შემდეგ, პარკში დარჩება 7 ბურთი, ამიტომ ყვითელი ბურთის მოხვლის ალბათობა იქნება P (ყვითელი) = $\frac{2}{7}$;

ალბათობა იმისა, რომ ჯერ ამოვიღებთ წითელ და შემდეგ ყვითელ ბურთს არის:

P(*წითელი;წითლის შემდეგ ყვითელი*) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

როგორც ვხედავთ, მეორე ექსპერიმენტის შედეგი დამოკიდებულია პირველზე; როდესაც განვიხილავთ დამოკიდებულ ხდომილობებს, ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

P(*A* და *B*)= *P*(*A*) · *P* (*B*,*მას შემდეგ რაც მოხდა A*)

P(*A* ∩ *B*)= *P*(*A*) · *P*(*B*,*მას შემდეგ რაც მოხდა A*)

მინიშნება:

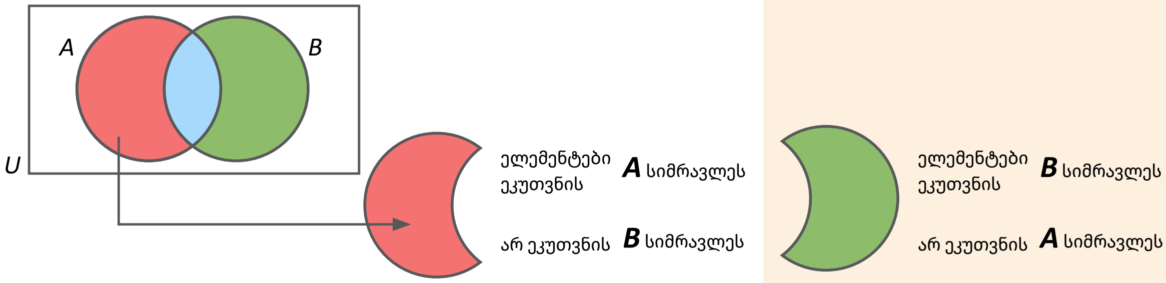
თუ ჩავთვლით, რომ პირველი ექსპერიმენტის შემდეგ ბურთი უნდა დავაბრუნოთ პარკში, მაშინ მივიღებთ დამოუკიდებელ ხდომილობებს; გამოვა, რომ მეორე ექსპერიმენტის შედეგი არ არის დამოკიდებული პირველი ექსპერიმენტის შედეგებზე და მივიღებთ, რომ

P(A და B)= $\frac{4}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

***დამატებითი მასალა მათემატიკის მოყვარულთათვის**

ალბათობა და ვენის დიაგრამები

საკვანძო კითხვა: რამდენი ელემენტია სიმრავლეში A ∪ B? ანუ რას უდრის n(A ∪ B)?

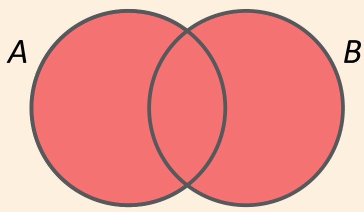


- n(A) = a – აღნიშნავს A სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას.
- n(B) = b – აღნიშნავს B სიმრავლის ელემენტების რაოდენობას.
- n(A∩B) = c– აღნიშნავს იმ ელემენტების რაოდენობას, რომელიც ორივე სიმრავლეს ეკუთვნის.

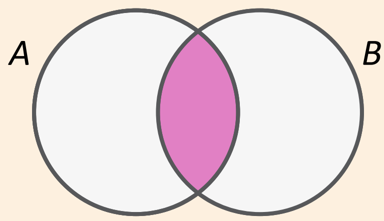
იმისათვის, რომ დავადგინოთ სულ რამდენი ელემენტია სიმრავლეთა გაერთიანებაში, ვიყენებთ ფორმულას:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ალბათობა და ვენის დიაგრამები



- თუ A და B ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეში შემავალი რაიმე ხდომილობებია, მაშინ ხდომილობა „A ან B“ ნიშნავს, რომ ამ ხდომილობის ნებისმიერი წევრი მიეკუთვნება ერთ-ერთ მათგანს მაინც A და B ხდომილობათაგან. ხდომილობას „A ან B“ ეწოდება: A და B **ხდომილობის გაერთიანება** და იგი ასე იწერება: A ∪ B.



- ხდომილობა „A და B“ ნიშნავს, რომ ამ ხდომილობის ნებისმიერი წევრი ეკუთვნის როგორც A-ს, ასევე B-ს. ხდომილობას „A და B“ ეწოდება **A და B ხდომილობების თანაკვეთა** და იგი ასე იწერება: ***A* ∩ *B*.**
- **ალბათობის შეკრების წესი.** ნებისმიერი ორი ხდომილობისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ამასთან, თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ

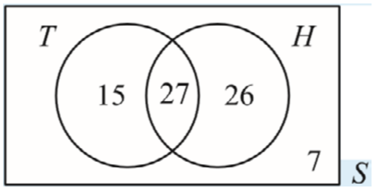
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ორ A და B შემთხვევით ხდომილობას ეწოდება **დამოუკიდებელი ხდომილობები,** თუ ერთ-ერთი მათგანის განხორციელება გავლენას არ ახდენს მეორის განხორციელებაზე. დამოუკიდებელი A და B ხდომილობების ალბათობებისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა: **P(A ∩ B) = P(A) · P(B).** თუ ხდომილობები არაა დამოუკიდებელი, მაშინ მათ ეწოდებათ დამოკიდებული ხდომილობები:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

ნიმუში 1

მოცემული დიაგრამა გვიჩვენებს, თუ სპორტული კლუბის (S) რამდენი წევრი თამაშობს ჩოგბურთს (T) და რამდენი ჰოკეის (H).



ა) განსაზღვრე იმ ადამიანთა რაოდენობა, რომელიც:

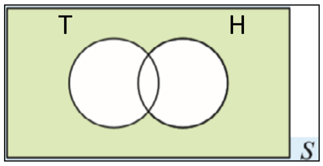
- **I.** სპორტულ კლუბში ირიცხება;
- **II.** თამაშობს ჰოკეის;
- **III.** სპორტის ორივე სახეობითაა დაკავებული;
- **IV.** ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული;
- **V.** ამ ორი სახეობიდან ერთ-ერთით მაინცაა დაკავებული;
- **VI.** დაკავებულია მხოლოდ ჩოგბურთით.

ბ) იპოვე ალბათობა იმისა, რომ კლუბიდან შემთხვევით შერჩეული სპორტსმენი:

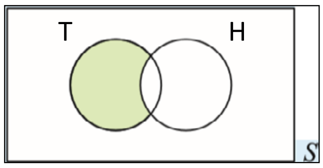
- **I.** ჰოკეის მოთამაშეა;
- **II.** ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული;
- **III.** ამ ორ სახეობიდან ერთ-ერთით მაინცაა დაკავებული.

ამოხსნა:

- **I.** $n(S) = 15 + 27 + 26 + 7 = 75$;
- **II.** $n(H) = 27 + 26 = 53$;
- **III.** $n(H \cap T) = 27$;
- **IV.** ამ ორიდან არც ერთი სახეობით არაა დაკავებული 7 სპორტსმენი (იწერება ასე $\overline{A} \cap \overline{B}$);



- **V.** $n(H \cup T) = 15 + 27 + 26 = 68$;
- **VI.** მხოლოდ ჩოგბურთით დაკავებულია 15 სპორტსმენი.



ბ)

- **I.** $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(S)} = \dfrac{53}{75} \approx 0.707$;
- **II.** $P(\overline{H} \cap \overline{T}) = \dfrac{n(\overline{H} \cap \overline{T})}{n(S)} = \dfrac{7}{75} \approx 0.093$;
- **III.** $P(H \cup T) = \dfrac{n(H \cup T)}{n(S)} = \dfrac{68}{75} \approx 0.907$;

ნიმუში 2

ლუკა და ნიკოლოზი აბარებენ მართვის მოწმობის გამოცდას. იმის ალბათობა, რომ ლუკა ჩააბარებს, არის 0.6. ალბათობა იმისა, რომ ჩააბარებს ერთ-ერთი მათგანი მაინც არის 0.7, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ჩააბარებს ორივე მათგანი, არის 0.3. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ ნიკოლოზი ჩააბარებს გამოცდას:

ჩააბარებს ლუკა – L

ჩააბარებს ნიკოლოზი – N

პირობის თანახმად, $P(L) = 0.6,\ P(L \cup N) = 0.7,\ P(L \cap N) = 0.3$

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) - P(L \cap N)$$

$$0.7 = 0.6 + P(N) - 0.3$$

$$P(N) = 0.7 - 0.6 + 0.3 = 0.4$$

ნიმუში 3

კახა და ლევანი ისვრიან მიზანში. კახას მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,85, ხოლო ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,9. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი ბიჭი მაინც ააცილებს მიზანს:

ამოცანის მათემატიკური მოდელირება. სიმარტივისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები. ვთქვათ, A ხდომილობა არის კახას მიერ მიზანში მოხვედრა, მაშინ პირობიდან გვაქვს, რომ P(A) = 0,85. A-ს საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობა იქნება, რომ კახა მიზანში ვერ მოარტყამს. შესაბამისად, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

B ხდომილობა იყოს ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრის, პირობიდან P(B) = 0,9. B-ს საწინააღმდეგო $\bar{B}$ ხდომილობა იქნება, რომ ლევანი მიზანში ვერ მოარტყამს.
შესაბამისად, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

ცხადია, რომ ლევანის მიერ მიზანში მოხვედრა, ან არმოხვედრა არავითარ გავლენას არ ახდენს კახას მიერ მიზანში მორტყმაზე და, პირიქით. ე.ი. A და B ხდომილობები და, შესაბამისად, $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ხდომილობები დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

ახლა გავიაზროთ რას ნიშნავს, რომ ამოცანის პირობის თანახმად, უნდა ვიპოვოთ იმის ალბათობა, რომ ერთ-ერთი ბიჭი მაინც ააცილებს მიზანს. ცხადია, ეს ნიშნავს, რომ $\bar{A}$ და $\bar{B}$ ხდომილობებიდან უნდა განხორციელდეს ერთ-ერთი მაინც, ე.ი. უნდა ვიპოვოთ $\bar{A} \cup \bar{B}$ ხდომილობის ალბათობა. (2) ფორმულით გვექნება:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}15 + 0{,}1 - 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}25 - 0{,}015 = 0{,}235$$

სავარჯიშოები

1. გაარკვიეთ, თავსებადია თუ არა ქვემოთ ჩამოთვლილი A და B ხდომილობები?

ა) ვაგორებთ ერთ კამათელს:
A = {ლუწი რიცხვის მოსვლა};
B = {კენტი რიცხვის მოსვლა}.

ბ) ვაგორებთ ერთ კამათელს:
A = {ორის ჯერადი რიცხვის მოსვლა};
B = {სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლა}.

გ) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:
A = {ერთხელ მაინც მოვა საფასური};
B = {ერთხელ მაინც მოვა გერბი}.

დ) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:
A = {ზუსტად ორჯერ მოვა საფასური};
B = {ზუსტად ერთხელ მოვა გერბი}.

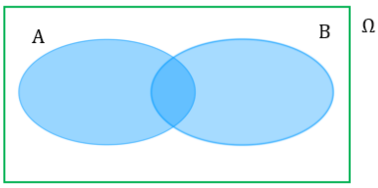
ე) ერთ მონეტას ვაგდებთ სამჯერ:
A = {ზუსტად ორჯერ მოვა გერბი};
B = {ზუსტად ორჯერ მოვა საფასური}.

ვ) ვაგორებთ ორ კამათელს:
A = {ორივეზე ჯამში 5-ზე ნაკლების მოსვლა};
B = {ორივეზე ერთნაირი რიცხვის მოსვლა}.

ზ) ვაგორებთ ორ კამათელს:
A = {ორივეზე ჯამში 9-ზე მეტის მოსვლა};
B = {ერთზე მაინც სამიანის მოსვლა}.

2. ნახაზზე მოცემულია ვენის დიაგრამა A და B ხდომილობებისათვის. გააფერადე ქვემოთ მოცემული ხდომილობის შესაბამისი არე:

ა) $\overline{A}$;
ბ) $\overline{B}$;
გ) $A \cup B$;
დ) $A \cap B$;
ე) $A \setminus B$;
ვ) $B \setminus A$;
ზ) $\overline{A} \cup B$;
თ) $\overline{A} \cap B$;
ი) $A \cup \overline{B}$;
კ) $A \cap \overline{B}$;
ლ) $\overline{A} \setminus B$;
მ) $B \setminus \overline{A}$.



3. მოცემულია A და მისი საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობა. ქვემოთ მოცემული ტოლობებიდან რომელია სამართლიანი?

ა) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$;
ბ) $P(\overline{A}) \cdot P(A) = 1$;
გ) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
დ) $P(A) = \frac{1}{P(\overline{A})}$;
ე) $P(\overline{A}) = \frac{1}{P(\overline{A})}$;
ვ) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

სავარჯიშოები

4. იპოვეთ:

ა) $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა, თუ A ხდომილობის ალბათობაა 0,4;

ბ) A ხდომილობის ალბათობაა, თუ $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა 0,57;

გ) $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაა, თუ იგი A ხდომილობის ალბათობაზე 3-ჯერ დიდია;

დ) A ხდომილობის ალბათობაა, თუ იგი 0,4-ით ნაკლებია $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობაზე;

ე) A და მისი საწინააღმდეგო $\bar{A}$ ხდომილობის ალბათობები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 2 : 3.

5. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:

ა) ორი კამათლის გაგორებისას არცერთზე არ მოვა 5-იანი?

ბ) ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 11-ზე ნაკლები?

გ) სამი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 4-ზე მეტი?

დ) სამი კამათლის გაგორებისას არცერთზე არ მოვა 2-იანი?

ე) მონეტის ხუთჯერ აგდებისას არც ერთხელ არ მოვა საფასური?

ვ) მონეტის ოთხჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა გერბი?

6. A და B არათავსებადი ხდომილობებია. ცნობილია, რომ P(A) = 0,2 და P(B) = 0,45. იპოვეთ:

ა) $P(\bar{A})$; ბ) $P(\bar{B})$; გ) $P(A \cup B)$; დ) $P(A \cap B)$.

7. A და B არათავსებადი ხდომილობებია. ცნობილია, რომ P(A) = 0,3 და $P(A \cup B)$ = 0,45. იპოვეთ:

ა) $P(\bar{A})$; ბ) P(B); გ) $P(\bar{B})$; დ) $P(A \cap B)$.

8. „სამართლიანი კამათელი“ გააგორეს ერთხელ. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ გაგორდება:

ა) „3“ ან „5“;

ბ) უარყოფითი რიცხვი;

გ) „9“;

დ) „4“-ზე ნაკლები რიცხვი;

ე) „5“-ისგან განსხვავებული რიცხვი.

9. წესიერი ოქტაედრის მქონე კამათელი, რომლის წახნაგები გადანომრილია 1-დან 8-ის ჩათვლით, გააგორეს ერთხელ. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ გაგორდება:

ა) „4“; ბ) „5“-ზე ნაკლები რიცხვი;

გ) არანაკლებ „8“; დ) „2“-სა და „5“-ს შორის რაიმე რიცხვი 2-დან 5-მდე.

10. ტომარაში მოთავსებულია ერთნაირი ზომის 4 წითელი და 3 მწვანე ბურთულა. განსაზღვრე ალბათობა იმისა, რომ ტომრიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთულა არის:

ა) წითელი; ბ) მწვანე:

გ) წითელი ან მწვანე; გ) წითელი და მწვანე.

11. 36 ბანქოსგან შემდგარი დასტა თანაბრად გადაშალეს და შემდეგ შემთხვევითად შერჩეული ერთი ბანქო ამოწიეს ზემოთ. იპოვე ალბათობა იმისა, რომ ამოწეული ბანქო:

ა) ვალეტია; გ) შავი ფერის ბანქოა; ე) აგურის ტუზია;

სავარჯიშოები

ბ) არაა ვალეტი; დ) აგურია; ვ) აგურია ან ტუზია.

12. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ქუჩაში შემთხვევით შერჩეულ ადამიანს დაბადების დღე აქვს:

ა) მაისში;

ბ) ივნისში;

გ) მაისში ან ივნისში.

13. ერთი მონეტა ააგდეს სამჯერ ზედიზედ. გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ დაფიქსირდება შედეგთა შემდეგი თანმიმდევრობა:

ა) გერბი, გერბი, გერბი;

ბ) საფასური, გერბი, საფასური.

14. ორი მსროლელი ერთდროულად ესვრის მიზანში. ირაკლი მიზანს არტყამს 70% სიზუსტით, ხოლო ბექა 80% სიზუსტით. გამოთალე ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ორივე მათგანი მოახვედრებს მიზანს;

ბ) ორივე მათგანი ააცილებს მიზანს;

გ) ირაკლი მოახვედრებს, მაგრამ ბექა ააცილებს;

დ) ბექა მოახვედრებს, მაგრამ ირაკლი ააცილებს.

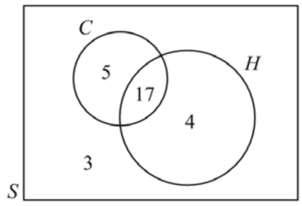
15. მოცემულ დიაგრამაზე წარმოდგენილია S კლასის მოსწავლეებიდან რამდენი სწავლობს ქიმიას (C) და ისტორიას (H). გამოთვალე ალბათობა იმისა, რომ ამ კლასიდან შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე:

ა) სწავლობს ამ ორივე საგანს;

ბ) სწავლობს ამ ორიდან ერთ-ერთ საგანს მაინც;

გ) სწავლობს მხოლოდ ქიმიას;

დ) არ სწავლობს ამ ორიდან არც ერთ საგანს.



16. კამათელს ვაგორებთ ორჯერ. გამოთვალეთ:

ა) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა 3-ზე ნაკლები ან 10-ზე მეტი ქულა?

ბ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ჯამში მოვა ან 5 ქულა, ან 9 ქულა?

გ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ პირველ გაგორებაზე მოვა 4-ზე მეტი ქულა, ხოლო მეორე გაგორებაზე მოვა 3-ზე ნაკლები ქულა?

დ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ერთხელ მაინც მოვა 6 ქულა?

17. სპინერზე არის 32 ტოლი დანაყოფი, რომლებიც დანომრილია რიცხვებით: 1; 2; ....32. თუ სპინერი დაატრიალეს ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ორივეჯერ მოვა კენტი რიცხვი.

ბ) ორივეჯერ არ მოვა მარტივი რიცხვი.

გ) პირველად მოვა 10-ზე ნაკლები რიცხვი, ხოლო მეორეჯერ 25-ზე მეტი რიცხვი.

დ) რიცხვი, რომლის ბოლო ციფრია 4.

მაგიდაზე დევს ხუთი დანომრილი ბარათი, რომელთა ნომრებია: 1, 2, 3, 4 და 5. თანმიმდევრო-

სავარჯიშოები

ბით, ისე რომ ნომრებს ვერ ხედავენ, იღებენ ერთ ბარათს, იწერენ მასზე აღნიშნულ ციფრს და ბარათს უკან დებენ. შემდეგ იღებენ ისევ ერთ ბარათს და მასზე აღნიშნულ ციფრს მარჯვნიდან მიუწერენ პირველად დაწერილ ციფრს, ასე მიიღებენ ორნიშნა რიცხვს. აღწერე ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცე და დაადგინეთ მასში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა – $n(\Omega)$.

19. ურნაში 8 წითელი და 7 ყვითელი ბურთულაა. ურნიდან თანმიმდევრობით იღებენ ორ ბურთულას (უკან დაბრუნების გარეშე). რას უდრის იმის ალბათობა, რომ:

ა) პირველი ამოღებული ბურთი წითელი იყოს?

ბ) ორივე ამოღებული ბურთი წითელი იყოს?

გ) პირველი ამოღებული ბურთი წითელი იყოს, ხოლო მეორე ყვითელი?

დ) ორივე ამოღებული ბურთი ყვითელი იყოს?

20. ურნაში მოთავსებულია ცხრა ბურთულა, რომლებიც გადანომრილია ციფრებით 1-დან 9-მდე. კახა იღებს ურნიდან ერთ ბურთულას, ინიშნავს შესაბამის რიცხვს და ბურთულას უკან ურნაში აბრუნებს. შემდეგ ურნიდან ბურთულას იღებს თამუნა. რა არის იმის ალბათობა, რომ:

ა) კახაც და თამუნაც ამოიღებენ ლუწ რიცხვს;

ბ) კახაც და თამუნაც ამოიღებენ კენტ რიცხვს;

გ) კახა ამოიღებს 7-ზე მეტ რიცხვს, ხოლო თამუნა ამოიღებს 4-ზე ნაკლებ რიცხვს;

დ) ორივეს ჯამში ექნება 16.

21. ჩოგბურთელი ორ ტურნირში მონაწილეობს. ერთ ტურნირში მისი გამარჯვების ალბათობაა 0,8, ხოლო მეორეში, პირველი ტურნირის შედეგისგან დამოუკიდებლად, მისი გამარჯვების ალბათობაა 0,75. გამოთვალე იმის ალბათობა, რომ:

ა) ჩოგბურთელი ორივე ტურნირში გაიმარჯვებს;

ბ) ჩოგბურთელი ვერცერთ ტურნირში ვერ გაიმარჯვებს;

გ) ჩოგბურთელი მხოლოდ ერთ ტურნირში გაიმარჯვებს.

22. გვანცა და ბექა თანაკლასელები არიან. მათ კლასში 20 მოსწავლეა. მასწავლებელმა მათემატიკის შემაჯამებელი წერისთვის კლასი გაყო ორ ტოლ ჯგუფად. რა არის იმის ალბათობა, რომ გვანცა და ბექა ერთ ჯგუფში მოხვდნენ?

23. ნიკა და ნანა და-ძმანი არიან. მათი ტურისტული ჯგუფი, რომელშიც 24 წევრია, გაემგზავრა საფრანგეთში პარიზის დასათვალიერებლად. ერთ-ერთ ექსკურსიაზე ჯგუფი თანაბრად უნდა განაწილდეს სამ მარშრუტზე. რა არის იმის ალბათობა, რომ ნიკა და ნანა ერთ მარშრუტზე მოხვდებიან?

24. **გამოწვევა:** ჯგუფის 25 სტუდენტიდან 9 სტუდენტმა ფიზიკის შემაჯამებელ წერაში მიიღო უმაღლესი შეფასება, ხოლო 8 სტუდენტმა – მათემატიკის შემაჯამებელ წერაში. ამასთან, აღმოჩნდა 5 სტუდენტი, რომლებმაც ორივე წერაში უმაღლესი შეფასება დაიმსახურეს. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამ ჯგუფის შემთხვევით შერჩეულმა სტუდენტმა:

ა) ერთ წერაში მაინც მიიღო უმაღლესი შეფასება?

ბ) უმაღლესი შეფასება არცერთ წერაში არ მიიღო?

სავარჯიშოები

25. ჯგუფის 30 სტუდენტიდან 14 სტუდენტს ჰყავს და, 19 სტუდენტს ჰყავს ძმა, ხოლო 7 სტუდენტს, არც და ჰყავს და არც ძმა. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ამ ჯგუფიდან შემთხვევით შერჩეულ სტუდენტს:

ა) ჰყავს დედმამიშვილი?

ბ) არ ჰყავს არც და არც ძმა?

26. კახას სურს აიღოს მანქანის მართვის მოწმობა, რისთვისაც მან აუცილებლად უნდა ჩააბაროს ორი გამოცდა, თეორიული და პრაქტიკული. ალბათობა იმისა, რომ კახა ჩააბარებს თეორიულ გამოცდას არის 0,85, ხოლო პრაქტიკული გამოცდის ჩაბარების ალბათობაა 0,65. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კახა აიღებს მართვის მოწმობას.

27. **გამოწვევა:** მონეტას აგდებენ სამჯერ. გამოთვალეთ:

ა) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მხოლოდ ერთხელ მოვა საფასური?

ბ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ერთხელ მაინც მოვა გერბი?

გ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ან პირველი აგდებისას მოვა გერბი, ან მესამე აგდებისას მოვა გერბი?

28. **გამოწვევა:** კამათელს ვაგორებთ ორჯერ. გამოთვალეთ:

ა) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ ორივეჯერ მოვა 2 ქულა?

ბ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ არც ერთხელ არ მოვა 5 ქულა?

გ) რას უდრის იმის ალბათობა, რომ მხოლოდ ერთხელ მოვა 3 ქულა?

29. **გამოწვევა:** ყუთში 30 ბურთია, მათგან ზოგი არის შავი და ზოგი არის თეთრი. რამდენი თეთრი და რამდენი შავი ბურთია ყუთში, თუ ალბათობა იმისა, რომ ორი ამოღებული ბურთიდან ორივე იქნება შავი ფერის, არის $\frac{13}{29}$?

30. **გამოწვევა:** კლასში 20 მოსწავლეა, მათგან მორიგეობისთვის უნდა შეირჩეს 2 მოსწავლე. ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ორი მოსწავლიდან ერთი იქნება ბიჭი და ერთი იქნება გოგო, არის $\frac{48}{95}$. რამდენი ბიჭი და რამდენი გოგოა კლასში?

31. **გამოწვევა:** მსროლელი 4-ჯერ ესვრის მიზანს. თითოეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0,9. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

ა) ყველას ააცილებს;

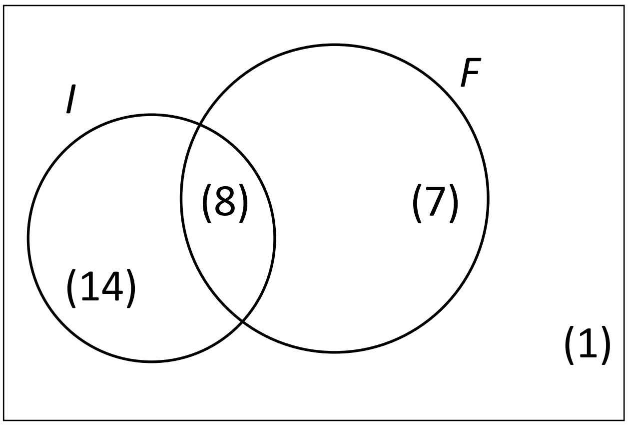
ბ) პირველს მოახვედრებს, ხოლო დანარჩენს ააცილებს;

გ) მხოლოდ ერთხელ მოახვედრებს;

დ) მხოლოდ ორჯერ მოახვედრებს.

4.3. პირობითი ალბათობა

ძალიან ხშირად საქმე გვაქვს შედგენილ ხდომილობებთან. კერძოდ, მოცემულია ხდომილობა და ამ პირობაში გვაინტერესებს მეორე (სხვა) ხდომილობის ალბათობა. ამ შემთხვევაში განიხილავენ ე.წ. პირობით ალბათობებს.
განვიხილოთ შემდეგი ვენის დიაგრამა, რომელიც გვიჩვენებს კლასში სტუდენტების რაოდენობას, ვინც სწავლობს იტალიურს (I) და ფრანგულს (F).



ვთქვათ, სტუდენტი შემთხვევით არის არჩეული კლასიდან და აღმოჩნდა, რომ ის სწავლობს ფრანგულს. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ აგრეთვე ალბათობა იმისა, რომ ეს სტუდენტი სწავლობს იტალიურს. ამ ალბათობას ვუწოდებთ პირობით ალბათობას, ვინაიდან ის არის ალბათობა (I)-ს მოსვლისა იმ პირობაში, რომ F მოხდა.

P (I-ისა იმ პირობაში, რომ F მოხდა) $= \dfrac{8}{15}$,

სადაც 8 არის რაოდენობა იმ სტუდენტებისა, რომლებიც სწავლობენ იტალიურსა და ფრანგულს, ხოლო 15 არის იმ სტუდენტების რაოდენობა, რომლებიც სწავლობენ ფრანგულს.

ორი A და B ხდომილობისთვის, ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნას “$A|B$”, რომ აღვნიშნოთ შემდეგი ხდომილობა “A იმ პირობაში რომ B მოხდა“.

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}.$$

თუ თითოეული ხდომილობა ტოლმოსალოდნელია, შევნიშნოთ, რომ:

$$\frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

მაშასადამე, მივიღეთ პირობითი ალბათობის ფორმულა:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $P(A|B)$, თუ: ა) $P(A\cap B) = 0.1$ და $P(B) = 0.4$;
გ) $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ და $P(A\cup B) = 0.5$; ბ) A და B არათავსებადი ხდომილობებია.

2. ალბათობა იმისა, რომ ერთ დღეს იქნება ღრუბლიანი ამინდი არის 0.4. ალბათობა იმისა, რომ ერთ დღეს ღრუბლიანი ამინდია და იწვიმებს არის 0.2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იქნება წვიმიანი დღე, თუ არის ღრუბლიანი ამინდი.

3. ჯგუფში 50 სტუდენტია, 40 სწავლობს მათემატიკას, 32 – ფიზიკას. თითოეული სტუდენტი სწავლობს სულ მცირე ერთ საგანს ამ ორიდან.

ა) გამოიყენეთ ვენის დიაგრამა იმის საპოვნელად, თუ რამდენი სტუდენტი სწავლობს ორივე საგანს.

ბ) თუ შემთხვევით ჯგუფიდან შეარჩიეს ერთი სტუდენტი, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

1. ის სწავლობს მათემატიკას, მაგრამ არ სწავლობს ფიზიკას.
2. ის სწავლობს ფიზიკას იმ პირობაში, რომ ის სწავლობს მათემატიკას.

4. 40 ბიჭიდან 23-ს აქვს ყავისფერი თმა, 18-ს – ლურჯი თვალები და 26-ს – ყავისფერი თმა ან ლურჯი თვალები ან ორივე.

ა). ააგეთ ვენის დიაგრამა და დაიტანეთ მასზე მოცემული ინფორმაცია.

ბ). თუ შემთხვევით ჯგუფიდან შეარჩიეს ერთი ბიჭი, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ

1. მას აქვს ყავისფერი თმა და ლურჯი თვალები.
2. მას აქვს ლურჯი თვალები იმ პირობაში, რომ მას აქვს ყავისფერი თმა.

5. ქალაქის მაცხოვრებლების 25%-ს ჰყავს კატა, 55%-ს ჰყავს ძაღლი და 30%-ს – არცერთი.

ა) ააგეთ ვენის დიაგრამა და დაიტანეთ მასზე მოცემული ინფორმაცია.

ბ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული მაცხოვრებელს:

1. ჰყავს კატა იმ პირობაში, რომ მას ჰყავს ძაღლი.
2. არ ჰყავს ძაღლი იმ პირობაში, რომ მას ჰყავს კატა.

6. გამოიკითხა 400 ოჯახი. აღმოჩნდა, რომ გამოკითულა 90%-ს აქვს ტელევიზორი და 80%-ს – კომპიუტერი. თითოეულ ოჯახს აქვს სულ მცირე ერთი ნივთი ამ ორიდან. შემთხვეით შეარჩიეს ერთი ოჯახი და აღმოჩნდა, რომ მას აქვს კომპიუტერი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ოჯახს ასევე აქვს ტელევიზორიც.

7. ერთ ქალაქში იბეჭდება სამი გაზეთი. მთელი ქალაქის პოპულაციის 20% კითხულობს A გაზეთს, 16% კითხულობს B გაზეთს, 14% კითხულობს C გაზეთს. 8% კითხულობს A და B გაზეთს, 5% – A და C გაზეთს, 4% – B და C გაზეთს და 2% – სამივე გაზეთს. შემთხვევით შერჩეული იქნება ერთი მცხოვრები. ააგეთ ვენის დიაგრამა, რათა იპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შერჩეული მცხოვრები:

ა) არ კითხულობს არც ერთ გაზეთს.

ბ) კითხულობს სულ მცირე ერთ გაზეთს.

გ) კითხულობს ზუსტად ერთ გაზეთს.

დ) კითხულობს A ან B-ს (ან ორივეს).

ე) კითხულობს A-ს იმ პირობებში, რომ კითხულობს სულ მცირე ერთს.

ვ) კითხულობს C-ს იმ პირობებში, რომ კითხულობს ან A-ს ან B-ს ან ორივეს.

სავარჯიშოები

8. *A* ურნაში 2 წითელი და 3 ლურჯი ბურთია, ხოლო *B* ურნაში 4 წითელი და 1 ლურჯი ბურთია. პიტერმა შემთხვევით შეარჩია ურნა და შემთხვევით ამოიღო ბურთი.

ა) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის წითელია.

ბ) მოცემულია, რომ ამოღებული ბურთი წითელია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ის არის *B* ურნიდან.

9. მოცემულია, რომ: $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ და $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

ა) იპოვეთ $P(A\cap B)$

ბ) იპოვეთ $P(B|A)$

გ) იპოვეთ $P(A|B)$

10. უნივერსიტეტის სტუდენტების 54% გოგონაა. ბიჭი სტუდენტების 8% დალტონიკია, ხოლო სტუდენტი გოგონების 2% არის დალტონიკი.

ა) შემთხვევით შერჩეული სტუდენტი დალტონიკია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის ბიჭია.

ბ) შემთხვევით შერჩეული სტუდენტი არ არის დალტონიკი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის გოგოა.

4.4. გეომეტრიული ალბათობა

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე AB მონაკვეთი. მასზე აღებულია ორი C და D წერტილი ისე, რომ ის დაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად.

შემთხვევით ირჩევენ წერტილს AB მონაკვეთიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ის ჩავარდება CD მონაკვეთში. ამ შემთხვევაში ალბათობის გამოსათვლელად არ გამოგვადგება ჩვენთვის კარგად ცნობილი წესი, ვინაიდან გაგვიჭირდება წერტილების რაოდენობის დადგენა. ამ შემთხვევაში ამ ალბათობას გამოითვლიან შემდეგი წესით

$$P = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{3},$$

ანუ როგორც მონაკვეთების სიგრძეების შეფარდებას. ამ ალბათობას უწოდებენ გეომეტრიულ ალბათობას. მაშასადამე, თუ A ხდომილობა რაიმე წრფის ნაწილია, ალბათობა იქნება სიგრძეების შეფარდება; თუ სიბრტყის ნაწილია – ფართობების შეფარდება, ხოლო სივრცის შემთხვევაში კი – მოცულობების შეფარდება. ეს კი ზოგადად შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

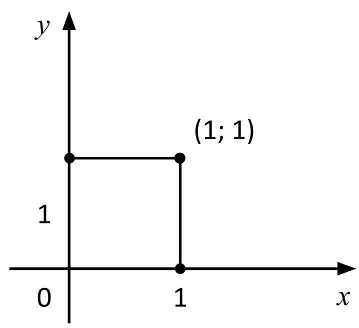
სადაც |A| აღნიშვნა ნიშნავს სიგრძეს, ფართობს ან მოცულობას, შესაბამისად.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი (შეხვედრის ამოცანა).

ორი პირი შეთანხმდა შეხვედრის შესახებ წინასწარ დათქმულ ადგილას 12:00-დან 13:00 საათამდე. ამასთან, პირველი მისული მეორეს ელოდება 20 წუთის განმავლობაში და შემდეგ მიდის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან, თუ ისინი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ირჩევენ თავიანთი მოსვლის დროს.

ამოხსნა

ვთქვათ, პირველის მოსვლის დრო იყო x სთ, ხოლო მეორეს მოსვლის დრო y სთ. ვინაიდან ისინი ერთმანეთს ხვდებიან 12:00-დან 13:00 საათამდე, ეს იმას ნიშნავს, რომ x და y ღებულობს მნიშვნელობებს [0;1]-დან. განვიხილოთ საკოორდინატო სიბრტყე და სიმარტივისთვის ავიღოთ ერთეულოვანი კვადრატი.



ამ კვადრატის ნებისმიერი წერტილი იქნება ხდომილობათა სივრცის ელემენტი; მაშასადამე, ხდომილობათა სივრცეა ერთეულოვანი კვადრატი,

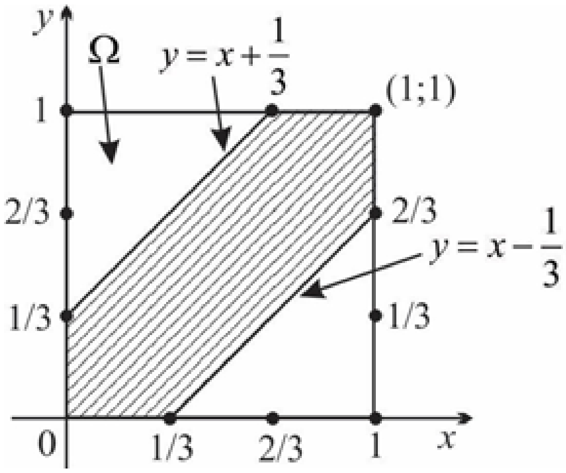
$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0;1]\}$,

რაც შეეხება საძიებელ ხდომილობას ანუ ხდომილობას იმისა, რომ ისინი ერთმანეთს შეხვდებიან, ავღნიშნავთ A-თი და ის უდრის

$A = \left\{(x,y) \mid |x-y| \le \frac{1}{3}\right\}$.

ახლა კი $|x-y| \le \frac{1}{3}$ უტოლობის ამოხსნა წარმოვიდგინოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე

$$\begin{cases} x - y \le \frac{1}{3} \\ x - y \ge -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge x - \frac{1}{3} \\ y \le x + \frac{1}{3} \end{cases}$$



ხოლო საძიებო ალაბათობა არის დაშტრიხული ფიგურის ფართობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან ანუ

$$p(A) = \frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)}{1} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

ე.ი. შეხვედრის ალბათობაა $\frac{5}{9}$.

სავარჯიშოები

1. ვთქვათ, მოცემულია ერთეულოვანი AB მონაკვეთი. ამ მონაკვეთზე შემთხვევით ირჩევენ C წერტილს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ AC მონაკვეთის სიგრძე იქნება მეტი $\frac{3}{4}$-ზე.

2. ვთქვათ, x და y არის [0;1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული წერტილები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $x + y \leq \frac{1}{2}$.

3. ვთქვათ, x და y არის [0;1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული წერტილები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $2x + y \leq 1$.

4. ერთეულოვან კვადრატში ჩახაზულია წრე. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს კვადრატიდან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის წერტილი ჩავარდება წრეში.

5. წრეწირზე შემთხვევით ირჩევენ სამ წერტილს და მიმდევრობით აერთებენ მათ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ წერტილების შეერთებით მიღებული სამკუთხედი იქნება მახვილკუთხა.

6. ერთეულოვან AB მონაკვეთზე შემთხვევით ირჩევენ ორ წერტილს. არჩეული ორი წერტილით AB მონაკეთი გაიყოფა სამ მონაკვეთად. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიღებული მონაკვეთებით სამკუთხედი მიიღება.

7. წრეში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს წრიდან. იპოვეთ ალბათობა, იმისა რომ ეს წერტილი არ ჩავარდება სამკუთხედში.

8. წრეში შემთხვევით ირჩევენ წერტილს. იპოვეთ ალბათობა, იმისა რომ ეს წერტილი იქნება ამ წრეში ჩახაზულ წესიერ ექვსკუთხედში.

9. ვთქვათ, x და y არის [0;1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული წერტილები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $|x - y| \leq \frac{1}{2}$.

10. ვთქვათ, x და y არის [0;1] შუალედიდან შემთხვევით აღებული წერტილები. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $x - y \leq \frac{1}{2}$.

პირველი არხი, & საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინიტრო. (2020). პირველი არხი ტელესკოლა - YouTube. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/@Teleskola-1tv

საქსტატი. (2020). სტატისტიკა ბავშვებისა და მოზარდებისთვის. Juniors.geostat.ge. http://juniors.geostat.ge/teen-stat/my-country

AgroNews. (2017). ნიადაგის ეროზია და მის საწინააღმდეგო ღონისძიებები /რეკომენდაცია. AgroNews.ge. https://agronews.ge/niadagis-erozia-da-mis-satsinaaghmdego-ghonisdziebebi-rekomendatsia/

Dabrundashvili, N. (2019, March 11). 19) Forms კითხვარის შექმნა. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=CJSMRooz4Mc&list=PLPRuo4LKS8m24FSZ9isTSEaTyLzXufUbZ&index=3

Datukishvili, G. (2017). დიაგრამები - გრაფიკები - წრიული Excel 2016 Pie chart. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=yFzHL_bhPCs

Desmos. (2023). Desmos.com. https://www.desmos.com/

Mathigon. (2022). Polypad – Virtual Manipulatives. Mathigon. https://mathigon.org/polypad#random

Sciencemuseum. (2018). Florence Nightingale: The pioneer statistician. Science Museum. https://www.sciencemuseum.org.uk/objects-and-stories/florence-nightingale-pioneer-statistician

Tsertsvadze, K. (2022). ექსელში სვეტოვანი დიაგრამის აგება. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=rE47AT-OPos

Tsertsvadze, K. (2022). პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი. Www.youtube.com. https://www.youtube.com/watch?v=jeCyh0EI4h4

ა(ა)იპ პროფესიული უნარების სააგენტო (2022). მათემატიკური წიგნიერება.

https://vet.ge/ge/resources/educational-resources?page=12